RAC$\mathbb{SAM}$
Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.
VOL. **99** (1), 2005, pp. 79–117
Ciencias de la Computación / Computational Sciences

A Modal Logic for Incidence Spherical Geometry

Alfonso Ríder Moyano, Rafael María Rubio Ruiz

Abstract. Usually, the incidence geometries are based in two-sorted structures formed of points, lines conected each other for a relationship. Furthermore, we introduce a one-sorted structure that we call Spherical frame which results appropriate to build a semantic base that allows its consideration in modal language. We build an axiomatic suystem for that language will be determinated by the structure created.

Una Lógica Modal para la Geometría Esférica de Incidencia

Resumen. Habitualmente, las geometrías de incidencia están basadas en estructuras bisurtidas formadas por puntos y rectas, y conectadas por una relación entre ambas clases. En lo que sigue, introducimos una estructura monosurtida, que llamamos Marco Esférico de Incidencia, la cual resulta adecuada, para construir una base semántica que permita su consideración en el lenguaje modal. Construiremos así un sistema axiomático para dicho lenguaje, que estará determinado por la estructura creada, es decir probaremos su corrección y completitud.

1 Introducción

El interés por estudiar sistemas deductivos capaces de representar mediante un cálculo establecido con precisión los diferentes modos de razonamiento, sobre distintas facetas de la actividad humana, se ha incrementado de manera notable, debido entre otras cosas, al auge de las Ciencias Computacionales. Si además, esto se logra de un modo computacionalmente eficiente su interés es aún más claro. De esta forma, se han ido desarrollando sistemas formales de tipo modal (aléticos, deónticos, doxásticos, epistémicos, temporales, dinámicos,etc,...) capaces de representar el razonamiento humano con relación a los conceptos de necesidad, deber, creencia, conocimiento, temporalidad, estado tras la ejecución de un programa etc,.. Si bién la literatura sobre estos sistemas es abundante y sigue proliferando, sin duda, actividades del hombre relacionadas con la geometría, ya sea de tipo espacial, plana , etc, las cuales son del máximo interés en múltiples actividades (describir un itinerario, trazar un plano, jugar una partida de ajedrez, trazar una ruta de navegación, etc,..), han sido sin embargo hasta ahora menos estudiadas bajo este punto de vista. Cabe destacar los trabajos de von Wright [38] el cual introduce sistemas con modalidades del tipo "por todas partes" y "en alguna parte", también los autores van Benthem [5] y Goldblatt [19] hacen algunos comentarios sobre el tratamiento modal del espacio, pero sin duda, el trabajo más profundo en esta línea, es decir construyendo un sistema multimodal en sentido clásico, se debe a los autores, Fariñas, Balbiani, Tinchev y Vakarelov [4], los cuales en su trabajo "Modal Logic For Incidence Geometries", construyen sistemas axiomáticos modales para las geometrías de incidencia absoluta, afín y proyectiva; probando además su corrección y completitud respecto de ciertas clases de estructuras (adecuadas para la interpretación modal), las cuales se demuestra

Presentado por Manuel López Pellicer el 4 de mayo de 2005.
Recibido: 25 de abril de 2005. *Aceptado*: 4 de mayo de 2005.
Palabras clave / Keywords: Modal Logic, Classical Riemannian Geometry
Mathematics Subject Classifications: 03B45, 51A45.

que son, categóricamente equivalentes, a las clásicas estructuras de las respectivas geometrías mencionadas. Recientemente, los autores de este trabajo han desarrollado un sistema axiomático modal para la Geometría Hiperbólica plana de incidencia [31]. En este trabajo, siguiendo la línea introducida por estos autores, se construye un sistema formal de tipo modal, para la geometría esférica de incidencia, probándose también su corrección y completitud en un sentido análogo al anteriormente mencionado.

2 La categoría de los planos esféricos de incidencia

En su trabajo sobre los Fundamentos de la Geometría, David Hilbert establece un sistema axiomático para la Geometría Esférica de incidencia (también llamada Geometría Plana de Riemann), en el que se distinguen dos tipos de objetos, puntos y rectas, además de una relación entre ellos llamada de incidencia. Si un punto y una recta están relacionados se dirá que el punto es incidente en la recta, o de manera maś informal que la recta pasa por el punto. Los axiomas son los siguientes:

(PEI0) Los conjuntos de puntos y rectas son disjuntos.

(PEI1) Dos puntos inciden en al menos una recta.

(PEI2 ′) Existen tres puntos no alineados.

(PEI3) Dado un punto existe otro (que se denominará antípoda del primero) tal que toda recta que pase por el primero, pasa por el segundo.

(PEI4) Por dos puntos diferentes no antípodas uno de otro, pasa a lo sumo una recta.

(PEI5) La antípoda de un punto es única.

(PEI7 ′) En cada recta hay dos puntos no antípodas.

Seguidamente, expondremos una axiomática que hemos construido y que probaremos su equivalencia matemática con la de Hilbert y que resultará mas adecuada para su posterior expresión por medio de un lenguaje modal.

Axiomática II

(PEI0) El conjunto de puntos y rectas tiene intersección vacía.

(PEI1) Dos puntos inciden en al menos una recta.

(PEI2) Por cada punto pasan al menos dos rectas distintas.

(PEI3) Dado un punto existe otro (antípoda) tal que toda recta que pase por el primero, pasa por el segundo.

(PEI4) Por dos puntos diferentes no antípodas uno de otro, pasa a lo sumo una recta.

(PEI5) La antípoda de un punto es única.

(PEI6) Cada recta incide en al menos un punto.

(PEI7) Para cada recta y cada punto incidente a ella, existe otro distinto y también incidente no antípoda al primero.

Lema 1 *Consideremos una estructura dada por la terna (P, L, in), donde P y L son dos conjuntos cuyos elementos denominaremos puntos y rectas respectivamente, e "in" es una relación binaria entre ellos, es decir $in \subset P \times L$.*

Si (P, L, in) es un modelo para la axiomática II, entonces se verifican:

(i) *Un punto x es antípoda de otro punto y, si y solo si $x \neq y$ y existen dos rectas distintas $z_1, z_2 \in L$ tales que $x\ in\ z_1$, $x\ in\ z_2$, $y\ in\ z_1$, e $y\ in\ z_2$.*

(ii) *El punto x es antípoda del y, si y solo si y es antípoda de x.*

(iii) *Sean z, t dos rectas cualesquiera, si para todo punto x se verifica que, si $x\ in\ z$ si y solo si $x\ in\ t$, entonces $z = t$.*

(iv) *Consideremos dos puntos x e y no antipodales y una recta cualquiera, se verifica que, si $x\ in\ z$ si y solo si $y\ in\ z$, entonces $x = y$.*

(v) *Existen al menos tres puntos no alineados.*

(vi) *Si x e y son antipodales, cualquier otro punto está alineado con ambos.*

DEMOSTRACIÓN. (i) La implicación directa se obtiene como consecuencia inmediata de los axiomas **(PEI2)** y **(PEI3)**. El recíproco se deduce del axioma **(PEI4)**.

(ii) Se establece directamente de (i).

(iii) Sean $z, t \in L$, los axiomas **(PEI6)**, **(PEI7)** nos aseguran la existencia de $x, y \in P$ tales que

$$x \neq y,\ x\ in\ z,\ y\ in\ z$$

con x e y no antipodales. Utilizando la hipótesis del enunciado tendremos que

$$x\ in\ t \text{ e } y\ in\ t$$

por último aplicando el axioma **(PEI4)** podemos concluir que

$$z = t$$

(iv) Sean x e y dos puntos antipodales, el axioma **(PEI2)** garantiza la existencia de $z, t \in L$ tales que $z \neq t$, $x\ in\ z$ e $x\ in\ t$, haciendo uso de la hipótesis del enunciado tendríamos que

$$y\ in\ z \text{ e } y\ in\ t$$

y del axioma **(PEI4)** se deduce que

$$x = y$$

(v) Sea $x_1 \in P$ el axioma **(PEI2)** nos asegura que $\exists z_1, z_2 \in L$, tales que

$$z_1 \neq z_2,\ x_1\ in\ z_1,\ \text{y } x_1\ in\ z_2.$$

Utilizando el axioma **(PEI7)** podemos afirmar la existencia de $x_2, x_3 \in P$ tales que

$$x_2\ in\ z_1 \text{ y } x_3\ in\ z_2$$

y no siendo x_2 ni x_3 antipodales de x_1. Por último los puntos x_1, x_2, x_3 no están alineados de lo contrario existiría una recta $z_3 \in L$ tal que

$$x_1\ in\ z_3,\ x_2\ in\ z_3,\ x_3\ in\ z_3$$

y al ser x_1 y x_2 no antipodales, utilizando el axioma **(PEI4)** obtendríamos que $z_1 = z_3$. Razonando de igual manera con los puntos x_1 y x_3, llegaríamos a que $z_2 = z_3 = z_1$, lo que resulta contradictorio.

(vi) Sean $x, y \in P$ dos puntos antipodales y s otro punto cualquiera, utilizando el axioma **(PEI1)** encontraremos una recta $z \in L$ tal que

$$x\ in\ z \text{ e } s\ in\ z$$

y al ser x e y antipodales, tendremos que

$$y\ in\ z$$ ■

Proposición 1 *La axiomática II es matemáticamente equivalente a la axiomática de Hilbert, es decir, la estructura (P, L, in) es un modelo de la axiomática II si y solo si lo es de la axiomatización de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la terna (P, L, in) verifica la axiomática II.

El axioma **(PEI2 $'$)** es consecuencia directa del lema 1-(v).

Por otra parte, dada $z \in L$, **(PEI6)** nos permite afirmar la existencia de $x \in P$ tal que $x\ in\ z$, utilizando el axioma **(PEI2)** garantizamos la existencia de una recta $w \in L$, tal que $z \neq w$ y $x\ in\ w$, por último **(PEI7)** nos permite elegir un punto $y \neq x$ no antipodal de éste con $y\ in\ z$, con lo que queda probado **(PEI7)**.

Recíprocamente, supongamos que (P, L, in) verifica la axiomática de Hilbert.

Si el axioma **(PEI2)** fuera falso en algún modelo de la axiomática II, existiría un punto x tal que sería incidente a lo sumo en una recta. Sean x_1, x_2 y x_3 tres elementos de P y z_1, z_2 y z_3 las rectas determinas por el punto x con cada uno de los puntos x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Por la hipótesis de partida sabemos que $z_1 = z_2 = z_3$, con lo que los puntos x_1, x_2, x_3 están alineados. Esto contradice **(PEI2 $'$)**.

El axioma **(PEI6)** es consecuencia inmediata de **(PEI7 $'$)**.

El axioma **(PEI7)** se verifica como consecuencia del axioma **(PEI7 $'$)**.

En efecto, sean $z \in L$ y $x \in P$ tales que $x\ in\ z$. Utilizando el axioma **(PEI6 $'$)** obtenemos dos puntos $x_1, x_2 \in P$, no antipodales y verificando que $x_1\ in\ z$ y $x_2\ in\ z$. Como afirma **(PEI3)**, z contiene al menos cuatro puntos distintos, x_1, x_2 y sus correspondientes antípodas x_1', x_2'. ■

Daremos a continuación una formalización de esta axiomática en un sistema bisurtido de primer orden.

Definición 1 *Una estructura $S = (P, L, in)$, donde P y L son dos conjuntos distintos ambos del vacío, e in una relación binaria entre ellos, se dirá que es un plano esférico de incidencia si verifica:*

(PEI0) $P \cap L = \emptyset$

(PEI1) $(\forall x, y \in P)(\exists z \in L)(x\ in\ z \wedge y\ in\ z)$

(PEI2) $(\forall x \in P)(\exists z, t \in L)(z \neq t \wedge x\ in\ z \wedge x\ in\ t)$

(PEI3) $(\forall x \in P)(\exists y \in P)(\forall z \in L)(x \neq y \wedge (x\ in\ z\ \rightarrow y\ in\ z))$

(PEI4) $(\forall x, y \in P)(\forall z, t, w \in L)((x\ in\ z \wedge\ y\ in\ z \wedge\ x\ in\ t \wedge\ y\ in\ t) \rightarrow (x = y\ \vee z = t\ \vee (x\ in\ w \rightarrow y\ in\ w))$

(PEI5) $(\forall x, y, s \in P)(x \neq y \wedge x \neq s \wedge (\forall z \in L)(x\ in\ z \rightarrow (y\ in\ z \wedge s\ in\ z)) \rightarrow (y = s))$

(PEI6) $(\forall z \in L)(\exists x \in P)(x\ in\ z)$

(PEI7) $(\forall z, w \in L)(\forall x \in P)(\exists y \in P)(x\ in\ w \wedge x\ in\ z \wedge z \neq w \rightarrow x \neq y \wedge y\ in\ z \wedge \neg(y\ in\ w))$

Como es natural, al referirnos a los elementos de P usaremos el apelativo de puntos, para los de L el de rectas y la relación in la llamaremos de incidencia.

Definición 2 *Sean $S = (P, L, in)$ y $S' = (P', L', in')$ dos planos esféricos de incidencia, diremos que una aplicación*

$$f : P \cup L \mapsto P' \cup L'$$

es un homomorfismo de S en S' si:

(i) *para todo $x \in P$, $z \in L$ se tiene $f(x) \in P'$, $f(z) \in L'$*

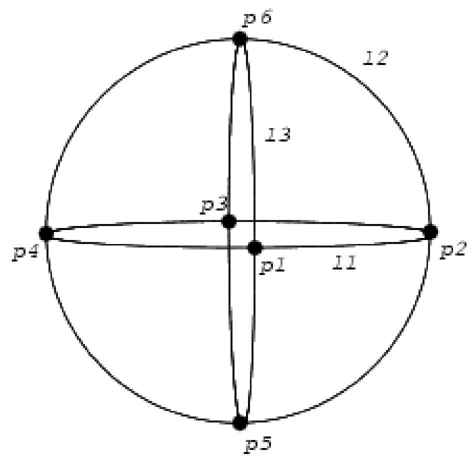
(ii) *para todo $x \in P$, $z \in L$, si $x\ in\ z$ entonces $f(x)\ in'\ f(z)$*

Denotaremos por Σ_i a la categoría de los planos esféricos **(PEI)** *de incidencia cuyos objetos serán los planos esféricos de incidencia y sus morfismos vendrán dados por los homomorfismos anteriores.*

A continuación presentamos un modelo de cardinalidad mínima de plano esférico de incidencia, el cual creemos de gran interés para posteriores estudios sobre la decidibilidad de sistemas axiomáticos que determinen la clase de los marcos esféricos de incidencia.

Proposición 2 *Cualquier plano esférico de incidencia contiene a su vez, un subplano esférico de incidencia isomorfo a* $S_m = (P_m, L_m, in_m)$*, siendo:*

- $P_m = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$, $L_m = \{l_1, l_2, l_3\}$
- $in_m = \{(p_1, l_1), (p_2, l_1), (p_3, l_1), (p_4, l_1), (p_2, l_2), (p_4, l_2),$
  $(p_5, l_2), (p_6, l_2), (p_1, l_3), (p_3, l_3), (p_5, l_3), (p_6, l_3)\}$



DEMOSTRACIÓN. Sea $S = (P, L, in)$ un plano esférico de incidencia. Como se tiene que $P \neq \emptyset$, consideremos $p_1 \in P$, utilizando el axioma **(PEI2)** encontramos $l_1, l_3 \in L$ con $l_1 \neq l_3$ y verificando que $p_1 \ in \ l_1$, $p_1 \ in \ l_3$. Usando ahora los axiomas **(PEI3)** y **(PEI7)** aseguramos la existencia en primer lugar de p_3, punto antípoda de p_1 y a continuación de p_2, cumpliendo $p_2 \neq p_1$ y $p_2 \neq p_3$, todos junto con el antípoda de p_2 (p_4) puntos incidentes con l_1. Aplicando de nuevo el axioma **(PEI7)** en el punto p_1 y la recta l_3 garantizamos la existencia de p_5 verificando $p_5 \neq p_1$, $p_5 \neq p_3$ y p_5 incidente con l_3. Denotemos por p_6 al punto antípoda de p_5. Por último, utilizando el Lema 1 (vi) en los punto p_5, p_6 y p_2 aseguramos la existencia de l_2 incidente con los puntos mencionados.

