QÜESTIIÓ, Vol 20, 3 pp. 385-407, 1996

EL CONTRASTE DE ESTABILIDAD PREDICTIVA COMO INSTRUMENTO PARA DISCRIMINAR ENTRE MODELOS

ANTONIO AZNAR GRASA

Mª ISABEL AYUDA BOSQUE*

Departamento de Análisis Económico

En este trabajo se considera el contraste de estabilidad predictiva como un contraste de especificación en un marco en el que se trata de elegir entre dos modelos. Se propone una modificación del estadístico habitual consistente en sustituir la varianza del modelo que aparece en el denominador, por la varianza estimada obtenida a partir del modelo más amplio de los que se comparan en el caso de modelos anidados o VAR, o por la varianza de un modelo general que anide los dos modelos en el caso de no anidados.

The predictive stability test to choose between econometric models

Keywords: Estabilidad predictiva, selección, modelos econométricos.

*Antonio Aznar Grasa y Mª Isabel Ayuda Bosque. Departamento de Análisis Económico. Facultad de CC. EE. y EE. Doctor Cerrada 1. 50005 ZARAGOZA. Fax: 761770.

–Article rebut el juny de 1995.

–Acceptat el novembre de 1995.

1. INTRODUCCIÓN

El papel del contraste de estabilidad predictiva en el proceso de evaluación de un modelo econométrico ha sido reiteradamente destacado en la literatura. En muchos trabajos y libros de texto pueden encontrarse aproximaciones a cómo definir los estadísticos y cómo interpretar los resultados obtenidos. Ver, por ejemplo, Chow (1960), Fisher (1970) y Dhrymes *et al.* (1972).

Normalmente, la hipótesis nula que se considera es que ciertos parámetros del modelo son los mismos en dos períodos muestrales no solapados y diferentes.

En este trabajo, siguiendo la sugerencia contenida en Pesaran *et al.* (1985) se va a considerar el contraste de estabilidad predictiva como un contraste general de especificación, en un marco, en el que se trata de elegir entre dos modelos. Se propone modificar el estadístico que sirve de base para el contraste, tal como se define habitualmente, variando el estimador de la varianza del modelo que aparece en el denominador de dicho estadístico. Para una amplia gama de modelos que incluye anidados, no anidados y modelos VAR se demuestra que el cambio propuesto supone una mejora sustancial en el proceso de evaluación de los modelos que se comparan.

El trabajo se organiza como sigue. En la Sección 2 se formula el problema y se introducen los elementos básicos para su tratamiento. Los modelos anidados son considerados en la Sección 3, los no anidados en la Sección 4 y la Sección 5 está dedicada a los modelos VAR. En la sección 6 se lleva a cabo una serie de experimentos de Monte Carlo con el objeto de comparar el comportamiento del estadístico de estabilidad predictiva, propuesto en este trabajo para los modelos considerados en las secciones anteriores, con el estadístico de estabilidad predictiva definido de forma habitual. El trabajo termina con unas conclusiones.

2. ELEMENTOS ESENCIALES DEL PROBLEMA. MODELOS E HIPÓTESIS

En general, el contraste de estabilidad predictiva se ha planteado considerando un modelo aislado en dos períodos muestrales diferentes.

Limitándonos a un caso muy simple, consideremos el siguiente Modelo Lineal General:

$$M_1 : y = X\beta + u_1 \qquad (1)$$

en donde y es un vector $T \times 1$ de observaciones de la variable endógena; X es una matriz $T \times k$ de las observaciones de k variables explicativas; β es un vector de k parámetros y u_1 es un vector de T perturbaciones aleatorias, todas ellas distribuidas según una distribución normal con media cero y varianza σ_1^2.

Para un período muestral diferente, de T_1 observaciones, un modelo con las mismas variables explicativas que el escrito en (1) toma la forma siguiente:

(2) $$y_p = X_p\beta_p + u_{1p}$$

en donde ahora y_p es un vector con T_1 elementos, X_p es una matriz $T_1 \times k$, β_p es de orden $k \times 1$ y u_{1p} es un vector de perturbaciones aleatorias con media cero y varianza σ^2_{1p}.