Si denotamos $P_m = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$, $L_m = \{l_1, l_2, l_3\}$,
$in_m = \{(p_1, l_1), (p_2, l_1), (p_3, l_1), (p_4, l_1), (p_2, l_2), (p_4, l_2), (p_5, l_2),$
$(p_6, l_2), (p_1, l_3), (p_3, l_3), (p_5, l_3), (p_6, l_3)\}$,
se tiene que $S_m = (P_m, L_m, in_m)$ está inmerso en S y además es claro que S_m verifica los axiomas **(PEI0)**, . . ., **(PEI7)** por lo que tiene estructura de plano esférico de incidencia. ■

Corolario 1 *El plano esférico* S_m *constituye el modelo mínimo de plano esférico de incidencia y garantiza la existencia de modelos finitos.*

3 La categoría de los marcos esféricos de incidencia

En este apartado, utilizando las técnicas introducidas por Vakarelov véase [34], construiremos una categoría equivalente a la categoría Σ_i de los planos esféricos de incidencia, cuyos objetos serán modelos de un sistema formal de primer orden y monosurtido, y por tanto susceptibles de serlo también de un sistema modal adecuado, ya que la semántica de Kripke para el caso modal no se adapta a una estructura bisurtida.

Definición 3 *Consideremos $S = (P, L, in)$ un plano esférico de incidencia . Llamaremos marco esférico de incidencia sobre S a una estructura $W(S) = (W, \equiv_1, \equiv_2)$ donde:*

1. *El conjunto W está formado por los elementos $\{(x, z) \mid x \in P, z \in L, x\ in\ z\}$*
2. *La relación binaria $\equiv_1$ se define de la siguiente forma: $(x_1, z_1) \equiv_1 (x_2, z_2)$ si y solo si $x_1 = x_2$*
3. *La relación $\equiv_2$ se define como: $(x_1, z_1) \equiv_2 (x_2, z_2)$ si y solo si $z_1 = z_2$.*

Desde un punto de vista intuitivo, los elementos de W pueden considerarse como puntos o rectas dependiendo del contexto en que aparezcan, es decir $x \equiv_1 y$ significará que considerados como puntos son iguales y de manera análoga al leer $x \equiv_2 y$ interpretaremos que x e y son la misma recta.

Sobre $W(S)$ daremos una nueva relación "(on)" a partir de $\equiv_1$ y $\equiv_2$ de la siguiente forma:

$$(x_1, z_1)\ on\ (x_2, z_2) \text{ si y solo si } x_1\ in\ z_2$$

Tanto la relación on como su inversa on^{-1} pueden definirse como composición de $\equiv_1$ y $\equiv_2$ de manera alternada.

Lema 2 *Sea S un plano de incidencia y $W = W(S)$ el marco esférico de incidencia sobre S. Si $x, y \in W$, entonces:*

(i) *$x\ on\ y$ si y solo si $(\exists z \in W)(x \equiv_1 z \wedge z \equiv_2 y)$.*

(ii) *$x\ on^{-1}\ y$ si y solo si $(\exists z \in W)(x \equiv_2 z \wedge z \equiv_1 y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $x\ on\ y$, siendo $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, si y solo si $(x_1, y_2) \in W$. ■

Lema 3 *Si $W = W(S)$ es el marco esférico de incidencia sobre un plano esférico S, entonces se verifican:*

(FEI0) *Las relaciones $\equiv_1$ y $\equiv_2$ son de equivalencia y además cumplen que*

$$(\forall x, y \in W)(x \equiv_1 y \wedge x \equiv_2 y \rightarrow x = y)$$

(FEI1) $(\forall x, y \in W)(\exists z \in W)(x\ on\ z \wedge y\ on\ z)$

(FEI2) $(\forall x \in W)(\exists z, t \in w)(z \not\equiv_2 t \wedge x\ on\ z \wedge x\ on\ t)$

(FEI3) $(\forall x \in W)(\exists y \in W)(x \not\equiv_1 y \wedge (\forall z)(x\ on\ z\ \rightarrow y\ on\ z))$

(FEI4) $(\forall x, y, z, t \in W)((x\ on\ z \wedge\ y\ on\ z \wedge\ x\ on\ t \wedge\ y\ on\ t) \rightarrow (x \equiv_1 y\ \vee z \equiv_2 t\ \vee (\forall w)(x\ on\ w \rightarrow y\ on\ w))$

(FEI5) $(\forall x, y, s \in W)(x \not\equiv_1 y \wedge x \not\equiv_1 s \wedge (\forall z \in W)((x\ on\ z \rightarrow (y\ on\ z \wedge s\ on\ z)) \rightarrow (y \equiv_1 s))$

(FEI6) $(\forall z \in W)(\exists x \in W)(x\ on\ z)$

(FEI7) $(\forall z, x, w \in W)(\exists y \in W)(x\ on\ w \wedge x\ on\ z \wedge w \not\equiv_2 z \rightarrow x \not\equiv_1 y \wedge y\ on\ z \wedge (\forall s \in W)(y \not\equiv_1 s \vee s \not\equiv_2 w)$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de las definiciones 1 y 3. ■

Definición 4 *Llamaremos* ***marco esférico de incidencia*** *a una terna* $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2)$*, donde* W *es un conjunto no vacío y* $\{\equiv_1, \equiv_2\}$ *son dos relaciones binarias satisfaciendo los axiomas* **(FEI0)**...**(FEI7)** *del lema anterior.*

A la clase de todos los marcos esféricos de incidencia (MEI) la denotaremos por Φ_i*. Haciendo un abuso de nuestra notación, seguiremos denotando por* Φ_i *a la categoría cuyos objetos son los marcos esféricos de incidencia y cuyos morfismos vienen dados por las aplicaciones*

$$f : W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2) \mapsto W'_F = (W', \equiv'_1, \equiv'_2)$$

tales que para todo $x, y \in W$*, verifiquen:*

$$\textit{Si } x \equiv_i y, \textit{ entonces } f(x) \equiv'_i f(y)$$

4 Equivalencia entre las categorías PEI y MEI

Procediendo de forma inversa a como hicimos en el apartado anterior, para cada marco esférico de incidencia $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2)$, construiremos un plano de esférico de incidencia asociado a él, que denominaremos plano esférico de incidencia sobre W_F y denotaremos por $S(W_F)$.

A tal efecto, procedemos con las siguientes definiciones. Consideremos $W_F = (W, \equiv_1, \equiv_2,)$ un marco esférico de incidencia y sea $x, z \in W$. Denotaremos por $|x|_i, i = 1, 2$ la clase de equivalencia de x determinada por la relación $\equiv_i$, $i = 1, 2$, y con x *on* z si y solo si existe $x_1 \in W$ tal que $x \equiv_1 x_1 \equiv_2 z$.

Definamos ahora los siguientes conjuntos y relaciones:

$$P_S(W_F) = P = W/_{\equiv_1} = \{|x|_1 : x \in W\}$$

$$L_S(W_F) = L = W/_{\equiv_2} = \{|x|_2 : x \in W\}$$

$$in_S(W_F) = in = \{(|x|_1, |z|_2) : x \in W, z \in W, x \; on \; z\}$$

Si x, x' son representantes de $|x|_1$, y z, z' son representantes de $|z|_2$ tales que x *on* z, utilizando la definicion de *on* aseguramos la existencia de $x_1 \in W$ cumpliendo

$$x' \equiv_1 x \equiv_1 x_1 \equiv_2 z \equiv_2 z'$$

y al ser $\equiv_1$ y $\equiv_2$ relaciones de equivalencia, concluimos que x' *on* z'. Lo cual prueba que la relación in está bien definida.

Lema 4 *Sea* W_F *un marco esférico de incidencia, entonces* $S(W_F)$ *es un plano esférico de incidencia.*

DEMOSTRACIÓN.

(PEI0) Razonemos por reducción al absurdo.

Supongamos que un elemento $\alpha \in (P \cap L)$, en consecuencia existirán representantes de α, $x, z \in W$, con $|x|_1 = \alpha = |z|_2$. De esta forma, $x \equiv_1 z, x \equiv_2 z$ y utilizando el axioma **(FEI0)** obtendríamos que $x = z$ y por tanto $|z|_1 = |z|_2$.

Por otra parte, para cada $z \in W$, los axiomas **(FEI6)** y **(FEI7)** nos permite asegurar la existencia de x' e y' con $x' \not\equiv_1 y'$, tales que x' *on* z e y' *on* z. Usando el lema 2 podemos obtener un elemento $u \in W$, tal que $x' \equiv_1 u \equiv_2 z$, es decir, $u \in |z|_2 = |z|_1$, por lo que $x' \in |z|_1$. De forma análoga, como y' *on* z, existirá s', tal que $y' \equiv_1 s' \equiv_2 z$, entonces $y' \in |z|_1$, con lo que $x' \equiv_1 y'$, lo cual es absurdo.

(PEI1) A partir de la definición de in podemos escribir que:

$$x \ on \ z \text{ si y solo si } |x|_1 \ in \ |z|_2$$

Tomemos dos elementos $|x|_1, |y|_1 \in P$, utilizando **(FEI1)** afirmamos que existe $z \in W$ tal que

$$x \ on \ z, \text{ e } y \ on \ z$$

y en consecuencia

$$|x|_1 \ in |z|_2 \text{ e } |y|_1 \ in \ |z|_2$$

(PEI2) Consideremos $|x|_1 \in P$. El axioma **(FEI2)** nos garantiza la existencia de $z, t \in W$ tales que

$$z \not\equiv_2 t, \ x \ on \ z, \ y \ on \ z$$

de esta forma

$$|z|_2 \neq |t|_2, \ |x|_1 \ in \ |z|_2, \ |y|_1 \ in \ |z|_2$$

(PEI3) Elijamos un elemento $|x|_1 \in P$, utilizando el axioma **(FEI3)** afirmamos la existencia de un elemento $y \in W$ con

$$x \not\equiv_1 y \text{ y } \forall z(x \ on \ z \to y \ on \ z)$$

de esta forma

$$|x|_1 \neq |y|_1 \text{ y } \forall |z|_2(|x|_1 \ in \ |z|_2 \to |y|_1 \ in \ |z|_2)$$

(PEI4) Consideremos los elementos $|x|_1, |y|_1 \in P$ y $|z|_2, |t|_2 \in L$ y supongamos que

$$|x|_1 \ in \ |z|_2, \ |y|_1 \ in \ |z|_2, \ |x|_1 \ in \ |t|_2, \ |y|_1 \ in \ |t|_2$$

de esta forma

$$x \ on \ z, \ y \ on \ z, \ x \ on \ t, \ y \ on \ t$$

Usando el axioma **(FEI4)** se tiene

$$x \equiv_1 y \text{ o } z \equiv_2 t \text{ o } (\forall w \in W)(x \ on \ w \to y \ on \ w))$$

y volviendo a la notación del plano

$$|x|_1 = |y|_1 \text{ o } |z|_2 = |t|_2 \text{ o } (\forall |w|_2 \in L)(|x|_1 \ in \ |w|_2 \to |y|_1 \ in \ |w|_2)$$

(PEI5) Consideremos los elementos $|x|_1, |y|_1, |s|_2 \in P$ tales que

$$|x|_1 \neq |y|_1 \text{ y } |x|_1 \neq |s|_1$$

Si $|x|_1 \ in \ |z|_2$, entonces $|s|_1 \ in \ |z|_2, |y|_1 \ in \ |z|_2$, de esta forma $x \not\equiv_1 y$ e $x \not\equiv_1 s$. Por otro lado, si $x \ on \ z$ se tendrá que $s \ on \ z$ e $y \ on \ z$, utilizando el axioma **(FEI5)** y trasladando el resultado al plano concluiremos que $|y|_1 = |s|_1$.

(PEI6) Sea $|z|_2 \in L$, el axioma **(FEI6)** nos permite encontrar la un elemento $x \in P$, cumpliendo $x \ on \ z$, por lo que $|x|_1 \ in \ |z|_2$.

(PEI7) Consideremos los elementos $|z|_2$, $|w|_2 \in L$, $|x|_1 \in P$, tales que

$$|x|_1 \; in \; |w|_2, \; |x|_1 \; in \; |z|_2, \; |w|_2 \neq |z|_2$$

de esta forma

$$x \; on \; w, \; x \; on \; z, \; w \not\equiv_2 z$$

Usando el axioma **(FEI7)**, aseguramos la existencia de $y \in W$ verificando que

$$x \not\equiv_1 y, \; y \; on \; z \text{ y } (\forall s \in W)(y \not\equiv_1 s \text{ ó } s \not\equiv_2 w)$$

de nuevo trasladando el resultado al plano se tendrá que

$$|x|_1 \neq |y|_1, \; |y|_1 \; in \; |z|_2, \; \neg(|y|_1 \; in \; |w|_2)$$ ■

Teorema 1 *Para cada marco esférico de incidencia W_F, el marco esférico W'_F, construido como $W'_F = W(S(W_F))$ es isomorfo a W_F.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos la aplicación $f : W_F \mapsto W'_F$ que a cada elemento $x \in W$ le asigna $f(x) = (|x|_1, |x|_2) \in W'_F$.

- La aplicación f está bien definida.

En efecto, ya que para todo elemento $x \in W$, se cumple que

$$x \equiv_1 x \equiv_2 x$$

es claro que $x \; on \; x$ y por tanto $|x|_1 \; in \; |x|_2$ luego $f(x) \in W'$.

- La aplicación f es biyectiva.

Supongamos que $f(x) = f(y)$, es decir, tendremos que $|x|_1 = |y|_1$ y $|x|_2 = |y|_2$, y por tanto $x \equiv_1 y$ y $x \equiv_2 y$. El axioma **(FEI0)** nos permite concluir que $x = y$.
Por otra parte, dado un elemento $(|x|_1, |y|_2) \in W'$, sabemos que $|x|_1 \; in \; |y|_2$ y por tanto $x \; on \; y$.
Haciendo uso del lema 2, aseguramos la existencia de un elemento $z \in W$ tal que $x \equiv_1 z \equiv_2 y$, por lo que

$$(|x|_1, |y|_2) = (|z|_1, |z|_2) = f(z)$$

lo que prueba la sobreyectividad.

- Las aplicaciónes f y f^{-1} son homomorfismos entre W_F y W'_F.

En efecto, consideremos $x, y \in W$, se tiene

$$x \equiv_i y \Leftrightarrow |x|_i = |y|_i \Leftrightarrow (|x|_1, |x|_2) \equiv'_i (|y|_1, |y|_2) \Leftrightarrow$$
$$f(x) \equiv'_i f(y), i = 1, 2$$ ■

Teorema 2 *Para cada plano esférico de incidencia S, el plano S', construido como $S(W(S))$ es isomorfo a S.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos la aplicación $f : S \mapsto S'$, que a cada elemento $x \in P$ y $z \in L$ le asigna

$$f(x) = |(x, z_1)|_1$$

$$f(z) = |(x_1, z)|_2$$

donde la existencia de un $z_1 \in L$ con $x \; in \; z_1$ nos lo garantiza el axioma **(PEI2)** y la de un elemento $x_1 \in P$ verificando $x_1 \; in \; z$ el axioma **(PEI6)**, siendo además claro que la imágenes $f(x)$ y $f(y)$ no dependen de las posibles elecciones de estos elementos.

- La aplicación f es biyectiva.

En efecto, si suponemos que $f(x) = f(y)$ con $x, y \in P$, entonces existirán $z_1, z_2 \in W$ verificando que $|(x, z_1)|_1 = |(y, z_2)|_1$, por tanto $(x, z_1) \equiv_1 (y, z_2)$ y en consecuencia $x = y$.

Por otra parte, si suponemos $f(z) = f(w)$ con $z, w \in L$, entonces existirán $x_1, x_2 \in W$ tales que $|(x_1, z)|_2 = |(x_2, w)|_2$, por tanto $(x_1, z) \equiv_2 (x_2, w)$ y en consecuencia $z = w$.
Para probar la sobreyectividad de f, consideremos un elemento $x = |(x_1, x_2)|_1 \in P'$, se tendrá que $f(x_1) = x$, análogamente si tomamos un elemento $z = |(z_1, z_2)|_2 \in L'$, entonces $f(z_2) = z$.