La hipótesis nula del contraste de estabilidad predictiva es la siguiente:

(3) $$H_0 : \beta = \beta_p \quad \text{y} \quad \sigma_1^2 = \sigma^2_{1p}$$

Para obtener un estadístico que permita contrastar esta hipótesis nula se parte de la siguiente expresión:

(4) $$e_p = y_p - X_p\hat{\beta}$$

en donde:

(5) $$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

Bajo la hipótesis nula escrita en (3) se obtiene que:

(6) $$e_p \sim \mathrm{N}[0, \sigma_1^2(I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X_p')]$$

Por lo tanto,

(7) $$K = \frac{e_p'[I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X_p']^{-1}e_p}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{T_1}$$

Para hacer operativo este contraste, hay que estimar σ_1^2 de forma tal que la expresión que aparezca en el denominador sea independiente del numerador. La práctica habitual ha consistido en utilizar el estimador MCO de σ_1^2 obtenido a partir de (1) que podemos escribir como:

(8) $$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\hat{u}_1'\hat{u}_1}{T-k}$$

en donde:

(9) $$\hat{u}_1 = y - X\hat{\beta}$$

El estadístico resultante puede escribirse como:

$$F = \frac{e'_p[I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X'_p]^{-1}e_p/T_1}{\hat{\sigma}_1^2} \tag{10}$$

que sigue una distribución F con T_1 y $T-k$ grados de libertad.

Pero, como ya hemos indicado, nosotros en este trabajo vamos a utilizar este contraste, no para evaluar un modelo aisladamente, sino como un instrumento para comparar dos modelos. Por esta razón, como alternativa al modelo escrito en (1) consideraremos el siguiente:

$$M_2 : y = Z\gamma + u_2 \tag{11}$$

en donde y sigue siendo un vector con T elementos, Z es una matriz $T \times q$ de observaciones de q variables explicativas, γ es un vector de q parámetros y u_2 es un vector con T variables aleatorias con media cero y todas ellas con varianza igual a σ_2^2.

Supondremos que el Proceso Generador de Datos (PGD) puede ser tanto M_1 como M_2; si el PGD es M1 entonces se tiene que:

$$E\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2 \tag{12}$$

por lo que el contraste basado en (10) en principio debería funcionar bien.

Pero si el PGD es M_2 entonces se tiene que:

$$E\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_2^2 + \frac{\gamma Z' M_x Z\gamma}{T-k} \tag{13}$$

en donde:

$$M_x = I - X(X'X)^{-1}X'$$

A partir de aquí se ve que si el PGD es M_2 el resultado escrito en (7) ya no es válido ya que la esperanza de e_p es diferente de cero y su varianza viene dada por:

$$\text{Var}\,(e_p) = \sigma_2^2[I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X'_p] \tag{14}$$

En este caso, la utilización de (10) puede llevar a resultados contradictorios ya que, como puede verse en (13), la varianza que aparece en el denominador del estadístico tenderá a ser grande en relación a la verdadera varianza en términos de esperanzas. La implicación de este resultado es que aunque el modelo esté mal especificado y se generen errores de predicción grandes, se puede concluir aceptándolo como bien especificado porque se compara con una estimación de la varianza que sobrestima el verdadero valor de dicha varianza.

El objetivo de este trabajo, como ya hemos indicado, es el de proponer un contraste de estabilidad predictiva que evite este problema de sobrestimación de la varianza.

Para lograr este objetivo consideraremos un tercer modelo que escribiremos, para el período muestral con T observaciones, como:

$$y = W\delta + v_1 \tag{15}$$

en donde W es una matriz $T \times s$ de observaciones de s variables explicativas, δ es un vector de s parámetros y v_1 es un vector de T perturbaciones aleatorias con media cero y varianza $\sigma^2_{v_1}$.

A partir de este modelo definiremos un estimador de la varianza del PGD, sea éste M_1 ó M_2. El estimador lo escribiremos como:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{y' M_w y}{T - s} \tag{16}$$

en donde:

$$M_w = I - W(W'W)^{-1}W'$$

A continuación, en lugar del estadístico escrito en (10), para llevar a cabo el contraste de estabilidad predictiva, en este trabajo se propone utilizar el siguiente estadístico:

$$F' = \frac{e'_p[I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X'_p]^{-1}e_p}{T_1 \cdot \hat{\sigma}^2} \tag{17}$$

El modelo escrito en (15) debe garantizar que el estimador $\hat{\sigma}^2$ es independiente del numerador de (17) y que es un estimador insesgado de la varianza del verdadero PGD, sea éste M_1 ó M_2.