Además f y f^{-1} son homomorfismos, en efecto:
Sean dos elementos cualesquiera $x \in P$ y $z \in L$, la siguiente cadena de equivalencias nos muestra el resultado:

$$f(x)\ in'\ f(z) \Leftrightarrow |(x, x_2)|_1\ in' |(z_1, z)|_2 \Leftrightarrow (x, x_2)\ on\ (z_1, z) \Leftrightarrow x\ in\ z \qquad \blacksquare$$

Siendo Σ_i y Φ_i las categorías de los planos y marcos esféricos de incidencia respectivamente, las construcciones hechas anteriormente, nos permiten definir sendas aplicaciones $W : \Sigma_i \to \Phi_i$ y $S : \Phi_i \to \Sigma_i$ entre los objetos de ambas categorías.

Sea ahora f, un homomorfismo entre dos planos S y S', y consideremos la aplicación

$$W(f) : W(S) \mapsto W(S')$$

que viene dada del siguiente modo:

$$\text{Si } (x, z) \in W, \text{ entonces } W(f)((x, z)) = (f(x), f(z))$$

Con esta definición es claro que el diagrama que sigue será conmutativo, convirtiendo a W en un funtor entre las categorías Σ_i y Φ_i.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "W"'] & S' \arrow[d, "W"'] \\ W(S) \arrow[r, "W(f)"] & W(S') \end{tikzcd}$$

Análogamente, si $f : W \mapsto W'$ es un homomorfismo de marcos esféricos de incidencia, la aplicación

$$S(f) : S(W_F) \mapsto S(W'_F)$$

definida mediante

$$S(f)(|x|_1) = |f(x)|_1, S(f)(|z|_2) = |f(z)|_2$$

hace conmutativo el siguiente diagrama y convierte a S en un funtor entre las categorías Φ_i y Σ_i.

$$\begin{tikzcd} W_F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "S"'] & W'_F \arrow[d, "S"'] \\ S(W_F) \arrow[r, "S(f)"] & S(W'_F) \end{tikzcd}$$

El lema que enunciamos a continuación es un conocido resultado sobre Teoría de Categorías.

Lema 5 *Las categorías Σ_i y Φ_i son equivalentes si y solo si existen funtores*

$$\alpha : \Sigma_i \mapsto \Phi_i$$

$$\beta : \Phi_i \mapsto \Sigma_i$$

tales que, para cualesquiera $S \in \Sigma_i$ y $W_F \in \Phi_i$, se tenga S isomorfo a $\alpha(\beta(S))$ y W_F isomorfo a $\beta(\alpha(W_F))$([24]).

Teorema 3 *Las categorías Σ_i y Φ_i son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN. Empecemos por probar que $W(f)$ es homomorfismo.
En efecto, sean $(x_1, z_1), (x_2, z_2) \in W$ tales que $(x_1, z_1) \equiv_1 (x_2, z_2)$, es decir, $x_1 = x_2$ y por tanto $f(x_1) = f(x_2)$. De esta forma,

$$W(f)((x_1, z_1)) = (f(x_1), f(z_1)) \equiv_1' (f(x_2), f(z_2)) = W(f)((x_2, z_2))$$

De forma análoga se probaría que $W(f)$ preserva la relación $\equiv_2$.

Sea Id_S el morfismo identidad de S, de modo inmediato $W(Id_S) = Id_{W(S)}$ ya que $W(Id_s)((x, z)) = (x, z) = Id_{W(S)}(x, z)$.

Sean S, S' y S'' tres planos esféricos de incidencia y $f : S \mapsto S', g : S' \mapsto S''$ sendos morfismos, entonces se verifica que $W(g \circ f) = W(g) \circ W(f)$.
Comencemos el calculo por el lado izquierdo de la igualdad,

$$W(g \circ f)((x, z)) = ((g \circ f)(x), (g \circ f)(z)) =$$
$$(g(f(x)), g(f(z))) = W(g)((f(x), f(z)) = W(g) \circ W(f)((x, z))$$

Así, W es un funtor entre las categorías Σ_i y Φ_i.

Pasemos al caso de la aplicación $S(f)$.
Observemos en primer lugar que está bién definida. En efecto, sean $x, y, z, w \in W$ tales que $|x|_1 = |y|_1$ y $|z|_2 = |w|_2$, en tal caso

$$|x|_1 = |y|_1 \Rightarrow f(x) \equiv_1' f(y) \Rightarrow |f(x)|_1 = |f(y)|_1 \Rightarrow$$
$$S(f)(|x|_1) = S(f)(|y|_1)$$

y también

$$|z|_2 = |w|_2 \Rightarrow f(z) \equiv_2' f(w) \Rightarrow |f(z)|_2 \equiv_2' |f(w)|_2 \Rightarrow$$
$$S(f)(|z|_2) = S(f)(|w|_2)$$

Además $S(f)$ es un homomorfismo de $S(W_F)$ a $S(W_F')$.
Para probarlo tomemos $|x|_1 \in P$ y $|z|_2 \in L$ tales que $|x|_1 \; in \; |z|_2$. Por tanto

$$|x|_1 \; in \; |z|_2 \Leftrightarrow x \; on \; z \; \Rightarrow (\; f \text{ es morfismo }) f(x) \; on' f(z) \Leftrightarrow$$
$$|f(x)|_1 \; in' \; |f(z)|_2$$

Consideremos ahora tres objetos W_F, W_F', W_F'' de la categoría Φ_i y $f : W_F \mapsto W_F', g : W_F' \mapsto W_F''$ sendos morfismos, en tal si $|x|_1 \in P, |z|_2 \in L$, tendremos que

$$S(g \circ f)(|x|_1) = |(g \circ f)(x)|_1 = |g(f(x))|_1 = S(g)|f(x)|_1 =$$
$$(S(g) \circ S(f))(|x|_1)$$
$$S(g \circ f)(|z|_2) = |(g \circ f)(z)|_2 = |g(f(z))|_2 = S(g)|f(z)|_2 =$$
$$(S(g) \circ S(f))(|z|_2)$$

Así, $S(g \circ f) = S(g) \circ S(f)$.

Por otro lado, si Id_{W_F} es el morfismo identidad, entonces

$$S(Id_{W_F})(|x|_1) = |x|_1 \text{ y } S(Id_{W_F})(|z|_2) = |z|_2$$

por lo que $S(Id_{W_F}) = Id_{S(W_F)}$.

De esta forma, S es un funtor de la categoría Φ_i en la categoría Σ_i. ■

Corolario 2 *El marco esférico $W(S_m)$, constituye un marco esférico finito de cardinal mínimo.*

5 Una lógica modal para la GEI

La clase de los marcos esféricos de incidencia, constituyen una referencia adecuada para la construcción de una base semántica, en el sentido de Kripke, para una lógica modal de la geometría esférica de incidencia.

En lo que sigue, emprenderemos la construcción de dicha lógica, creando en primer lugar un lenguaje adecuado, susceptible de ser interpretado en los marcos esféricos y posteriormente daremos un sistema deductivo que determinará dicha clase de marcos.

Comenzaremos describiendo el lenguaje multimodal en el que expresaremos nuestro sistema.

6 Lenguaje

Consideraremos un lenguaje multimodal con operadores monarios $\{[\equiv_1], [\equiv_2], [\not\equiv_1], [\not\equiv_2]\}$, un conjunto infinito numerable de literales proposicionales $\{p_1, p_2, \ldots\}$ junto con las constantes $\perp, \top$ y las conectivas usuales $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$.

El conjunto de fbf se define de la forma usual. En lo que sigue, denotaremos a las fórmulas multimodales bién formadas de este lenguaje, mediante las letras latinas mayúsculas $A, B, C, \ldots$.

Con el objetivo de simplificar la escritura, definimos los siguientes operadores modales secundarios.

- $[\neq]A = [\not\equiv_1]A \wedge [\not\equiv_2]A$
- $[U]A = A \wedge [\neq]A$
- $OA = A \wedge [\neq]\neg A$
- $[on]A = [\equiv_1][\equiv_2]A$
- $[on^{-1}]A = [\equiv_2][\equiv_1]A$
- $\langle R\rangle A = \neg[R]\neg A$, donde $[R] \in \{[\equiv_1], [\equiv_2], [\not\equiv_1], [\not\equiv_2]\}$

En el siguiente apartado introduciremos una base semántica en la que será interpretado nuestro lenguaje de forma natural y que nos dará un soporte intuitivo, para la construcción del sistema deductivo.

7 Semántica

Utilizaremos para la interpretación del anterior lenguaje, la semántica habitual de Kripke, sobre marcos de la forma $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$, donde W es un conjunto no vacío y $\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2$ son relaciones binarias sobre W.

Si V es una valoración, la definición de certeza se establece de forma inductiva como es habitual:
Si $x \in W$:

$$x \models_V p \text{ si y solo si } x \in V(p)$$

$$x \models_V \neg A \text{ si y solo si } x \not\models_V A$$

$$x \models_V A \wedge B \text{ si y solo si } x \models_V A \text{ y } x \models_V B$$

$$x \models_V A \vee B \text{ si y solo si } x \models_V A \text{ o } x \models_V B$$

$$x \models_V A \rightarrow B \text{ si y solo si } x \not\models_V A \text{ o } x \models_V B$$

$$x \models_V [R]A \text{ si y solo si } (\forall y \in W)(xRy \rightarrow y \models_V A), \text{ donde}$$

$$R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$$

Recordemos que una fórmula A se dirá que es válida en un marco W_F, si para toda valoración V y todo mundo $x \in W$ se verifica que $x \models_V A$.

De la misma forma, diremos que una fórmula A es válida en una clase de marcos Σ, si A es válida en todo marco de Σ. Por otra parte, convengamos en lo que sigue, en denotar por Λ_Σ, al conjunto de todas las fórmulas válidas en Σ, el cual denominaremos lógica de la clase de marcos Σ.
En el caso particular, del conjunto formado por las fórmulas válidas sobre la clase de marcos esféricos de incidencia, nos referiremos a él con la abreviatura **MGEI**. Esto constituye lo que podríamos llamar, una definición semántica para una lógica de la geometría esférica de incidencia.

Consideremos un marco $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$. Si consideramos las relaciones secundarias on y on^{-1} definidas por las composiciones, $on = \equiv_1 \circ \equiv_2$ y $on^{-1} = \equiv_2 \circ \equiv_1$, consecuentemente en la semántica elegida, tendrán las siguientes interpretaciones:

$$x \models_V [on]A \text{ si y solo si } (\forall y \in W)(x \; on \; y \to y \models_V A)$$

$$x \models_V [on^{-1}]A \text{ si y solo si } (\forall y \in W)(x \; on^{-1} \; y \to y \models_V A)$$

Por otra parte, modalidades del estilo $[\neq], [U]$ y $[O]$ pueden ser interpretadas con facilidad en cualquier marco, mediante la consideración de las relaciones de igualdad y desigualdad, sería como sigue:

$$x \models_V [\neq]A \text{ si y solo si } (\forall y \in W)(x \neq y \to y \models_V A)$$

$$x \models_V [U]A \text{ si y solo si } (\forall y \in W)(y \models_V A)$$

$$x \models_V [O]A \text{ si y solo si } x \models_V A \text{ y } (\forall y \in W)(x \neq y \to y \not\models_V A)$$

Sin embargo, en nuestro lenguaje, las modalidades $[\neq]$ y $[U]$ se definen de forma secundaria, a través de las relaciones primitivas, lo cual podría no garantizar su sentido semántico natural. Este hecho, suscita en general, la siguiente definición.

Definición 5 *Un marco de la forma $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$, se dirá que es $\neq -$estándar si resulta ser un modelo (en el sentido de la lógica de predicados) para la siguiente sentencia de primer orden:*

$$(\forall x, y \in W)(x \neq y \leftrightarrow x \not\equiv_1 y \vee x \not\equiv_2 y)$$

Es inmediato comprobar, que en este tipo de marcos, las modalidades $[\neq], [O]$ y $[U]$ tienen su significado natural.

Definición 6 *Un marco $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2)$ lo llamaremos cuasi-estándar si es $\neq -$estándar y la relación $\not\equiv_i$ es complementaria de la relación $\equiv_i$, $i = 1, 2$.*

Lema 6 *La clase de marcos cuasi-estándar es modalmente definible en la clase de marcos $\neq$-estándar mediante las siguientes fórmulas:*

(MGEI*) $\langle U\rangle p \to \langle\equiv_i\rangle p \vee \langle\not\equiv_i\rangle p, i = 1, 2$

(MGEI**) $\langle\equiv_i\rangle[\neq]p \to [\not\equiv_i]p, i = 1, 2$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un marco $W_F = \{W, \equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2)$ $\neq$-estándar, entonces W_F es cuasi estándar si y solo si se cumple:

1. $\equiv_i \cup \not\equiv_i = W \times W$
2. $\equiv_i \cap \not\equiv_i = \emptyset$

La propiedad (1) es cierta, si y solo si la fórmula **(MGEI*)** es válida en W_F.
En efecto, consideremos $x \in W$ y V una valoración tal que

$$x \models_V \langle U\rangle p$$

existe entonces un elemento $y \in W$ tal que

$$y \models_V p$$

por (1) se cumple

$$x \equiv_i y \text{ ó } x \not\equiv_i y$$

por tanto

$$x \models_V (\langle \equiv_i \rangle p \vee \langle \not\equiv_i \rangle p)$$

Recíprocamente, si suponemos la fórmula **(MGEI*)** válida y la propiedad (1) falsa, existirán entonces $x, y \in W$ tales que

$$(x, y) \notin \equiv_i \text{ y } (x, y) \notin \not\equiv_i$$

Consideremos la valoración V tal que $V(p) = \{y\}$, entonces se tendrá que $x \models_V \langle U \rangle p$ pero

$$x \not\models_V (\langle \equiv_i \rangle p \vee \langle \not\equiv_i \rangle p)$$

por lo que la fórmula **(MGEI*)** no sería válida, lo que nos llevaría a una contradicción.

La propiedad (2) es cierta, si y solo si la fórmula **(MGEI**)** es válida en W_F.
En efecto, consideremos un elemento $x \in W$ y una valoración V tal que,

$$x \models_V \langle \equiv_i \rangle [\neq] p$$

en estas condiciones sabemos que existe un elemento $y \in W$ tal que $x \equiv_i y$ y además

$$(\forall y')(y \neq y' \rightarrow y' \models_V p)$$

Para terminar, tendremos que probar que

$$x \models_V [\not\equiv_i] p$$

para ello elijamos un elemento $w \in W$, tal que $x \not\equiv_i w$, por tanto

$$x \equiv_i y \text{ y } x \not\equiv_i w$$

de donde necesariamente $y \neq w$, ya que de lo contrario,

$$\equiv_i \cap \not\equiv_i \neq \emptyset$$

Usando ahora la hipótesis, obtenemos que $w \models_V p$.