Veamos en las secciones siguientes la forma que toma este modelo según consideremos modelos anidados, no anidados o modelos VAR.

3. MODELOS ANIDADOS

En esta sección suponemos que M_1 está anidado en M_2 de forma que se puede escribir:

$$Z = [X, X_1] \tag{18}$$

en donde X_1 es una matriz de $T \times (q-k)$ observaciones de $(q-k)$ variables, siendo en este caso $s = q$.

Haciendo $\gamma' = [\beta', \gamma_1']$, el modelo M_2 escrito en (11) puede escribirse como:

$$y = X\beta + X_1\gamma_1 + v_1 \tag{19}$$

Este es el modelo que, para modelos anidados, se propone para estimar la varianza del PGD desconocido. Es decir, en esta sección suponemos que el modelo (15) es el modelo escrito en (19), por lo que: $W = [X, X_1]$.

Suponiendo homogeneidad de parámetros entre los dos períodos muestrales, el modelo escrito en (19) para el período con T_1 observaciones puede escribirse como:

$$y_p = X_p\beta + X_{1p}\gamma_1 + v_p \tag{20}$$

Si el PGD es M_1, a partir de (4) podemos escribir e_p como:

$$\begin{aligned} e_p &= X_p\beta + u_{1p} - X_p(X'X)^{-1}X'y = u_{1p} - X_p(X'X)^{-1}X'u_1 = \\ &= [I_{T_1}, -X_p(X'X)^{-1}X']u_1^* = Au_1^* \end{aligned} \tag{21}$$

en donde:

$$u_1^* = \begin{pmatrix} u_{1p} \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, también se tiene que:

$$M_w y = M_w u_1 = [0 \quad M_w]u_1^* = Bu_1^* \tag{22}$$

A partir de esta expresión se obtiene que:

$$Ey'M_w y = \sigma_1^2(T-s) \tag{23}$$

por lo que el estimador escrito en (16) es un estimador insesgado de σ_1^2. Por otra parte, como puede verse en Pesaran *et al.* (1985) se cumple que:

$$(I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X_p')^{-1} = (AA')^{-1}$$

por lo que el numerador de (7) puede escribirse como:

$$e_p'[I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X_p']^{-1}e_p = u_1^{*\prime}A'(AA')^{-1}Au_1^* \tag{24}$$

Por último, por cumplirse que $BA' = 0$ se tiene que el estimador escrito en (16) es independiente del numerador de (17).

Si el PGD es M_2 entonces el vector e_p puede escribirse como:

$$\begin{aligned} e_p &= X_p\beta + X_{1p}\gamma_1 + v_p - X_p\hat{\beta} = \\ &= X_p\beta + X_{1p}\gamma_1 + v_p - X_p\beta - X_p(X'X)^{-1}X'X_1\gamma_1 - X_p(X'X)^{-1}X'v_1 = \\ &= X_{1p}\gamma_1 + v_p - X_p(X'X)^{-1}X'X_1\gamma_1 - X_p(X'X)^{-1}X'v_1 = \\ &= X_{1p}\gamma_1 - X_p(X'X)^{-1}X'X_1\gamma_1 + Av^* \qquad (25) \end{aligned}$$

en donde:

$$v^* = \begin{pmatrix} v_p \\ v_1 \end{pmatrix}$$

A partir de esta expresión se ve que la esperanza de (25) es diferente de cero y que $e_p - Ee_p = Av^*$.

Por otra parte, se tiene que:

$$M_w y = M_w v_1 = Bv^* \qquad (26)$$

Por lo que, también en este caso, (16) será un estimador insesgado de la varianza del PGD y si se emplea este estimador en (10) en lugar de $\hat{\sigma}_1^2$, las expresiones en el numerador y denominador seran independientes.

4. MODELOS NO ANIDADOS

En este caso, el modelo escrito en (15) que se propone para estimar la varianza del PGD toma la forma siguiente:

$$y = X\beta + Z\gamma + v_1 \qquad (27)$$

en donde las matrices X y Z son las introducidas en los modelos escritos en (1) y (11), respectivamente. Por lo tanto:

$$W = [X, Z]$$

con $s = k + q$.

Si el PGD es M_1 entonces se tiene que:

$$e_p = X_p\beta + u_{1p} - X_p\beta - X_p(X'X)^{-1}X'u_1 = Au_1^* \qquad (28)$$

Por otra parte, también se tiene:

$$M_w y = M_w u_1 = Bu_1^* \qquad (29)$$

en donde:

$$B = [0, M_w]$$

Estos resultados muestran que el estimador de la varianza del PGD que aparece en el denominador de (17) es insesgado y que el numerador y denominador de dicha expresión son independientes entre sí.

Si el PGD es M_2 entonces el vector de errores de predicción de M_1 puede escribirse como:

$$\begin{aligned} e_p &= Z_p\gamma + u_{2p} - X_p(X'X)^{-1}X'Z\gamma - X_p(X'X)^{-1}X'u_2 = \\ &= Z_p\gamma - X_p(X'X)^{-1}X'Z\gamma + Au_2^* \end{aligned} \tag{30}$$

A partir de esta expresión se ve que $Ee_p \neq 0$ y que:

$$e_p - Ee_p = Au_2^* \tag{31}$$

Por otra parte, también se tiene que:

$$M_w y = M_w u_2 = Bu_2^* \tag{32}$$

por lo que $\hat{\sigma}^2$ será un estimador insesgado de σ_2^2 y (31) y (32) serán independientes.

Resultados análogos se obtienen cuando el modelo analizado es el M_2.

5. MODELOS VAR

En principio, la selección entre varios modelos VAR con diferentes órdenes no es más que un caso particular de elegir entre modelos anidados. Pero este tipo de modelos presenta unas peculiaridades que demandan un tratamiento diferenciado.

A lo largo de toda esta sección adoptaremos la notación utilizada por Lütkepohl (1991).

El modelo VAR de orden p lo escribiremos así:

$$y_t = \nu + A_1 y_{t-1} + \cdots + A_p y_{t-p} + u_t \tag{33}$$

en donde y_t es el vector $k \times 1$ de la observación $t-$ésima de las k variables, ν es un vector de $k \times 1$ constantes, las A_i son matrices $k \times k$ de coeficientes y u_t es un vector de k perturbaciones aleatorias con $Eu_t = 0$, $E(u_t\, u_t') = \Sigma_u$ y $E(u_t\, u_s') = 0$ para $s \neq t$.

Para contrastar la estabilidad predictiva, Lütkepohl (1989 y 1991) propone utilizar el siguiente estadístico:

(34)
$$\bar{\lambda}_{T_1} = \frac{T \sum_{i=1}^{T_1} \hat{u}'_{T+i} \hat{\Sigma}_u^{-1} \hat{u}_{T+i}}{(T + kp + 1)kT_1}$$

en donde:

(35)
$$\hat{\Sigma}_u = \frac{1}{T - kp - 1} \Sigma \hat{u}\hat{u}'_t$$

siendo:

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{\nu} - \hat{A}_1 y_{t-1} - \cdots - \hat{A}_p y_{t-p}$$

en donde $\hat{\nu}, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_p$ son los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros correspondientes.

Lütkepohl propone determinar la región crítica comparando el valor del estadístico escrito en (34) con el valor crítico correspondiente a la distribución F con $k \cdot T_1$ grados de libertad en el numerador y $T - kp - 1$ grados de libertad en el denominador, después de adoptar un nivel de significación.

Nosotros, en este trabajo, siguiendo con la línea comentada en las secciones anteriores proponemos estimar (35) utilizando el modelo VAR de mayor orden entre todos los que se comparan.

6. ESTUDIO DE MONTE CARLO

En este apartado se llevan a cabo una serie de experimentos de Monte Carlo con el objeto de analizar el comportamiento del estadístico de estabilidad predictiva, propuesto en este trabajo, como un contraste general de especificación en un marco en el que se trata de elegir entre dos modelos, ya sean anidados, no anidados o modelos VAR. El análisis se realiza comparando los resultados que se obtienen con el estadístico propuesto en este trabajo y los que se obtendrían en el caso de utilizar el estadístico normalmente utilizado en la literatura.