Recíprocamente, si suponemos la fórmula **(MGEI**)** válida y la propiedad (2) falsa, existen entonces elementos $x, y \in W$ tales que

$$x \equiv_i y, x \not\equiv_i y$$

Consideremos la valoración V definida del siguiente modo:

$$V(p) = \{z \in W \mid y \neq z\}$$

en tal caso se cumplirá que $x \models_V \langle \equiv_i \rangle [\neq] p$, y sin embargo $x \not\models_V [\not\equiv_i] p$, lo que constituye una contradicción. ■

Proposición 3 *La clase de los marcos esféricos de incidencia es definible en la clase de marcos cuasi-estándar por la conjunción de las siguientes fórmulas:*

(MGEI0) $[\equiv_i]p \rightarrow p, \langle \equiv_i \rangle [\equiv_i] p \rightarrow p, [\equiv_i] p \rightarrow [\equiv_i][\equiv_i] p, i = 1, 2$

(MGEI1) $\langle U \rangle p \rightarrow \langle on \rangle \langle on^{-1} \rangle p$

(MGEI2) $p \to \langle on \rangle \langle \not\equiv_2 \rangle \langle on^{-1} \rangle p$

(MGEI3) $[on]p \to \langle \not\equiv_1 \rangle [on]p$

(MGEI4) $\langle on \rangle (p \wedge \langle on^{-1} \rangle ([\not\equiv] q \wedge r)) \to$
$([on](\langle \equiv_2 \rangle p \vee [on^{-1}]q) \vee \langle \equiv_1 \rangle r \vee [on] \langle on^{-1} \rangle r)$

(MGEI5) $(\langle \not\equiv_1 \rangle p \wedge \langle \not\equiv_1 \rangle q) \to$
$(([on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq)) \to (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)))$

(MGEI6) $p \to \langle U \rangle \langle on \rangle p$

(MGEI7) $(\langle \not\equiv_2 \rangle r \wedge \langle on^{-1} \rangle t \wedge \langle U \rangle (\langle on \rangle Or \wedge Ot)) \to (\langle on^{-1} \rangle (\langle \not\equiv_1 \rangle t \wedge ([\equiv_1] \langle \not\equiv_2 \rangle r)))$

DEMOSTRACIÓN. **(MGEI0)** garantiza que las relaciones $\equiv_i$, $i = 1, 2$ sean de equivalencia.
En efecto, supongamos que $\equiv_i$ es reflexiva y sea V una valoración cualquiera. Si consideramos un estado $x \in W$, suponiendo que $x \models_V [\equiv_i]p$, como $\equiv_i$ es reflexiva, entonces $x \models_V p$.

Para probar el recíproco, razonaremos por reducción al absurdo.
Supongamos pues, que la fórmula $[\equiv_i]p \to p$ es válida y que la relación, $\equiv_i$ no es reflexiva.
En tal caso, existirá un elemento $x \in W$, tal que no $x \equiv_i x$, y consideremos la valoración V tal que

$$V(p) = \{y \in W \mid x \equiv_i y\}$$

resultará pues, que $x \models_V [\equiv_i]p$ y en cambio $x \not\models_V p$, lo cual resulta absurdo.

Supongamos que $\equiv_i$ es simétrica, y sean V y $x \in W$, una valoración y un estado cualesquiera. Si se verifica que $x \models_V \langle \equiv_i \rangle [\equiv_i]p$, entonces $\exists y \in W$ con $x \equiv_i y$, tal que

$$(\forall z \in W)(y \equiv_i z \to z \models_V p)$$

Usando la simetría de $\equiv_i$, elegimos $z = x$ y se tiene que $x \models_V p$.

Recíprocamente, si suponemos que la fórmula

$$\langle \equiv_i \rangle [\equiv_i]p \to p$$

es válida y $\equiv_i$ no simétrica, entonces existirán elementos $x, y \in W$, con $x \equiv_i y$ pero no $y \equiv_i x$.
Consideremos la valoración V tal que

$$V(p) = \{z \in W \mid y \equiv_i z\}$$

En tal caso, $x \models_V \langle \equiv_i \rangle [\equiv_i]p$, y en cambio $x \not\models_V p$, lo que nos lleva de nuevo, a una contradicción.

Análogamente, supongamos que $\equiv_i$ es transitiva y sean V y $x \in W$ una valoración y un estado, ambos arbitrarios. Si $x \models_V [\equiv_i]p$ entonces $(\forall z \in W)(x \equiv_i z \to z \models_V p)$.
Pretendemos probar que $x \models_V [\equiv_i][\equiv_i]p$, es decir, que $(\forall z_1, z_2 \in W)(x \equiv_i z_1 \equiv_i z_2 \to z_2 \models_V p)$.
Tomemos entonces $z_1, z_2 \in W$ tales que $x \equiv_i z_1 \equiv_i z_2$.
Por la transitividad de la relación $\equiv_i$, se tiene que $x \equiv_i z_2$ y por tanto $z_2 \models_V p$.

Recíprocamente, si suponemos que la fórmula $[\equiv_i]p \to [\equiv_i][\equiv_i]p$ es válida y la relación $\equiv_i$ no es transitiva, existirán entonces elementos $x, y, z \in W$, tales que $x \equiv_i y \equiv_i z$ y que no sea cierto que $x \equiv_i z$.

Consideremos la valoración V definida por

$$V(p) = \{z_1 \in W \mid x \equiv_i z_1\}$$

En tal caso, $x \models_V [\equiv_i]p$ pero, en cambio $x \not\models_V [\equiv_i][\equiv_i]p$ lo cual es absurdo.

Obsérvese que la condición

$$(\forall x, y)(x \neq y \leftrightarrow x \not\equiv_1 y \vee x \not\equiv_2 y)$$

de **(FEI0)**, es de hecho cierta, ya que trabajamos dentro de la clase de marcos cuasi-estándar. Así, negando ambas partes de la doble implicación se llega a que

$$(\forall x, y)(x = y \leftrightarrow \neg(x \not\equiv_1 y) \wedge \neg(x \not\equiv_2 y))$$

lo que en nuestro caso equivale a que

$$(\forall x, y)(x = y \leftrightarrow x \equiv_1 y \wedge x \equiv_2 y)$$

La implicación $(\leftarrow)$ es la propiedad buscada.

(MGEI1) se corresponde con **(FEI1)**.
En efecto, **(MGEI1)** es una fórmula de Sahlqvist. Consideremos su traslación local estándar al lenguaje de segundo orden asociado

$$\begin{gathered}(\forall P)(ST_x(\langle U\rangle p \to \langle on\rangle\langle on^{-1}\rangle p))\\ \Updownarrow\\ (\forall P)(ST_x(\langle U\rangle p) \to ST_x(\langle on\rangle\langle on^{-1}\rangle p))\\ \Updownarrow\\ (\forall P)((\exists y)Py \to (\exists z)(x\ on\ z \wedge (\exists x_1)(z\ on^{-1}\ x_1 \wedge Px_1)))\\ \Updownarrow\\ (\forall y)(\forall P)((Py) \to (\exists z)(x\ on\ z \wedge (\exists x_1)(z\ on^{-1}\ x_1 \wedge Px_1)))\end{gathered}$$

tomemos la asignación mínima que hace al antecedente verdadero,con la notación-λ de Church's, $\sigma(P) \equiv \lambda u.y = u$, se tiene que

$$\begin{gathered}(\forall y)((y = y) \to (\exists z)(x\ on\ z \wedge (\exists x_1)(z\ on^{-1}\ x_1 \wedge y = x_1)))\\ \Updownarrow\\ (\forall y)(\exists z)(x\ on\ z \wedge z\ on^{-1}\ y)\\ \Updownarrow\\ (\forall y)(\exists z)(x\ on\ z \wedge y\ on\ z)\end{gathered}$$

Ahora bastará generalizar con respecto a x.

(MGEI2) se corresponde con **(FEI2)**.
De nuevo, al ser **(MGEI2)** una fórmula de Sahlqvist, podemos realizar su traslación local estándar al lenguaje de segundo orden. Consideremos pues, un estado arbitrario x:

$$\begin{gathered}(\forall P)(ST_x(p \to \langle on\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle on^{-1}\rangle p))\\ \Updownarrow\\ (\forall P)(ST_x(p) \to ST_x(\langle on\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle on^{-1}\rangle p))\\ \Updownarrow\\ (\forall P)(Px \to (\exists z)(x\ on\ z \wedge (\exists z_1)(z \not\equiv_2 z_1 \wedge (\exists x_1)(z_1\ on^{-1}\ x_1 \wedge Px_1))))\end{gathered}$$

tomemos la mínima asignación que hace al antecedente verdadero, $\sigma(P) \equiv \lambda u.x = u$, se tiene

$$(x = x \to (\exists z)(x\ on\ z \wedge (\exists z_1)(z \not\equiv_2 z_1 \wedge (\exists x_1)(z_1\ on^{-1}\ x_1 \wedge x = x_1))))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\exists z, z_1)(x\ on\ z \wedge z \not\equiv_2 z_1 \wedge z_1\ on^{-1}\ x)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\exists z, z_1)(z \not\equiv_2 z_1 \wedge x\ on\ z \wedge x\ on\ z_1)$$

Como antes, bastará con generalizar respecto de x.

(MGEI3) se corresponde con **(FEI3)**.
Al tratarse también de una fórmula de Sahlqvist, el algoritmo de traslación nos permite escribir la siguiente cadena de equivalencias:

$$(\forall P)(ST_x([on]p \to \langle\not\equiv_1\rangle[on]p))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P)(ST_x([on]p) \to ST_x(\langle\not\equiv_1\rangle[on]p))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P)((\forall z)(x\ on\ z \to Pz) \to (\exists y)(x \not\equiv_1 y \wedge (\forall z')(y\ on\ z' \to Pz')))$$

tomemos la mínima asignación que hace al antecedente verdadero, $\sigma(P) \equiv \lambda u.x\ on\ u$, se tiene

$$(\forall z)((x\ on\ z \to x\ on\ z) \to (\exists y)(x \not\equiv_1 y \wedge (\forall z')(y\ on\ z' \to x\ on\ z')))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\exists y)(x \not\equiv_1 y \wedge (\forall z')(y\ on\ z' \to x\ on\ z'))$$

generalizando respecto de x obtendremos el resultado.

(MGEI4) se corresponde con **(FEI4)**.
En efecto, **(MGEI4)** es una fórmula de Sahlqvist. Efectuemos su traslación local estándar:

$$(\forall P, Q, R)(ST_x(\langle on\rangle(p \wedge \langle on^{-1}\rangle([\neq]q \wedge r)) \to$$
$$([on](\langle\equiv_2\rangle p \vee [on^{-1}]q) \vee \langle\equiv_1\rangle r \vee [on]\langle on^{-1}\rangle r)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P, Q, R)(ST_x(\langle on\rangle(p \wedge \langle on^{-1}\rangle([\neq]q \wedge r))) \to$$
$$ST_x(([on](\langle\equiv_2\rangle p \vee [on^{-1}]q) \vee \langle\equiv_1\rangle r \vee [on]\langle on^{-1}\rangle r)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P, Q, R)((\exists z)((x\ on\ z) \wedge (Pz \wedge (\exists y)(z\ on^{-1}\ y \wedge$$
$$((\forall x_2)(y \neq x_2 \to Qx_2) \wedge Ry))) \to$$
$$(\forall z_0)(x\ on\ z_0 \to (\exists z_1)(z_0 \equiv_2 z_1 \wedge Pz_1) \vee$$
$$(\forall x_3)(z_0\ on^{-1}\ x_3 \to Qx_3)) \vee (\exists x_4)(x \equiv_1 x_4 \wedge Rx_4) \vee$$
$$(\forall z_2)(x\ on\ z_2\ \to (\exists x_5)(z_2\ on^{-1}\ x_5 \wedge Rx_5)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall P, Q, R)(\forall y, z, z_0, x_3, z_2)((x\ on\ z \wedge (Pz \wedge (z\ on^{-1} y \wedge$$
$$((\forall x_2)(y \neq x_2 \to Qx_2) \wedge Ry))) \to (x\ on\ z_0 \to (\exists z_1)(z_0 \equiv_2 z_1 \wedge Pz_1) \vee$$
$$(z_0\ on^{-1}\ x_3 \to Qx_3)) \vee (\exists x_4)(x \equiv_1 x_4 \wedge Rx_4) \vee$$
$$(x\ on\ z_2 \to (\exists x_5)(z_2\ on^{-1}\ x_5 \wedge Rx_5)))$$

tomemos las mínimas asignaciones de P, Q y R que hacen al antecedente verdadero, $\sigma(P) \equiv \lambda u.z = u$, $\sigma(Q) \equiv \lambda u.y \neq u$, $\sigma(R) \equiv \lambda u.y = u$ se tiene

$$(\forall y, z, z_0, x_3, z_2)(((x \; on \; z) \wedge (z = z \wedge (z \; on^{-1} \; y) \wedge$$
$$(\forall x_2)(y \neq x_2 \rightarrow y \neq x_2) \wedge y = y)))) \rightarrow (x \; on \; z_0 \rightarrow$$
$$(\exists z_1)(z_0 \equiv_2 z_1 \wedge z = z_1) \vee (\forall x_3)(z_0 \; on^{-1} \; x_3 \rightarrow y \neq x_3)) \vee$$
$$(\exists x_4)(x \equiv_1 x_4 \wedge y = x_4 \vee (\forall z_2)(x \; on \; z_2 \rightarrow (\exists x_5) z_2 \; on^{-1} \; x_5 \wedge y = x_5))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0, x_3, z_2)(((x \; on \; z) \wedge (z \; on^{-1} y)) \rightarrow$$
$$((x \; on \; z_0 \rightarrow ((z_0 \equiv_2 z) \vee (z_0 \; on^{-1} \; x_3 \rightarrow y \neq x_3)) \vee$$
$$(x \equiv_1 y) \vee (x \; on z_2 \rightarrow z_2 \; on^{-1} y)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0, x_3, z_2)(((x \; on \; z) \wedge z \; on^{-1} y)) \rightarrow$$
$$(\neg(x \; on \; z_0) \vee (z_0 \equiv_2 z) \vee (z_0 \; on^{-1} \; x_3 \rightarrow y \neq x_3) \vee$$
$$(x \equiv_1 y) \vee (x \; on \; z_2 \rightarrow z_2 \; on^{-1} y)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0, x_3, z_2)(((x \; on \; z) \wedge (z \; on^{-1} y) \wedge (x \; on \; z_0)) \rightarrow$$
$$((z_0 \equiv_2 z) \vee \neg(z_0 \; on^{-1} \; x_3) \vee (y \neq x_3) \vee$$
$$(x \equiv_1 y) \vee (x \; on \; z_2 \rightarrow z_2 \; on^{-1} \; y)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0, x_3)(((x \; on \; z) \wedge (z \; on^{-1} y) \wedge (x \; on \; z_0) \wedge (z_0 \; on^{-1} \; x_3)) \rightarrow$$
$$(z_0 \equiv_2 z) \vee (y \neq x_3)(x \equiv_1 y) \vee (\forall z_2)(x \; on \; z_2 \rightarrow z_2 \; on^{-1} y)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0, x_3, z_2)(((x \; on \; z) \wedge (z \; on^{-1} y) \wedge (x \; on \; z_0) \wedge (z_0 \; on^{-1} \; x_3) \wedge$$
$$(y = x_3)) \rightarrow ((z_0 \equiv_2 z) \vee (x \equiv_1 y) \vee (x \; on \; z_2 \rightarrow z_2 \; on^{-1} y)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0, z_2)(((x \; on \; z) \wedge (z \; on^{-1} y) \wedge (x \; on \; z_0) \wedge (z_0 \; on^{-1} \; y)) \rightarrow$$
$$((z_0 \equiv_2 z) \vee (x \equiv_1 y) \vee (x \; on \; z_2 \rightarrow z_2 \; on^{-1} y)))$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall y, z, z_0)(((x \; on \; z) \wedge (y \; on \; z) \wedge (x \; on \; z_0) \wedge (y \; on \; z_0)) \rightarrow$$
$$((z_0 \equiv_2 z) \vee (x \equiv_1 y) \vee (\forall z_2)(x \; on \; z_2 \rightarrow y \; on \; z_2)))$$

Para terminar generalizamos respecto de x.

(MGEI5) se corresponde con **(FEI5)**.
En efecto, supongamos **(MGEI5)** válida y sean $x, y, s \in W$ tales que

$$(x \not\equiv_1 y \wedge x \not\equiv_1 s) \wedge (\forall z)((x \; on \; z) \rightarrow ((y \; on \; z) \wedge (s \; on \; z)))$$

Consideremos el modelo M que viene dado por la valoración

$$V(p) = \{y\}, V(q) = \{s\}$$

en ese caso podemos afirmar

$$x \models_V (\langle \not\equiv_1 \rangle p \wedge \langle \not\equiv_1 \rangle q) \rightarrow (([on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq)) \rightarrow (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)))$$

Como en M

$$x \models_V (\langle \not\equiv_1 \rangle p \wedge \langle \not\equiv_1 \rangle q))$$

entonces

$$x \models_V ([on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq) \rightarrow (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q))$$

También se tiene que

$$x \models_V [on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq)$$

y de aquí

$$x \models_V (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q))$$

es decir

$$(\exists y_1, y_2)(y_1 \equiv_1 y_2), y_2 \in V(p), y_1 \in V(q)$$

y en consecuencia

$$y \equiv_1 s$$

En el caso recíproco, razonemos por reducción al absurdo.
Supongamos que se verifica **(FEI5)** y **(MGEI5)** no es válida, entonces existe un estado x y una valoración V tal que

$$x \not\models_V (\langle \not\equiv_1 \rangle p \wedge \langle \not\equiv_1 \rangle q) \rightarrow (([on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq)) \rightarrow (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)))$$

es decir, el antecedente será verdadero en x para V

$$x \models_V (\langle \not\equiv_1 \rangle p \wedge \langle \not\equiv_1 \rangle q)$$

pero el consecuente será falso en x para V

$$x \not\models_V (([on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq)) \rightarrow (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)))$$

en consecuencia

$$(\exists y, s) x \not\equiv_1 y, x \not\equiv_1 s, y \models_V p, s \models_V q$$

y también

$$x \models_V [on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq)$$

lo cual asegura que

$$(\forall z)(x \; on \; z \rightarrow (z \; on^{-1} \; y \wedge z \; on^{-1} \; s))$$

y además se verifica

$$V(p) = \{y\}, V(q) = \{s\}$$

Por último

$$\begin{gathered} x \not\models_V (\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)) \\ \Updownarrow \\ x \models_V \neg(\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)) \\ \Updownarrow \\ x \models_V ([U] \neg(\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)) \\ \Updownarrow \\ x \models_V ([U]([\equiv_1] \neg p \vee \neg q)) \\ \Updownarrow \\ x \models_V ([U](\langle \equiv_1 \rangle p \rightarrow \neg q)) \end{gathered}$$

es decir

$$(\forall y_1) y_1 \models_V (\langle \equiv_1 \rangle p \to \neg q)$$

En estas condiciones se verifica las hipótesis de **(FEI5)** lo cual nos permite asegurar que

$$y \equiv_1 s$$

Por tanto

$$s \models_V \langle \equiv_1 \rangle p$$

y

$$s \models_V \neg q$$

o lo que es lo mismo, $s \notin V(q)$, que nos lleva a una contradicción.

(MGEI6) se corresponde con **(FEI6)**.
Ciertamente, **(MGEI6)** es una fórmula de Sahlqvist. Efectuemos su traslación local estándar al lenguaje de segundo orden adecuado:

$$\begin{gathered}(\forall P)(ST_z(p \to \langle U \rangle \langle on \rangle p)) \\ \Updownarrow \\ (\forall P)(ST_z(p) \to ST_z(\langle U \rangle \langle on \rangle p) = \\ \Updownarrow \\ (\forall P)(Pz \to (\exists x, z_1)(x\ on\ z_1 \wedge Pz_1))\end{gathered}$$

tomemos la mínima asignación de P que hace al antecedente verdadero, $\sigma(P) = \lambda u.z = u$, se tiene

$$(z = z) \to (\exists x, z_1)(x\ on\ z_1 \wedge z = z_1)$$

$$(\exists x)(x\ on\ z)$$

y de forma global

$$(\forall z)(\exists x)(x\ on\ z)$$

(MGEI7) se corresponde con **(FEI7)**.
En efecto, supongamos **(MGEI7)** válida y tomemos $z, x, w \in W$ tales que

$$x\ on\ w \wedge x\ on\ z \wedge w \not\equiv_2 z$$

y consideremos la mínima valoración tal que

$$V(r) = \{w\}, V(t) = \{x\}$$

se tiene:

$$z \models_V (\langle \not\equiv_2 \rangle r \wedge \langle on^{-1} \rangle t) \wedge (\langle U \rangle (\langle on \rangle Or \wedge Ot) \to (\langle on^{-1} \rangle (\langle \not\equiv_1 \rangle t \wedge [\equiv_1] \langle \not\equiv_2 \rangle r)))$$

Es claro que en nuestro modelo

$$z \models_V (\langle \not\equiv_2 \rangle r \wedge \langle on^{-1} \rangle t) \wedge (\langle U \rangle (\langle on \rangle Or \wedge Ot))$$

en consecuencia

$$z \models_V (\langle on^{-1} \rangle (\langle \not\equiv_1 \rangle t \wedge [\equiv_1] \langle \not\equiv_2 \rangle r))$$

lo que se traduce en que

$$(\exists y, x')(z\ on^{-1}\ y \wedge y \not\equiv_1 x'), x' \in V(t), \text{ y además,}$$

$$(\forall s)(y \equiv_1 s \rightarrow (\exists s')(s \not\equiv_2 s')),\ s' \in V(r)$$

es decir

$$(\exists y \in W)(y\ on\ z \wedge\ y \not\equiv_1 x) \wedge (\forall s \in W)(y \equiv_1 s \rightarrow s \not\equiv_2 w)$$
$$\Updownarrow$$
$$(\exists y \in W)(y\ on\ z \wedge\ y \not\equiv_1 x) \wedge (\forall s \in W)(y \not\equiv_1 s \vee s \not\equiv_2 w)$$

Recíprocamente, supongamos ahora que se tiene **(FEI7)** y **(MGEI7)** no es válido, entonces existe una valoración V y un estado z tal que:

$$z \not\models_V (\langle\not\equiv_2\rangle r \wedge \langle on^{-1}\rangle t) \wedge (\langle U\rangle(\langle on\rangle Or \wedge Ot) \rightarrow (\langle on^{-1}\rangle(\langle\not\equiv_1\rangle t \wedge [\equiv_1]\langle\not\equiv_2\rangle r)))$$

por tanto se tiene

$$z \models_V (\langle\not\equiv_2\rangle r \wedge \langle on^{-1}\rangle t) \wedge (\langle U\rangle(\langle on\rangle Or \wedge Ot)) \tag{1}$$

pero en cambio

$$z \not\models_V (\langle on^{-1}\rangle(\langle\not\equiv_1\rangle t \wedge [\equiv_1]\langle\not\equiv_2\rangle r))$$

es decir

$$(\exists w, x \in W)(z \not\equiv_2 w \wedge z\ on^{-1}\ x) \text{ con } w \in V(r), x \in V(t) \text{ y}$$
$$(\exists x', z' \in W)(x'\ on\ z') \text{ donde } z' \in V(r) = \{w\} \text{ y } x' \in V(t) = \{x\}$$

lo cual es equivalente a

$$(\exists w, x \in W)(z \not\equiv_2 w \wedge x\ on\ z \wedge x\ on\ w)$$

ahora utilizamos **(FEI7)** para asegurar la existencia de un elemento $y \in W$, verificando

$$x \not\equiv_1 y \wedge y\ on\ z \wedge (\forall s \in W)(y \not\equiv_1 s \vee s \not\equiv_2 w)$$

en consecuencia

$$z \models_V (\langle on^{-1}\rangle(\langle\not\equiv_1\rangle t \wedge [\equiv_1]\langle\not\equiv_2\rangle r))$$

lo cual contradice (1). ■

8 Axiomatización. Corrección y completitud

En este capítulo propondremos un sistema axiomático para la lógica **LMGEI** y probaremos que es correcto y completo.

En general, cuando decimos que una fórmula modal φ determina o caracteriza una clase K de marcos, queremos decir que un marco cualquiera $\mathcal{F} = (M, R)$, pertenecerá a dicha clase, si y solo si la fórmula φ es válida en él. En muchos casos, la clase de marcos con la cual se está trabajando viene determinada por ser sus elementos, modelos de una sentencia de primer orden, como ejemplo podríamos citar los marcos reflexivos, simétricos, etc,.. La denominada teoría de correspondencia, estudia la relación entre el formalismo modal y el lenguaje de primer orden adecuado a la clase de marcos con que se este trabajando. Es bién conocido, como en el caso de los ejemplos citados, es decir, de los marcos reflexivos y simétricos, respecto de la relación R, las fórmulas modales $p \rightarrow \langle R\rangle p$ y $\langle R\rangle\langle R\rangle p \rightarrow \langle R\rangle p$, caracterizan dichas clases de marcos y por tando se dirán correspondientes con las de primer orden, $\forall x Rxx$ y $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx)$. Sin embargo, es también conocido, que no toda fórmula de primer orden que defina una determinada clase de marcos, tiene una correspondencia modal: el ejemplo más usual es la irreflexividad.

No obstante, existen varios caminos para caracterizar una clase de marcos. Si consideramos un mundo m en un marco $\mathcal{F} = (M, R)$, es claro que w es irreflexivo si y solo si $\{w\} \cap \{v/Rwv\} \neq \emptyset$, o equivalentemente un mundo w es irreflexivo, si es posible falsear la fórmula $p \to \langle R \rangle p$ en w. Esta idea, nos da un camino para caracterizar los marcos irreflexivos:

$$\mathcal{F} \models \forall x \neg Rxx \Leftrightarrow \forall w \exists V(\mathcal{F}, V, w \models \neg(p \to \langle R \rangle p))$$

Otro punto de vista, ha sido dado por D. M. Gabbay, quien en lugar de usar axiomas para la caracterización de la irreflexividad, ha introducido una regla de inferencia especial, la cual ha sido denominada como "regla de irreflexividad": Esta regla puede formularse como sigue:

$$\vdash \neg(p \to \langle R \rangle p) \to \psi \Rightarrow \vdash \psi, \text{ si } p \text{ no aprece en } \psi$$

Esta regla que es claramente admisible en los marcos irreflexivos, si es incluida en un sistema axiomático normal, la clase de marcos en la cual, toda fórmula deducible en dicho es válida, es justamente la clase de marcos ireflexivos.

Obsérvese que $\neg(p \to \langle R \rangle p) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \langle R \rangle p) \leftrightarrow (p \wedge \neg \langle R \rangle p) \leftrightarrow (p \wedge \neg \langle R \rangle p \neg(\neg p)) \leftrightarrow (p \wedge [R] \neg p) = Op$. De esta forma, la regla de irreflexividad se expresaría:

$$\vdash Op \to \psi \Rightarrow \vdash \psi, \text{ si } p \text{ no aprece en } \psi$$

9 Axiomática

Proponemos la siguiente axiomatización para **LMGEI**:

Axiomas

I Todas las tautologías de la lógica de proposiciones

II $[R](p \to q) \to [R]p \to [R]q, [R] \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$,
$\langle \not\equiv_i \rangle [\not\equiv_i] p \to p, i = 1, 2.$

($\neq_1$) $\langle \neq \rangle [\neq] p \to p$

($\neq_2$) $p \wedge [\neq] p \to [\neq][\neq] p$

($R \subseteq U$) $[U]p \to [R]p, R \in \{\equiv_1, \equiv_2\}$

(MGEI*) $\langle U \rangle p \to \langle \equiv_i \rangle p \vee \langle \not\equiv_i \rangle p, i = 1, 2$

(MGEI**) $\langle \equiv_i \rangle [\neq] p \to [\not\equiv_i] p, i = 1, 2$

(MGEI0) $[\equiv_i] p \to p, \langle \equiv_i \rangle [\equiv_i] p \to p, [\equiv_i] p \to [\equiv_i][\equiv_i] p, i = 1, 2$

(MGEI1) $\langle U \rangle p \to \langle on \rangle \langle on^{-1} \rangle p$

(MGEI2) $p \to \langle on \rangle \langle \not\equiv_2 \rangle \langle on^{-1} \rangle p$

(MGEI3) $[on] p \to \langle \not\equiv_1 \rangle [on] p$

(MGEI4) $\langle on \rangle (p \wedge \langle on^{-1} \rangle ([\neq] q \wedge r)) \to ([on](\langle \equiv_2 \rangle p \vee [on^{-1}] q) \vee \langle \equiv_1 \rangle r \vee [on] \langle on^{-1} \rangle r)$

(MGEI5) $(\langle \not\equiv_1 \rangle p \wedge \langle \not\equiv_1 \rangle q) \to (([on](\langle on^{-1} \rangle Op \wedge \langle on^{-1} \rangle Oq) \to$
$(\langle U \rangle (\langle \equiv_1 \rangle p \wedge q)))$

(MGEI6) $p \to \langle U \rangle \langle on \rangle p$

(MGEI7) $(\langle\not\equiv_2\rangle r \wedge \langle on^{-1}\rangle t) \rightarrow (\langle on^{-1}\rangle(\langle\not\equiv_1\rangle t \wedge ([\equiv_1]\langle\not\equiv_2\rangle r))$

Reglas de inferencia:

(MP) modus ponens: si $\vdash A$ y $\vdash A \rightarrow B$ entonces $\vdash B$,

(RN) regla de necesidad: si $\vdash A$ entonces $\vdash [R]A$, $R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$,

(IR) regla de irreflexividad: si p no aparece en A y $\vdash Op \rightarrow A$ entonces $\vdash A$,

(RS) regla de sustitución de letras proposicionales (literales).

10 Corrección

En el capítulo precedente ha quedado clara la validez de cada uno de axiomas que hemos presentado. Por otra parte, las reglas de inferencia **(MP)**, **(RN)** y **(RS)** son las habituales en cualquier sistema modal de tipo normal y por tanto su admisibilidad es conocida. En cuanto a la regla **(IR)**, tal como nosotros hemos definido Op, caracteriza la irreflexividad de la relación $\neq$ y en consecuencia es claramente admisible.

11 Completitud

Probaremos la completitud del sistema axiomático, mediante la construcción de un marco sintáctico, usualmente denominado canónico, que pertenecerá a la clase de los marcos esféricos de incidencia.

111 Fórma de necesidad

Ampliemos, de manera auxiliar, el sistema formal introduciendo una nueva regla de inferencia.

Definición 7 *Sea $\sharp$ un símbolo externo al lenguaje* **LMGEI**. *Definimos de forma inductiva la noción de forma de necesidad* F.N.*:*

1. *$\sharp$ es una* F.N.
2. *Si ϕ es una* F.N.*y A es una fórmula, entonces $A \rightarrow \phi$ es una* F.N.
3. *Si ϕ es una* F.N.*y $R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \neq, U\}$, entonces $[R]\phi$ es una* F.N..

Establezcamos para lo que concierne a la siguiente proposición y sus aplicaciones el criterio de notación que sigue:
Dada una fórmula cualquiera B, denotaremos por $[R_i]B$, $i = 1, 2, \ldots$, a una fórmula que eventualmente podrá ser $[\equiv_1]B$, o $[\equiv_2]B$, o $[\not\equiv_1]B$, o $[\not\equiv_2]B$, o $[\neq]B$, o $[U]B$, o la propia B. En este último caso diremos que el operador $[R_i]$ es evanescente.

Lema 7 *Sea ϕ una forma de necesidad, entonces ϕ puede escribirse de la siguiente forma:*

$$\phi = A_0 \rightarrow [R_1](A_1 \rightarrow \ldots [R_k](A_k \rightarrow \sharp) \ldots)$$

DEMOSTRACIÓN. Razonaremos por inducción sobre la longitud de la fórmula.
Si la longitud de la forma es 0 se tiene el resultado.
Supongamoslo cierto para longitud n y sea ϕ una forma de necesidad de longitud $n+1$.
Si $\phi = A \rightarrow \psi$, siendo ψ una F.N.de longitud n, aplicando la hipótesis de inducción,

$$\psi = A_0 \rightarrow [R_1](A_1 \rightarrow \ldots [R_k](A_k \rightarrow \sharp) \ldots)$$

de donde

$$\phi = A \to (A_0 \to [R_1](A_1 \to \dots [R_k](A_k \to \sharp) \dots)$$

Por otro lado, si $\phi = [R]\psi$, la longitud de ψ es de nuevo igual a n y por tanto

$$\psi = A_0 \to [R_1](A_1 \to \dots [R_k](A_k \to \sharp) \dots),$$

en consecuencia

$$\phi = [R]\psi = [R](A_0 \to [R_1](A_1 \to \dots [R_k](A_k \to \sharp) \dots))$$

o de forma equivalente,

$$\top \to ([R](A_0 \to [R_1](A_1 \to \dots [R_k](A_k \to \sharp) \dots))) \qquad \blacksquare$$

Dada una forma de necesidad ϕ, denotaremos por $\phi(A)$ a la fórmula resultante de sustituir $\sharp$ por A en ϕ.