Siguiendo con el marco adoptado en las anteriores secciones, los experimentos realizados hacen referencia a:

- Modelos anidados
- Modelos no anidados
- Modelos VAR

6.1. Modelos anidados

Dentro de este apartado vamos a considerar dos casos; en el primero de ellos el PGD es el modelo amplio, ($k = 3$) mientras que, en el segundo, el PGD es el modelo más restringido ($k = 2$).

Los modelos que se han utilizado de forma sucesiva como PGD han sido los siguientes:

$$M_1: \quad y_t = 1 + x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{1t}$$

$$M_2: \quad y_t = 1 + \beta_1 x_{1t} + u_{2t}$$

donde β_i toma distintos valores: $\beta_i = (0.1, 0.5, 1)$, $(i = 1, 2)$.

La variable x_1 ha sido generada según una distribución normal independiente con media cero y varianza $V(x_1)$ donde ésta toma los siguientes valores:

$$V(x_1) = (0.01, 0.1, 0.5, 1)$$

Los valores de la perturbación aleatoria u_1 han sido generados según una distribución normal con media cero y varianza:

$$\sigma^2_{u_1} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i^2 \operatorname{Var}(x_i)\right] \left[1 - R^2\right]}{R^2} \tag{36}$$

donde k es el número de regresores del modelo y R^2 es el coeficiente de determinación del PGD, que lo variamos para analizar la influencia de éste en el estadístico de estabilidad predictiva:

$$R^2 = (0.7, 0.9, 0.99)$$

La variable x_{2t} se ha creado a partir de x_{1t}:

$$x_{2t} = \mu_1 x_{1t} + v_{1t} \tag{37}$$

donde: $\quad v_{1t} \sim \mathrm{N}(0, 1)$

y

$$\mu_1 = \frac{\rho}{[1 - \rho^2]^{1/2} [\operatorname{Var} x_{1t}]^{1/2}} \tag{38}$$

para asegurar que la correlación entre x_{1t} y x_{2t} es ρ. Los valores de ρ considerados han sido:

$$\rho^2 = (0.4, 0.6, 0.9)$$

Los modelos que se comparan son:

$$H_1: \quad y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{1t}$$
$$H_2: \quad y_t = \gamma_0 + \gamma_1 x_{1t} + u_{2t}$$

Para llevar a cabo esta comparación se calcula el contraste de estabilidad predictiva escrito en (17) de tres formas diferentes:

a) Sustituyendo la varianza del denominador por la supuesta en el PGD en el ejercicio de simulación.

b) Estimando la varianza a partir de cada modelo.

c) Estimando la varianza a partir del modelo menos restringido.

Los resultados de b) y c) sólo serán aceptables si tienden a concidir con los obtenidos bajo a).

Los experimentos realizados se han replicado 500 veces para tres tamaños muestrales:

$$T = (50, 100, 500) \quad \text{y} \quad T_1 = 20$$

Se han hecho pruebas con valores distintos de T_1 y los resultados eran similares.

CASO 1:

El PGD ha sido M_1. En la Tabla 1 presentamos algunos de los resultados obtenidos para las distintas combinaciones de los tamaños muestrales, varianza de x_{1t}, valores de β_2, del coeficiente de determinación del PGD (R_2) y del coeficiente de correlación entre x_{1t} y x_{2t}, (ρ). La interpretación de las últimas cinco columnas es la siguiente:

Ai: número de veces que se acepta la hipótesis de estabilidad predictiva del modelo bajo H_i utilizando la varianza real ($i = 1,2$).

Aij: número de veces que se acepta la hipótesis de estabilidad predictiva del modelo en H_i estimando la varianza con el modelo H_j ($i,j = 1,2$).

Como puede observarse en la Tabla 1, estimando σ^2 con el modelo amplio (H_1) (columnas A11 y A21) obtenemos resultados similares a los que se obtienen utilizando la varianza real (columnas A1 y A2), es decir, hay coincidencia entre c) y a). Por el contrario, utilizando la varianza estimada del modelo restringido (H_2) (columna A22) se tiende a aceptar la hipótesis de estabilidad del propio modelo (H_2), cuando con la varianza real (columna A2) se rechazaría. Puede verse también que cuando β_2 es pequeño, por ser los dos modelos parecidos, se tiende a aceptar la estabilidad predictiva en los dos modelos.