Proposición 4 *El anterior proceso de sustitución en las fórmulas de necesidad, opera de forma normal, es decir:*

$$\phi(A \to B) \to (\phi(A) \to \phi(B))$$

*Además si A es un teorema para **LMGEI**, entonces también lo es $\phi(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por inducción sobre la longitud de la fórmula. Sea ϕ una F.N..
Si la longitud es 0, entonces

$$\phi = \sharp$$

por lo tanto

$$\phi(A \to B) = A \to B = \phi(A) \to \phi(B)$$

Supongamos el resultado cierto para cada F.N.con longitud $n > 0$ y sea ϕ una F.N.con longitud $n + 1$.
El lema 7 nos permite escribir

$$\phi = A_0 \to [R_1](A_1 \to \dots [R_k](A_k \to \sharp) \dots)$$

donde

$$\psi = [R_1](A_1 \to \dots [R_k](A_k \to \sharp) \dots)$$

es una F.N.de longitud n.
Aplicando la hipótesis de inducción,

$$\psi(A \to B) \to (\psi(A) \to \psi(B))$$

Por otra parte, sabemos que $\phi(A \to B) = A_0 \to \psi(A \to B)$ y también que $\psi(A \to B) \to (\psi(A) \to \psi(B))$, luego por medio del silogismo hipotético, obtendremos que

$$A_0 \to (\psi(A) \to \psi(B))$$

Para terminar, nos basta utilizar el segundo esquema de axioma de Lukasiek y por tanto,

$$(A_0 \to (\psi(A) \to \psi(B))) \to ((A_0 \to \psi(A)) \to (A_0 \to (\psi(B))$$

lo que por definición resulta ser:

$$\phi(A \to B) \to (\phi(A) \to \phi(B))$$

Probemos la segunda aserción.

Sea A un teorema en **LMGEI** y sea ϕ una F.N..
Si $\phi = \sharp$, el resultado es trivial.

Razonando igualmente por inducción, supongamos que la F.N.ϕ tiene longitud $n+1$, entonces

$$\phi = A_0 \to [R_1](A_1 \to \ldots [R_k](A_k \to \sharp)\ldots)$$

denotemos por $\psi =$ la consecuencia de ϕ.

De esta forma, la longitud de ψ será n y la hipótesis de inducción nos asegura que $\psi(A)$ es un teorema. Como caso particular del primer axioma de Lukasiek, podemos afirmar que la fórmula

$$\psi(A) \to (A_0 \to \psi(A))$$

es un también teorema y utilizando la regla **(MP)**,

$$A_0 \to \psi(A) = \phi(A)$$

es un teorema. ∎

Introduzcamos eventualmente una nueva regla de inferencia.

Definición 8 *Ampliamos nuestro sistema con la siguiente regla de inferencia:*

$$(DeepIR_\phi)\frac{\phi(Op \to A)}{\phi(A)},\ \textit{donde } \phi \textit{ es una } \text{F.N.} \textit{y } p \textit{ no aparece en } \phi(A)$$

Lema 8 *La regla de inferencia (DeepIR$_\phi$) es una regla admisible.*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por reducción al absurdo.

Sea ϕ una F.N.y supongamos que $\models \phi(Op \to A)$, siendo p un literal que no aparece en A, pero que $\not\models \phi(A)$. De esta forma, podemos asegurar la existencia de un elemento x y una valoración V tales que

$$x \not\models_V \phi(A)$$

Utilizando el lema 7 podemos escribir

$$\phi(A) = A_0 \to [R_1](A_1 \to \ldots [R_k](A_k \to A)\ldots)$$

fórmula que no será cierta en el estado $x = x_0$ para la valoración V, por lo que $x \models_V A_0$ y $x \not\models_V [R_1](A_1 \to \ldots [R_k](A_k \to A)\ldots)$, es decir

$$(\exists x_1) x\ R_1\ x_1, x_1 \not\models_V (A_1 \to \ldots [R_k](A_k \to A)\ldots)$$

Reiterando el proceso conseguiremos elementos $x_i, i = \ldots k$, con $x_i = x_{i-1}$ en el caso de ser$[R_i]$ evanescente, tales que

$$x_0\ R_1\ x_1\ R_2 \ldots R_k\ x_k$$

y verificando que $x_i \models_V A_i, i = 0 \ldots k$ y $x_k \not\models_V A$.

Definamos una nueva valoración V' del siguiente modo:

$$V'(p) = \{x_k\},\ V'(p_i) = V(p_i) \text{ para todo } p \neq p_i$$

de esta forma, es claro que $x \models_{V'} \phi(Op \to A)$, $x_i \models_{V'} A_i$, $i = 0 \ldots k$ y $x_k \models_{V'} (Op \to A)$, ya que p no aparece en en $\phi(A)$. Además, como $x_k \models_{V'} Op$, entonces $x_k \models_{V'} A$ y debido a la elección de V' concluiríamos que $x_k \models_V A$, lo que sería una contradicción. ∎

Definición 9 *Versión infinita de la (DeepIR$_\phi$):*

$$(DeepIR^*_\phi)\frac{\phi(Op \to A) \textit{ para todo } p}{\phi(A)},\textit{donde } \phi \textit{ es una } \text{F.N.}$$

Lema 9 *(DeepIR$^*_\phi$) es una regla admisible.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A una fbf, existe algun literal p que no aparece en A, ya que la construcción de una fbf se realiza en un número finito de pasos y el conjunto de literales es infinito numerable. Se obtiene el resultado aplicando el lema 8. ■

Denotemos en lo que sigue con L al conjunto de los teoremas de **LMGEI**.

Definición 10 *Un conjunto de fórmulas Γ diremos que conforman una teoría si se verifican:*

(i) $L \subseteq \Gamma$

(ii) *si* $\{A, A \to B\} \in \Gamma$*, entonces* $B \in \Gamma$

(iii) *Para toda* F.N.ϕ*, si para todo literal p se tiene* $\phi(Op \to A) \in \Gamma$*, entonces* $\phi(A) \in \Gamma$

Definición 11 *Sea Γ un conjunto de fbf y ϕ una* F.N.. *Denotaremos por $\phi\Gamma$ al conjunto $\{A : \phi(A) \in \Gamma\}$.*

Como casos particulares, si $\phi = [R]\sharp$ entonces $\phi\Gamma = \{A : [R]A \in \Gamma\}$, y en el caso de ser $\phi = A \to \sharp$, entonces $\phi\Gamma = \{B : A \to B \in \Gamma\}$. Este último conjunto lo denotaremos como $\Gamma + A$.

Lema 10 *Si Γ es una teoría y ϕ una* F.N.*, entonces $\phi\Gamma$ es una teoría.*

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por inducción sobre la longitud de ϕ.
Si $\phi = \sharp$ no hay nada que probar.

Supongamos que el resultado es cierto para toda F.N.de longitud n y consideremos una F.N.ϕ de longitud $n+1$. Utilizando el lema 7 escribiremos $\phi = A_0 \to \psi$, donde ψ es una F.N.de longitud n. De esta forma, $L \subseteq \psi\Gamma = \{A : \psi(A) \in \Gamma\} \subseteq \{A : A_0 \to \psi(A) \in \Gamma\} = \{A : \phi(A) \in \Gamma\} = \phi\Gamma$.

Por otra parte, si $A, A \to B \in \phi\Gamma$, entonces $\phi(A), \phi(A \to B) \in \Gamma$. Utilizando la normalidad de ϕ, tendremos que $\phi(A \to B) \to (\phi(A) \to \phi(B))$, con lo que $(\phi(A) \to \phi(B)) \in \Gamma$ y al ser Γ una teoría $\phi(B) \in \Gamma$.

Por último, sea γ una F.N.y supongamos que para toda letra proposicional p se tiene que $\gamma(Op \to A) \in \phi\Gamma$. Entonces $\phi(\gamma(Op \to A)) \in \Gamma$ y como Γ es una teoría, $\phi(\gamma(A)) \in \Gamma$ por lo que $\gamma(A) \in \phi\Gamma$. ■

Lema 11 *Una teoría consistente Γ puede ser extendida a una teoría consistente maximal.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una enumeración $A_0, A_1, \ldots, A_k \ldots$ de todas las fbf de **LMGEI** y definamos de forma inductiva una suceción de teorías $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \ldots$.

Sea $\Gamma_0 = \Gamma$. Si suponemos construida la secuencia $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_n$, definiremos Γ_{n+1} distinguiendo dos casos:

caso 1 Si $\Gamma_n + A_n$ es consistente, entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n + A_n$

caso 2 Por contra, si $\Gamma_n + A_n$ es inconsistente, entonces $\neg A_n \in \Gamma_n$. La fórmula A_n puede representarse como $\phi(B)$, siendo ϕ un F.N.y B un fbf, en un número finito formas. Siendo así, sean $\sharp(A_n)$, $\phi_1(B_1)$, ..., $\phi_k(B_k)$ todas las representaciones posibles de A_n, definimos $\Gamma_n^0, \ldots, \Gamma_n^k$ inductivamente del siguiente modo:

Sea $\Gamma_n^0 = \Gamma_n$ y si suponemos construidas $\Gamma_n^0, \ldots, \Gamma_n^i (i < k)$, definimos $\Gamma_n^{i+1} = \Gamma_n^i + \neg\phi_i(Op_i \to B_i)$, donde p_i es el primer literal tal que $\Gamma_n^i + \neg\phi_i(Op_i \to B_i)$ es consistente. Obsérvese que la existencia del literal p_i está garantizada, ya que en caso contrario tendríamos que $\phi_i(Op \to B_i) \in \Gamma_n^i$ para todo p y al ser Γ_n^i cerrado para la regla (DeepIR$^*_{\phi_i}$), obtendríamos que $\phi_i(B_i) = A_n \in \Gamma_n^i$, lo que resulta contradictorio, ya que $\neg A_n \in \Gamma_n^i$.

Sea $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$. No es difícil comprobar que Δ es una teoría maximal que contiene a Γ. ■

Corolario 3 *Si Γ es una teoría y $A \notin \Gamma$, entonces existe una teoría consistente maximal Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ y $A \notin \Delta$*

DEMOSTRACIÓN. Basta con aplicar el lema anterior a $\Gamma + \neg A$. ■

Definición 12 *Construimos el marco (W_L,R^L), donde W_L es el conjunto de todas las teorías consistentes maximales y las relaciones R^L están definidas de la siguiente forma:*

$$\Gamma R^L \Delta \textit{ si y solo si } [R]\Gamma \subseteq \Delta$$

donde $R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \neq, U\}$.

Lema 12 *Consideremos $\Gamma \in W_L$ una teoría consistente maximal, entonces:*

(i) *para toda fórmula ϕ: $\phi \in \Gamma$ o $\neg\phi \in \Gamma$;*

(ii) *para todo par de fórmulas ϕ, ψ: $\phi \vee \psi \in \Gamma$ si y solo si $\phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$*

(iii) *para todo par de fórmulas ϕ, ψ: $\phi \wedge \psi \in \Gamma$ si y solo si $\phi \in \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. (i) Consideremos una fórmula cualquiera ϕ. Si $\phi \in \Gamma$ se termina la demostración, en caso contrario

$$\phi \notin \Gamma$$

y utilizando el corolario anterior obtenemos que

$$\Gamma + \neg\phi$$

es una teoría consistente maximal que contiene a Γ. Solo nos queda aplicar la maximalidad para tener

$$\Gamma = \Gamma + \neg\phi$$

por lo que

$$\neg\phi \in \Gamma$$

(ii) Consideremos dos fórmulas ϕ, ψ tales que

$$(\phi \vee \psi) = (\neg\phi \to \psi) \in \Gamma$$

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que

$$\phi \notin \Gamma \text{ y } \psi \notin \Gamma$$

Utilizando el apartado *(i)* obtenemos

$$\neg\phi \in \Gamma \text{ y } \neg\psi \in \Gamma$$

usando **(MP)** concluimos que

$$\psi \in \Gamma$$

lo cual es un absurdo.

Para demostrar la implicación recíproca consideremos ϕ, ψ fórmulas tales que

$$\phi \in \Gamma \text{ o } \psi \in \Gamma$$

Si suponemos

$$\phi \in \Gamma$$

utilizando la Lógica de Proposiciones tenemos

$$(\neg\psi \to \phi) \in \Gamma$$

es decir

$$(\psi \vee \phi) \in \Gamma$$

y también

$$(\phi \vee \psi) \in \Gamma$$

El caso

$$\psi \in \Gamma$$

se razona de la misma forma.

(iii) Consideremos dos fórmulas ϕ, ψ, usando el apartado (ii) se tiene

$$(\phi \vee \psi) \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma \text{ o } \psi \in \Gamma$$

negando en ambos miembros obtenemos

$$(\phi \vee \psi) \notin \Gamma \Leftrightarrow \phi \notin \Gamma \text{ y } \psi \notin \Gamma$$

utilizando (i) se tiene

$$\neg(\phi \vee \psi) \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\phi \in \Gamma \text{ y } \neg\psi \in \Gamma$$

es decir

$$(\neg\phi \wedge \neg\psi) \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\phi \in \Gamma \text{ y } \neg\psi \in \Gamma$$

solo tenemos que renombrar $\neg\phi = \phi', \neg\psi = \psi'$ para tener

$$(\phi' \wedge \psi') \in \Gamma \Leftrightarrow \phi\prime \in \Gamma \text{ y } \psi' \in \Gamma \qquad \blacksquare$$

Lema 13 *Consideremos el marco (W_L,R^L), se tiene:*

(i) $\Gamma R^L \Delta$ *si y solo si para todo A, $A \in \Delta$ entonces $\langle R \rangle A \in \Gamma$, donde* $R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2, \neq, U\}$

(ii) $[R]A \in \Gamma$ *si y solo si* $(\forall\Delta \in W_L)(\Gamma R^L \Delta \to A \in \Delta)$*;*
$\langle R \rangle A \in \Gamma$ *si y solo si* $(\exists\Delta \in W_L)(\Gamma R^L \Delta$ *y* $A \in \Delta)$

(iii) *Para todo $\Gamma \in W_L$, existe p tal que $Op \in \Gamma$*

(iv) *las relaciones $\equiv_1^L, \equiv_2^L, U^L$ son de equivalencia*

(v) *las relaciones $\neq^L, \equiv_1^L, \equiv_2^L, \not\equiv_1^L, \not\equiv_2^L$ son subconjuntos de U^L*

(vi) $\neq^L = (\not\equiv_1^L \cup \not\equiv_2^L), U^L = (Id \cup \neq^L)$*, donde* $Id = \{(\Gamma, \Gamma) : \Gamma \in W^L\}$

(vii) *si $\Gamma U^L \Delta$, entonces* ($\Gamma \neq^L \Delta$ *si y solo si* $\Gamma \neq \Delta$)

(viii) *si $\Gamma U^L \Delta$, entonces* ($\Gamma \not\equiv_i^L$ *si y solo si no se tiene* $\Gamma \not\equiv_i^L \Delta), i = 1, 2$

(ix) *si $\Gamma U^L \Delta$ y $Op \in \Gamma \cap \Delta$, entonces $\Gamma = \Delta$*

DEMOSTRACIÓN. (i) Por definición $\Gamma R^L \Delta$ si y solo si para todo A tal que $[R]A \in \Gamma$ entonces $A \in \Delta$ si y solo si para todo A tal que $[R]\neg A \in \Gamma$ entonces $\neg A \in \Delta$ si y solo si para todo A tal que $\neg A \notin \Delta$ entonces $[R]\neg A \notin \Gamma$ si y solo si para todo A tal que $A \in \Delta$ entonces $\langle R\rangle A \in \Gamma$.