Tabla 1

Modelos anidados. PGD: $y_t = 1 + x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + u_{1t}$

T	$v(x_1)$	β_2	R^2	ρ	A1	A2	A11	A21	A22
50	0.01	0.1	0.90	0.6	476	3	474	18	500
50	0.01	0.1	0.99	0.6	480	0	471	0	500
50	0.01	1	0.90	0.6	479	0	484	0	500
50	0.01	1	0.99	0.6	480	0	477	0	500
50	1	0.1	0.90	0.6	480	462	485	474	479
50	1	0.1	0.99	0.6	473	86	474	208	441
50	1	1	0.90	0.6	467	0	471	6	424
50	1	1	0.99	0.6	481	0	474	0	459
100	0.01	0.1	0.90	0.6	474	0	477	0	500
100	0.01	0.1	0.99	0.6	478	0	480	0	500
100	0.01	1	0.90	0.6	479	0	472	0	500
100	0.01	1	0.99	0.6	483	0	478	0	500
100	1	0.1	0.90	0.6	470	464	471	458	471
100	1	0.1	0.99	0.6	476	254	469	290	496
100	1	1	0.90	0.6	478	17	478	37	499
100	1	1	0.99	0.6	468	0	461	0	500
500	0.01	0.1	0.90	0.6	468	0	468	0	250
500	0.01	0.1	0.99	0.6	474	0	473	0	24
500	0.01	1	0.90	0.6	479	0	478	0	174
500	0.01	1	0.99	0.6	470	0	472	0	3
500	1	0.1	0.90	0.6	475	456	468	455	477
500	1	0.1	0.99	0.6	474	165	475	167	497
500	1	1	0.90	0.6	480	1	476	2	499
500	1	1	0.99	0.6	475	0	473	0	500

Tabla 2

Modelos anidados. PGD: $y_t = 1 + \beta_1 x_{1t} + u_{2t}$

T	$v(x_1)$	β_1	R^2	ρ	A1	A2	A22	A21	A11
50	0.01	0.1	0.90	0.6	477	473	479	481	480
50	0.01	0.1	0.99	0.6	477	476	480	477	477
50	0.01	1	0.90	0.6	484	484	479	481	478
50	0.01	1	0.99	0.6	471	471	476	478	479
50	1	0.1	0.90	0.6	478	480	476	474	474
50	1	0.1	0.99	0.6	476	476	479	477	476
50	1	1	0.90	0.6	474	474	477	475	474
50	1	1	0.99	0.6	475	474	466	468	467
100	0.01	0.1	0.90	0.6	475	475	475	475	474
100	0.01	0.1	0.99	0.6	469	470	473	473	473
100	0.01	1	0.90	0.6	477	477	477	479	477
100	0.01	1	0.99	0.6	469	469	472	470	470
100	1	0.1	0.90	0.6	469	469	476	474	477
100	1	0.1	0.99	0.6	477	474	478	476	478
100	1	1	0.90	0.6	468	468	476	476	477
100	1	1	0.99	0.6	482	480	474	475	472
500	0.01	0.1	0.90	0.6	474	474	475	474	472
500	0.01	0.1	0.99	0.6	471	471	471	472	472
500	0.01	1	0.90	0.6	480	478	480	481	483
500	0.01	1	0.99	0.6	481	480	474	474	473
500	1	0.1	0.90	0.6	475	475	476	476	477
500	1	0.1	0.99	0.6	478	478	477	478	478
500	1	1	0.90	0.6	476	475	478	479	478
500	1	1	0.99	0.6	472	470	475	475	472

CASO 2

En este caso el PGD es M_2, con $\beta_1 = (0.1, 0.5, 1)$. Los resultados obtenidos aparecen en la Tabla 2.

A partir de esta Tabla se puede concluir que cuando genera el modelo restringido, el número de veces que se acepta la hipótesis de estabilidad predictiva para cada modelo, cuando se utiliza la verdadera varianza del PGD, es muy similar al que resulta cuando se utiliza el estimador de dicha varianza definido a partir del modelo amplio, aunque para este caso también son similares los resultados obtenidos a partir de la estimación en el modelo restringido.

En definitiva, como en la práctica real no sabemos cuál es el proceso generador de datos, parece lógico utilizar como estimador de σ^2, el estimador proporcionado por el modelo amplio, ya que de las dos tablas se deduce que utilizando esta varianza estimada se obtienen resultados similares a los que se obtendrían si conociésemos la varianza real.

Se observa también que si para el modelo restringido se utiliza la varianza estimada por el propio modelo, se tiende a aceptar la hipótesis de estabilidad predictiva en la mayor parte de los casos cuando dicho modelo no es el PGD.

6.2. Modelos no anidados

Con el objeto de analizar el comportamiento del nuevo estadístico de estabilidad predictiva en modelos no anidados, se han realizado los experimentos considerando casos en que el PGD tiene un número mayor, igual o menor de parámetros que el modelo alternativo.

Las variables empleadas han sido generadas de forma similar a las utilizadas en el caso de modelos anidados. Para este tipo de modelos, hemos distinguido los tres casos mencionados y debido a que las conclusiones son similares para los tres, aquí presentamos sólamente el caso 1 en el que los dos modelos tienen el mismo número de regresores.

En este caso suponemos que el PGD y el modelo alternativo tienen el mismo número de variables explicativas. El PGD que suponemos es:

$$\text{PGD:} \quad M1: \quad y_t = 1 + \beta_1 x_t + u_{1t}$$

y los modelos que se comparan son:

$$H_1: \quad y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_{1t}$$

$$H_2: \quad y_t = \gamma_0 + \gamma_1 z_t + u_{2t}$$

donde:

$$x_t \sim \mathrm{N}(0, v(x))$$

y

(39) $$z_t = \mu x_t + v_{1t} \qquad \text{con} \quad v_{1t} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

donde: $$\mu = \frac{\rho}{[1-\rho^2]^{1/2}[\mathrm{Var}\, x_t]^{1/2}}$$

ρ mide la correlación entre x_t y z_t.

En este caso, consideramos una nueva opción que sustituye a la c) anterior consistente en sustituir la varianza por una estimación obtenida a partir de un modelo amplio del que son casos particulares los dos que se comparan. Este modelo amplio lo podemos escribir como:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 z_t + v_t$$

Como en el caso de modelos anidados, entre las opciones b) y c) será aceptable aquélla cuyos resultados se aproximen a los de a).

Los experimentos se han realizado para distinas combinaciones de la varianza de $x_t, v(x)$, de valores de β_1, del coeficiente de determinación del PGD (R^2) y para distintas correlaciones entre x_t y z_t (ρ). En la Tabla 3 aparecen algunos de los resultados obtenidos, donde las 6 últimas columnas se interpretan de la siguiente forma:

Ai: número de aceptaciones de la hipótesis de estabilidad predictiva en el modelo H_i para $i = 1,2$, utilizando la varianza real σ^2.

Aij: número de aceptaciones de la hipótesis de estabilidad predictiva en el modelo H_i utilizando la varianza estimada por el modelo H_j.

AiA: número de aceptaciones de la hipótesis de estabilidad predictiva utilizando, para estimar la varianza, el modelo amplio.

La conclusión que se deriva de esta tabla es clara: hay coincidencia de resultados utilizando la varianza real y estimando dicha varianza con el modelo amplio; también coinciden los datos si se estima la varianza con el modelo que es el PGD pero no, si se estima utilizando el modelo que no ha generado los datos.

Debido a que en la realidad no se conoce el PGD, sería aconsejable utilizar la varianza estimada del modelo que anide a los dos modelos no anidados, ya que utilizando para cada modelo la varianza estimada por el propio modelo se tiende a aceptar en un porcentaje alto de veces la hipótesis de estabilidad predictiva para el modelo H_2, cuando utilizando la varianza real no se aceptaría casi nunca.