(ii) Supongamos $[R]A \in \Gamma$ y sea $\Delta \in W_L$ tal que $\Gamma R^L \Delta$. Por la definición de R^L se tiene

$$[R]\Gamma \subseteq \Delta$$

donde

$$[R]\Gamma = \{A : [R]A \in \Gamma\}$$

y como tenemos

$$[R]A \in \Gamma$$

entonces

$$A \in \Delta$$

Para demostrar el recíproco,razonemos por reducción al absurdo y supongamos $[R]A \notin \Gamma$. Utilizando el lema 10 en la F.N.$\phi = [R]\sharp$, se obtiene

$$\Delta = [R]\Gamma = \{A' \mid [R]A' \in \Gamma\}$$

es una teoría y utilizando la hipótesis se tiene

$$A \in \Delta$$

Pero como

$$[R]A \notin \Gamma$$

también

$$A \notin \Delta$$

lo cual es un absurdo.

Se tiene por lo demostrado anteriormente que: $[R]\neg A \in \Gamma$ si y solo si $(\forall \Delta \in W_L)(\Gamma R^L \Delta \to \neg A \in \Delta)$, para todo A. Usando contrarecíproco:

$$[R]\neg A \notin \Gamma \Leftrightarrow (\exists \Delta \in W_L)(\Gamma R^L \wedge \neg A \notin \Delta)$$

$$\neg[R]\neg A \in \Gamma \Leftrightarrow (\exists \Delta \in W_L)(\Gamma R^L \wedge \neg(\neg)A \in \Delta)$$

$$\langle R\rangle A \in \Gamma \Leftrightarrow (\exists \Delta \in W_L)(\Gamma R^L \wedge A \in \Delta)$$

(iii) Supongamos que para todo p se tiene $Op \notin \Gamma$. Como Γ es un conjunto conjunto consistente maximal, se tiene

$$\neg Op \in \Gamma$$

y

$$(\neg Op \to (\top \to \neg Op)) \in \Gamma$$

Utilizando **(MP)** obtenemos

$$Op \to \bot \text{ para todo } p$$

y puesto que Γ es cerrado respecto a $(DeepIR^*_\sharp)$ se tiene

$$\bot \in \Gamma$$

lo cual es absurdo.

(iv) Consideremos $\Gamma \in W_L$ y $A \in [\equiv_i]\Gamma$, tales que

$$[\equiv_i]A \in \Gamma;$$

como

$$L \subseteq \Gamma$$

se tiene

$$([\equiv_i]A \to A) \in \Gamma$$

y utilizando **(MP)** tenemos

$$A \in \Gamma$$

por lo tanto

$$[\equiv_i]\Gamma \subseteq \Gamma$$

y en consecuencia $\equiv_i^L$ es reflexiva. El resto de propiedades se optienen de forma análoga.

Veamos la propiedad reflexiva para U^L. Sea $A \in [U]\Gamma$, entonces

$$[U]A \in \Gamma$$

utilizando el axioma $(R \subset U)$ y **(MP)** obtenemos

$$[\equiv_i]A \in \Gamma$$

y de nuevo por el axioma **(MGEI0)** y **(MP)** se tiene

$$A \in \Gamma$$

Las demás propiedades se demuestran de forma análoga.

(v) Utilizando el axioma $(R \subset U)$ garantizamos que $\equiv_i^L$ es subconjunto de U^L. Veamoslo ahora para $\not\equiv_i^L$, para ello, consideremos $\Gamma, \Delta \in W_L$, tales que

$$\Gamma \not\equiv_i^L \Delta$$

por definición obtenemos

$$[\not\equiv_i]\Gamma \subset \Delta$$

Sea A una fórmula cualquiera tal que

$$[U]A = (A \wedge [\neq]A) \in \Gamma$$

utilizando el lema 12 obtenemos

$$[\neq]A = ([\not\equiv_1]A \wedge [\not\equiv_2]A) \in \Gamma$$

y volviendo a utilizar el mismo lema se tiene

$$[\not\equiv_i]A \in \Gamma, i = 1, 2$$

aplicando la hipótesis se obtiene

$$A \in \Delta$$

por lo que

$$\Gamma U^L \Delta$$

Por otra parte, como $[\neq]A = [\not\equiv_1]A \wedge [\not\equiv_2]A$, se tiene de forma simple el resultado.

(vi) Consideremos $\Gamma, \Delta \in W_L$ tales que $\Gamma \not\equiv_i^L \Delta$, para $i = 1$ o 2 y supongamos $[\neq]A \in \Gamma$. Como

$$[not =]A = [\not\equiv_1]A \wedge [\not\equiv_2]A \in \Gamma$$

utilizando el lema 12 se tiene

$$[\not\equiv_1]A \in \Gamma \text{ y } \wedge [\not\equiv_2]A \in \Gamma$$

y haciendo uso de la hipótesis, se obtiene
$$A \in \Delta$$

Por otra parte, sean $\Gamma, \Delta \in W_L$ tales que $\Gamma \neq^L \Delta$. Razonemos por reducción al absurdo y supongamos $(\Gamma, \Delta) \notin (\not\equiv_1^L \cup \not\equiv_2^L)$, en consecuencia existen fórmulas A y B verificando

$$[\not\equiv_1]A \in \Gamma,\ [\not\equiv_2]B \in \Gamma,\ A \notin \Delta,\ B \notin \Delta$$

Consideremos la fórmula
$$A \vee B$$

se tiene
$$([\equiv_1]A \vee [\equiv_1 B]) \in \Gamma,\ ([\equiv_2]A \vee [\equiv_2]B) \in \Gamma$$

utilizando la tautología
$$(\Box C \vee \Box D) \to \Box(C \vee D)$$

y la regla de inferencia **(MP)**, obtenemos

$$[\neq](A \vee B) = [\not\equiv_1](A \vee B) \wedge [\not\equiv_2](A \vee B) \in \Gamma$$

por lo que
$$(A \vee B) \in \Delta$$

es decir
$$A \in \Delta \text{ o } B \in \Delta$$

que es un absurdo.

(vii) Por el apartado anterior se tiene la contención

$$\not\equiv_i^L \cup \not\equiv_2^L \subseteq U^L$$

Sean $\Gamma, \Delta \in W_L$ con $\Gamma U^L \Delta$.

$Si \Gamma \neq^L \Delta$, entonces $[\neq]\Gamma \subseteq \Delta$. Por el apartado (ii), existe p tal que $Op \in \Gamma$, $p \wedge [\neq]\neg p \in \Gamma$ con lo que $\neg p \in \Delta$ y $\Gamma \neq \Delta$.

Si $\Gamma \neq \Delta$, aplicando (v) se tiene $\Gamma \neq^L \Delta$

(viii) Los axiomas **(MEIG*****)** y **(MEIG******)** implican

$$\equiv_i^L \cup \not\equiv_i^L = U^L, \equiv_i^L \cap \not\equiv_i^L = \emptyset$$

En efecto, por (iv) se tiene $\equiv_i^L \cup \not\equiv_i^L \subseteq U^L$. Si $\Gamma U^L \Delta$, entonces $\{A \mid [U]A \in \Gamma\} \subseteq \Delta$. Supongamos que no se tiene $\Gamma \equiv_i^L \Delta$ y $\Gamma \not\equiv_i^L \Delta$, entonces existen A, B fórmulas tales que:

$$[\equiv_i]A \in \Gamma, A \notin \Delta$$

$$[\not\equiv_i]B \in \Gamma, B \notin \Delta$$

Consideremos la fórmula $A \vee B$ se tiene

$$([\equiv_i]A \vee [\equiv_i]B) \in \Gamma,\ ([\not\equiv_i]A \vee [\not\equiv_i]B) \in \Gamma$$

utilizando la tautología
$$(\Box C \vee \Box D) \to \Box(C \vee D)$$

y la regla de inferencia **(MP)**, obtenemos

$$[\equiv_i](A \vee B) \in \Gamma,\ [\not\equiv_i](A \vee B) \in \Gamma$$

utilicemos el axioma **MGEI*** y de nuevo por **(MP)** obtenemos

$$[U](A \vee B) \in \Gamma$$

por lo que

$$(A \vee B) \in \Delta$$

es decir

$$A \in \Delta \text{ o } B \in \Delta$$

que es un absurdo.

Supongamos $\equiv_i \cap \not\equiv_i \neq \emptyset$. Entonces $\exists x, y \in W_L$ tales que $x \equiv_i^L y, x \not\equiv_i^L y$, por tanto $[\equiv_i]x \subseteq y, [\not\equiv_i]x \subseteq y$. Por el apartado (ii) existe una letra proposicional p tal que $Op = (p \wedge [\neq]\neg p) \in y$, por lo tanto $p \in y, [\neq]\neg p \in y$. Por ser y CCM $\neg[\neq]\neg p = \langle\neq\rangle p \notin y$. Como $[\equiv_i]x \subseteq y$, se tiene $[\equiv_i]\neg[\neq]\neg p \notin x$ y por ser x un CCM, $\neg[\equiv_i]\neg[\neq]\neg p = \langle\equiv_i\rangle[\neq]\neg p \in x$. Aplicando **(MGEI******)** y **(MP)** obtenemos $[\not\equiv_i]\neg p \in x$ con lo que $\neg p \in [\not\equiv_i]x \subseteq y$. $(p \wedge \neg p) \in y$ que es una contradicción. De estos resultados se deduce de manera trivial:

$$\Gamma \not\equiv_i^L \Delta \leftrightarrow \text{ no } \Gamma \equiv_i^L \Delta$$

(ix) Sean $\Gamma, \Delta \in W_L$ tales que $\Gamma U^L \Delta$, por el apartado (v) se tiene $\Gamma = \Delta$ ó $\Gamma \neq^L \Delta$. Supongamos $\Gamma \neq^L \Delta$; $Op = (p \wedge [\neq]\neg p) \in (\Gamma \cap \Delta)$, $[\neq]\Gamma \subseteq \Delta$, por lo que $(p \wedge \neg p) \in \Delta$ que es un absurdo. ■

Definición 13 *Sea Γ una teoría maximal. Se define el marco canónico generado por Γ, $W_F^\Gamma = (W^\Gamma, \equiv_1^\Gamma, \equiv_2^\Gamma, \not\equiv_1^\Gamma, \not\equiv_2^\Gamma)$ de la siguiente manera:*

$$W^\Gamma = \{\Delta \in W_L \mid \Gamma U^L \Delta\}$$
$$R^\Gamma = R^L \cap (W^\Gamma \times W^\Gamma), R \in \{\equiv_1, \equiv_2, \not\equiv_1, \not\equiv_2\}$$

Lema 14 *El marco $W_F^\Gamma = (W^\Gamma, \equiv_1^\Gamma, \equiv_2^\Gamma, \not\equiv_1^\Gamma, \not\equiv_2^\Gamma)$ es un marco esférico de incidencia.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizando el apartado (vii) del lema 13 obtenemos que W_F^Γ es un marco $\neq -$estandar y por (viii) es cuasi-estandar.

[**(FEI1)**] Sean $x, y \in W^\Gamma$. Utilizando el lema 13(iii) aseguramos la existencia de un literal p tal que $Op \in y$. Como

$$\langle U\rangle Op \in x, \langle U\rangle Op \to \langle on\rangle\langle on^{-1}\rangle Op \in x \quad \textbf{(MGEI1)}$$

usando **(MP)** tenemos

$$\langle on\rangle\langle on^{-1}\rangle Op \in x$$

es decir

$$\langle\equiv_1\rangle\langle\equiv_2\rangle\langle\equiv_2\rangle\langle\equiv_1\rangle Op \in x$$

El lema 13 (i) asegura la existencia de

$$x', z, z', x_1 \in W_L$$

tales que

$$x \equiv_1^L x', x' \equiv_2^L z, z \equiv_2^L z', z' \equiv_1^L x_1 \text{ y } Op \in x_1$$

Además se tiene

$$y, x', z, z', x_1 \in W^\Gamma$$

En efecto,

$$\Gamma U^L x, x U^L y, x \equiv_1^L x', x' \equiv_2^L z, z \equiv_2^L z', z' \equiv_1^L x_1$$

utilizando el lema 13(v) aseguramos

$$\Gamma U^L x, x U^L y, x U^L x', x' U^L z, z U^L z', z' U^L x_1$$

tan solo necesitamos usar 13(iv) para obtener el resultado.
Así, tenemos
$$Op \in y, Op \in x_1$$
el lema 13(viii) asegura
$$y = x_1$$
Concluimos con
$$x\ on^{\Gamma}\ z, z\ on^{-1^{\Gamma}} y$$
es decir
$$x\ on^{\Gamma}\ z, y\ on^{\Gamma} z$$
que es lo que pretendíamos demostrar.

[**(FEI2)**] Sea $x \in W^{\Gamma}$. El lema 13(iii) asegura la existencia de p tal que $Op \in x$. Se tiene
$$Op \to \langle on\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle on^{-1}\rangle Op \in x,\ \textbf{MGEI2}$$
y utilizando **(MP)** obtenemos
$$\langle on\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle on^{-1}\rangle Op \in x$$
es decir
$$\langle\equiv_1\rangle\langle\equiv_2\rangle\langle\not\equiv_2\rangle\langle\equiv_2\rangle\langle\equiv_1\rangle Op \in x$$
El lema 13(ii) asegura la existencia de $x', z_1, z_2, z', z_3 \in W_L$ tales que
$$x \equiv_1^L x', x' \equiv_2^L z_1, z_1 \not\equiv_2^L z_2, z_2 \equiv_2^L z', z' \equiv_1^L z_3, Op \in z_3$$
Utilizamos el lema 13(iv), (v) para obtener
$$x', z_1, z_2, z', z_3 \in W^{\Gamma}$$
además
$$Op \in (x \cap z_3)$$
y
$$xU^L z_3$$
por lo que
$$x = z_3$$
En conclusión obtenemos
$$x\ on^{\Gamma}\ z_1, z_1 \not\equiv_2^{\Gamma} z_2, z_2\ on^{-1^{\Gamma}}\ x$$
que es como decir
$$x\ on^{\Gamma}\ z_1, z_1 \not\equiv_2^{\Gamma} z_2, z_2\ on^{-1^{\Gamma}}\ x$$

[**(FEI3)**] Consideremos $x \in W^{\Gamma}$. Utilizando el lema 13(iii) aseguramos la existencia de un literal p tal que $Op \in x$. Haciendo uso de la regla de sustitución **(RS)** del literal p en el axioma **(MGEI3)** por $\langle on^{-1}\rangle Op$ obtenemos
$$[on]\langle on^{-1}\rangle Op \to \langle\not\equiv_1\rangle[on]\langle on^{-1}\rangle Op \in x$$
Afirmamos
$$[on]\langle on^{-1}\rangle Op \in x$$
ya que esto ocurre si y solo si
$$(\forall z)(x\ on\ z \to (\exists y)(z\ on^{-1}\ y, Op \in y))$$

es decir
$$(\forall z)(x\ on\ z \to x\ on\ z)$$
que obviamente es cierto. Po tanto aplicamos **(MP)** y obtenemos
$$\langle \not\equiv_1 \rangle [on] \langle on^{-1} \rangle Op \in x$$
es decir
$$(\exists y \in W_L)(x \not\equiv_1^L y \land (\forall z \in W_L)(y\ on\ z \to (\exists x' \in W_L)(z\ on^{-1}\ x' \land Op \in x')))$$
y usando el lema 13(v) y (viii) tenemos
$$(\exists y \in W^\Gamma)(x \not\equiv_1^\Gamma y \land (\forall z \in W^\Gamma)(y\ on\ z \to x\ on\ z))$$
que es el resultado deseado.

[**(FEI4)**] Consideremos $x, y, z, t \in W^\Gamma$ tales que
$$x\ on^\Gamma\ z, x\ on^\Gamma\ t, y\ on^\Gamma\ z, y\ on^\Gamma\ t$$
Utilizando el lema 13(ii) aseguramos la existencia de letras proposicionales distintas p y r tales que
$$Op \in z, Or \in y$$
Afirmamos que
$$\langle on \rangle (Op \land \langle on^{-1} \rangle ([\neq] \neg Or \land Or)) \in x$$
ya que
$$(\forall s \in W_L)(y \neq s \leftrightarrow \neg Or \in s)$$
Tambien usando la regla de sustitución de forma adecuada se obtiene
$$\langle on \rangle (Op \land \langle on^{-1} \rangle ([\neq] \neg Or \land Or)) \to$$
$$([on](\langle \equiv_2 \rangle Op \lor [on^{-1}] \neg Or) \lor \langle \equiv_1 \rangle Or \lor [on] \langle on^{-1} \rangle Or) \in x$$

Utilizando **(MP)** se tiene
$$([on](\langle \equiv_2 \rangle Op \lor [on^{-1}] \neg Or) \lor \langle \equiv_1 \rangle Or \lor [on] \langle on^{-1} \rangle Or) \in x$$
y por el lema 13(ii) y 12(ii) obtenemos
$$(\forall z_1 \in W_L)((x\ on^L\ z_1 \to ((\exists z_2 \in W_L)(z_1 \equiv_2^L z_2 \land Op \in z_2)) \quad \text{o}$$
$$(\forall x_1 \in W_L)(z_1\ on^{-1^L} x_1 \to \neg Or \in x_1)) \quad \text{o}$$
$$(\exists y_1 \in W_L) x \equiv_1^L y_1 \land Or \in y_1 \quad \text{o}$$
$$(\forall z_3 \in W_L)(x\ on^L\ z_3 \to (\exists x_2) z_3\ on^{-1^L} x_2 \land Or \in x_2)$$
usando de nuevo el lema 13 (v) y (viii) obtenemos
$$(\forall z_1 \in W^\Gamma)((x\ on^\Gamma\ z_1 \to ((z_1 \equiv_2^\Gamma z) \quad \text{o}$$
$$(\forall x_1 \in W_L)(z_1\ on^{-1^L} x_1 \to x_1 \neq y)) \quad \text{o}$$
$$x \equiv_1^L y \quad \text{o}$$
$$(\forall z_3 \in W^\Gamma)(x\ on^\Gamma\ z_3 \to z_3\ on^{-1^\Gamma} y)$$

utilizando las hipótesis y particularizando tenemos

$$(\forall z_1, x_1 \in W^\Gamma)((x\ on^\Gamma\ z_1 \wedge x_1\ on^\Gamma\ z_1 \wedge x_1 = y) \to (z_1 \equiv_2^\Gamma z))\vee$$
$$x \equiv_1^L y \vee$$
$$(\forall z_3 \in W^\Gamma)(x\ on^\Gamma\ z_3 \to z_3\ on^{-1^\Gamma} y)$$

particularizando en $z_1 = t$ y usando las hipótesis tenemos

$$(t \equiv_2^\Gamma z) \vee (x \equiv_1^L y)\vee$$

$$(\forall z_3 \in W^\Gamma)(x\ on^\Gamma\ z_3 \to y\ on^\Gamma\ z_3)$$

que es el resultado esperado.

[**(FEI5)**] Consideremos los elementos $x, y, s \in W^\Gamma$ tales que

$$x \not\equiv_1^\Gamma y \wedge x \not\equiv_1^\Gamma s \wedge$$
$$(\forall z \in W^\Gamma)((x\ on^\Gamma\ z \to y\ on^\Gamma\ z) \wedge (x\ on^\Gamma\ z \to s\ on^\Gamma\ z))$$

Utilizando el lema 13 (iii) aseguramos la existencia de letras proposicionales distintas p, q tales que $Op \in y, Oq \in s$. Se tiene

$$(\langle\not\equiv_1\rangle Op \wedge \langle\not\equiv_1\rangle Oq) \in x$$

además utilizando **(RS)** en **(MEIG5)** obtenemos

$$(\langle\not\equiv_1\rangle Op \wedge \langle\not\equiv_1\rangle Oq) \to (([on](\langle on^{-1}\rangle O(Op) \wedge \langle on^{-1}\rangle O(Oq)) \to$$
$$(\langle U\rangle(\langle\equiv_1\rangle Op \wedge Oq))) \in x$$

Utilizando **(MP)** se tiene

$$(([on](\langle on^{-1}\rangle O(Op) \wedge \langle on^{-1}\rangle O(Oq)) \to (\langle U\rangle(\langle\equiv_1\rangle Op \wedge Oq))) \in x$$

también tenemos

$$(([on](\langle on^{-1}\rangle O(Op) \wedge \langle on^{-1}\rangle O(Oq)) \in x$$

ya que esto es cierto si y solo si

$$(\forall z)(x\ on\ z \to (\exists y')(y'\ on\ z \wedge O(Op) \in y') \wedge (\exists s')(s'\ on\ z \wedge O(Op) \in s'))$$

basta tomar $y' = y, s' = s$ para tener el resultado. De nuevo por **(MP)**

$$(\langle U\rangle(\langle\equiv_1\rangle Op \wedge Oq))) \in x$$

utilizando los lemas 13(ii) y 13 aseguramos la existencia de $y_1, y_2 \in W^L$ tales que

$$xU^L y_1 \equiv_1^L y_2 \wedge Oq \in y_1 \wedge Op \in y_2$$

usamos el lema 13 para obtener

$$y_1 U^L s, y_2 U^L y$$

y por el lema 13 (ix) obtenemos

$$y_1 = s, y_2 = y$$

en consecuencia

$$s \equiv_1^\Gamma y$$

[(**FEI6**)] Consideremos $z \in W^\Gamma$. Utilizando el lema 13(iii) existe p letra proposicional tal que $Op \in z$, además, usando la **(RS)** en el axioma **(MGEI6)** se tiene

$$Op \to \langle U \rangle \langle on \rangle Op \in z$$

utilizando **(MP)** obtenemos

$$\langle U \rangle \langle on \rangle Op \in z$$

utilizando el lema 13 (ii) aseguramos la existencia de $x, z_1 \in W_L$ tales que $x\ on^L z_1 \wedge Op \in z_1$ tenemos

$$Op \in (z_1 \cap z), z_1 U^L z$$

por lo que

$$z_1 = z$$

entonces

$$(\exists x \in W^\Gamma)(x\ on^\Gamma z)$$

[(**FEI7**)] Consideremos $z, x, w \in W^\Gamma$ tales que

$$x\ on^\Gamma\ w \wedge x\ on^\Gamma\ z \wedge w \not\equiv_2^\Gamma\ z$$

Utilizando el lema 13 (ii), aseguramos la existencia de letras proposicionales distintas q, r, t tales que

$$Oq \in s, Or \in w, Ot \in x$$

Usando la **(RS)** de forma adecuada en **(MEIG7)** se tiene:

$$(\langle \not\equiv_2 \rangle Or \wedge \langle on^{-1} \rangle Ot) \to$$
$$(\langle on^{-1} \rangle (\langle \not\equiv_1 \rangle Ot \wedge ([\equiv_1] \langle \not\equiv_2 \rangle Or)) \in z$$

ademas afirmamos

$$(\langle \not\equiv_2 \rangle Or \wedge \langle on^{-1} \rangle Ot) \in z$$

y utilizando **(MP)** obtenemos

$$(\langle on^{-1} \rangle (\langle \not\equiv_1 \rangle Ot \wedge ([\equiv_1] \langle \not\equiv_2 \rangle Or)) \in z$$

Utilizando el lema 13 (ii),(iv),(v) y (ix) aseguramos la existencia de $y \in W^\Gamma$ tal que

$$(z\ on^{-1^\Gamma}\ y) \wedge (y \not\equiv_1^\Gamma\ x) \wedge (\forall s \in W^\Gamma)(y \equiv_1^\Gamma\ s \to s \not\equiv_2^\Gamma\ w)$$

y utilizando el lema 13 (viii) se tiene

$$(y\ on\ z) \wedge (y \not\equiv_1^\Gamma\ x) \wedge (\forall s \in W^\Gamma)(y \not\equiv_1^\Gamma\ s \vee s \not\equiv_2^\Gamma\ w) \qquad \blacksquare$$

Definición 14 *Consideremos en W^Γ la valoración V^Γ:*

$$V^\Gamma(p) = \{\Delta \in W^\Gamma \mid p \in \Delta\}$$

Al par (W_F^Γ, V^Γ) se le llama el modelo canónico M^Γ generado por Γ.

Lema 15 (Lema de la verdad) *Para toda fórmula A y todo $\Delta \in W^\Gamma$ se tiene:*

$$\Delta \models_{V^\Gamma} A \text{ si y solo si } A \in \Delta$$

DEMOSTRACIÓN. Si A es una letra proposicional el resultado es inmediato. Supongamos el resultado cierto para una fórmula de longitud n y sea A una fórmula con longitud $n+1$.

Si $A = [R]B$, la longitud de B es n por lo que

$$\Delta \models_{V^\Gamma} B \Leftrightarrow B \in \Delta$$
$$\Delta \models_{V^\Gamma} [R]B \Leftrightarrow (\forall\Phi)\Delta R^L \Phi \rightarrow \Phi \models_{V^\Gamma} B \Leftrightarrow$$
$$(\forall\Phi)\Delta R^L \Phi \rightarrow B \in \Delta \Leftrightarrow [R]B \in \Delta$$

Si $A = \neg B$

$$\Delta \models_{V^\Gamma} \neg B \Leftrightarrow \Delta \not\models_{V^\Gamma} B \Leftrightarrow B \notin \Delta \Leftrightarrow (\Delta - CCM)\neg B \in \Delta$$

Si $A = B \rightarrow C$

$$\Delta \models_{V^\Gamma} B \rightarrow C \Leftrightarrow \Delta \models_{V^\Gamma} (\neg B \vee C) \Leftrightarrow$$
$$\Delta \models_{V^\Gamma} \neg B \vee \Delta \models_{V^\Gamma} C \Leftrightarrow \neg B \in \Delta \vee C \in \Delta \Leftrightarrow$$
$$(\neg B \vee C) \in \Delta \Leftrightarrow B \rightarrow C \in \Delta$$

■

Teorema 4 (Completitud de LMGEI) *Sea A una fórmula en* **LMGEI**, *A es un teorema de* **LMGEI** *si y solo si A es válida en los marcos esféricos de incidencia.*

DEMOSTRACIÓN. Las tautologías de la lógica de proposiciones son fórmulas válidas, el resto de axiomas ya se ha demostrado que son válidos en los marcos esféricos de incidencia. Además las reglas de inferencia son admisibles.

Por otra parte, consideremos **S** la clase de los marcos esféricos de incidencia y A una fórmula tal que

$$\mathbf{S} \models A$$

Supongamos que A no es un teorema para L (**LMGEI**), es decir

$$A \notin L$$

utilizando el corolario 3, L puede ser extendida a una teoría consistente maximal Γ tal que

$$A \notin \Gamma$$

Tomemos el modelo canónico M^Γ generado por Γ que como se ha demostrado se basa sobre un marco de incidencia y aplicando el lema 15 se tiene

$$(M^\Gamma, \Gamma \not\models A$$

que es una contradicción. ■

References

[1] Aguilera A. y Pérez I. *Lógica para la Computación (vol. 1)*. Ágora, Granada.

[2] Balbiani P. (1998). The modal multilogic of geometry, *J. of Applied Nonclassical Logics*, **8**, 259–281.

[3] Balbiani P., V. Dugat, L. Fariñas del Cerro y López, A. (1994). *Eléments de Géométrie Mécanique*. Hermès.

[4] Balbiani, P., Fariñas del Cerro, L., Tinchev, T. y Vakarelov D. (1997). Modal Logic for incidence geometries. *Journal of Logic and Computation*, **7**: 59–78.

[5] van Benthem. (1983). *The Logic of Time*. Reidel.

[6] Blackburn, P., Rijke M. y Venema, Y. (2001).*Modal Logic*. Cambridge University Press, United Kingdom.

[7] Blumental, L. *A modern view of Geometry*, Dover.

[8] Burgess, J. P. (1980). Decidability for branching time, *Estudia logica*, **39**, 203–218.

[9] Cohn, A., Cui, Z., Randell, D. Taxonomies of logical defined cualitative spatial rules. In *Formal Ontology in Conceptual Analysis and Knowledge*, N. Guarins and R. Poli, eds. Kluwer.

[10] Coxeter, H. *Fundamentos de Geometría*. Limusa.

[11] De Rijke M. y otros. (1998).*Advances in Modal Logic (vol I)*. CSLI, United States,

[12] De Rijke M. y otros. (2002). *Advances in Modal Logic (vol II)*. WSP, Singapore.

[13] Enderton, H. B. (1972).*A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York.

[14] Gabbay, D. (1981). An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on tense frames. In *Aspects of Philosophical Logic*, U.Mönnich, ed. pp. 67–89. Reidel.

[15] Gabbay, D., Guenthner, F. (2001). *Handbook of Philosophical Logic*, second edition. Kluwer.

[16] Gabbay, D. y Hodkinson, I. (1980). An axiomatization of the temporal logic with until and since over the real numbers. *Journal of Logic and Computation*, **1**, 229–259.

[17] Gabbay, D., Hodkinson, I. y Reynolds, M. (1995). *Temporal Logic: Mathematical Foundations and Computational Aspects, Vol. I*. Oxford University Press.

[18] Galton, A. (1993). Towards and integrated logic of space, time and motion. en *13th International Join Conference on Artificial Intelligence*. Chambéry, 28 August-3 september 1993, R. Bajcsy, ed. pp 1550-1555. Morgan Kaufmann.

[19] Goldblatt, R. (1987).*Logics of Time and Computation*. Lecture Notes Number **7**. Center for the Study of Language and Information.

[20] Goldblatt, R. (1982). *Axiomatizing the Logic of Computer Programming*. Vol **130** of Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag.

[21] Hilbert, D. (1971). *Les Fondements de la Géométrie*. Dynod, Paris.

[22] Hughes, G. y Cresswell, M. (1984). *A companion to Modal Logic*. Methuen, London.

[23] Hughes, G. y Cresswell, M. (1980). *A New Introduction to Modal Logic*. Routledge.

[24] Jacobson, N. (1980). *Basic Algebra II*. W. H. Freeman and Company, New York.

[25] Lozeno, T. (1983). Spatial planning, a configuration of space approach. *IEEE Translations Computer*, **C-32**, 108–120.

[26] Manzano, M. (1993). *Many-sorted logic and its applications in Computer Science*. (Tucker and Meinke eds). John Wiley and Sons. Chichester. (UK).

[27] Marx, M. (1997). Complexity of modal logics of relations. Technical Report ML-97-02, Institute for logic, Language and Computation, University of Amsterdam.

[28] Marx, M. y Venema, Y. (1997). *Multidimensional Modal Logic*. Kluver Academic Publishers, Dordrecht.

[29] Ojeda, M. y Pérez, I. *Lógica para la Computación (vol 2)*. Ágora, Granada.

[30] Poizat, B. (2000). *A course in Model Theory*. Springer-Verlag, New-York.

[31] Ríder, A. y Rubio, R. (2004). Una Lógica Modal para la Geometría Plana de Lobachevski. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Vol. **28**, 87–94.

[32] Rijke, M. (1992). The modal logic of inequality. *Journal of Symbolic Logic*, **57**, 566–584.

[33] Sahlqvist, H. (1975). Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic. In *Proceeding of the Third Scandinavian Logic Symposium*, Uppsala, Sweden. 1973, s. Kanger, ed. pp: 110–118. North-Holland. Amsterdam.

[34] Vakarelov, D. (1992). A modal theory of arrow. In *Proceedings of the logic in AI*. European Workshop JELIA' 92. Berlin, Germany, September 1992. D. Pearce and G. Wagner. eds. pp. 1–24. Vol. 633 of Lectures Notes in Artificial Intelligence. Springer-Verlag, Berlin.

[35] Venema, Y. (1991). Modal derivation rules. ITLI prepublication series for mathematical logic and foundations ML-01-07, University of Amsterdam. Amsterdam.

[36] Venema, Y. (1992). Many dimensional Modal Logic. Doctoral dissertation. University of Amsterdam.

[37] Venema, Y. (1993). Derivation rules as anti-axioms in modal logic. *Journal of symbolic Logic*, **58**, 1003–1034.

[38] Wright, G. (1979). A modal logic of space. In *The Philosophy of Nicholas Rescher*, F. Sosa, ed. Reidel, Dordrecht, 1979.

[39] Zanardo. (1991). A complete deductive system for since-until branching time logic. *Journal of Philosophical logic*, **20**, 131–14.

Rafael María Rubio Ruiz
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba
ma1rurur@uco.es

Alfonso Ríder Moyano
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba
ma1rimoa@uco.es