Tabla 3

Modelos no anidados. PGD: $y_t = 1 + \beta_1 x_t + u_{1t}$

T	$v(x)$	ρ	R^2	β_1	A1	A2	A11	A22	A1A	A2A
50	0.01	0.4	0.90	1	478	0	474	500	475	0
50	0.01	0.4	0.99	1	471	0	471	500	472	0
50	0.01	0.9	0.90	1	476	0	480	500	482	0
50	0.01	0.9	0.99	1	468	0	481	500	481	0
50	1	0.4	0.90	1	476	0	473	500	475	0
50	1	0.4	0.99	1	476	0	474	500	475	0
50	1	0.9	0.90	1	461	229	477	481	477	325
50	1	0.9	0.99	1	472	0	471	500	473	0
100	0.01	0.4	0.90	1	479	0	471	458	471	0
100	0.01	0.4	0.99	1	481	0	479	500	480	0
100	0.01	0.9	0.90	1	477	0	476	491	477	0
100	0.01	0.9	0.99	1	478	0	476	500	477	0
100	1	0.4	0.90	1	470	0	468	500	469	0
100	1	0.4	0.99	1	477	0	467	500	467	0
100	1	0.9	0.90	1	478	174	484	487	483	237
100	1	0.9	0.99	1	475	0	475	500	473	0
500	0.01	0.4	0.90	1	471	0	472	429	472	0
500	0.01	0.4	0.99	1	470	0	468	494	468	0
500	0.01	0.9	0.90	1	471	0	474	490	474	0
500	0.01	0.9	0.99	1	476	0	475	500	474	0
500	1	0.4	0.90	1	467	0	473	499	473	0
500	1	0.4	0.99	1	479	0	481	500	482	0
500	1	0.9	0.90	1	472	99	476	462	476	96
500	1	0.9	0.99	1	469	0	472	495	472	0

6.3. Modelos VAR

Dentro de este tipo de modelos vamos a considerar dos casos atendiendo a los órdenes del PGD y del modelo de la hipótesis alternativa, aunque en este trabajo sólo presentamos los resultados que se refieren al caso en el que el PGD es de orden menor que el del modelo alternativo.

Comenzaremos considerando el caso en el que el PGD es un VAR(2) siendo el modelo alternativo, un VAR(1). En concreto, el PGD para dos variables, que adoptamos es el siguiente:

$$M_1 : \quad (\text{PGD})\, y_t = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} y_{t-1} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} y_{t-2} + u_t$$

donde:

$$y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix}; \quad u_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

con $\quad u_t \sim \mathrm{N}[0, \Sigma]$

y $\quad \Sigma = \begin{bmatrix} v(u_1) & 0 \\ 0 & v(u_2) \end{bmatrix}$

Los modelos que se comparan son:

$$H_1 : \quad y_t = \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{111} & \beta_{121} \\ \beta_{211} & \beta_{221} \end{bmatrix} y_{t-1} + \begin{bmatrix} \beta_{112} & \beta_{122} \\ \beta_{212} & \beta_{222} \end{bmatrix} y_{t-2} + u_t$$

$$H_2 : \quad y_t = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{111} & \gamma_{121} \\ \gamma_{211} & \gamma_{221} \end{bmatrix} y_{t-1} + v_t$$

y los coeficientes a, b, c toman cada uno de ellos valores distintos dentro de los límites que hacen que el proceso sea estacionario.

$$\begin{aligned} a &= (-0.8, 0.2) \\ b &= (-0.8, 0.5) \\ c &= (0.5, 1) \end{aligned}$$

En los experimentos realizados también se han considerado varianzas de la perturbación del PGD, $v(u_{1t})$ y $v(u_{2t})$ distintas:

$$v(u_{it}) = (0.01, 5) \quad (i = 1, 2)$$

En la Tabla 4 se indica el número de veces que se acepta la hipótesis de estabilidad predictiva para cada modelo en las 500 réplicas realizadas por cada experimento. En esta tabla, al igual que en las anteriores, mostramos algunos de los resultados que se han obtenido para todas las combinaciones de tamaño muestral, $T = (50, 100, 500)$, varianzas de las perturbaciones $v(u_{it})$ $i = 1,2$ y los distintos valores de los coeficientes del PGD, a, b y c.

Los resultados para los distintos valores de c son similares, por lo que aquí presentamos únicamente los resultados obtenidos para $c = 1$. Como los resultados para $T = 50$ y $T = 100$ son similares, presentamos únicamente los de $T = 100$ y $T = 500$ ya que la presentación de todos los resultados aportaría poca información adicional.

La interpretación de las cinco últimas columnas es la siguiente:

Ai: número de veces que se acepta la hipótesis de estabilidad predictiva en el modelo H_i utilizando la matriz de varianzas y covarianzas conocida del PGD $(i = 1,2)$.

Ai1: número de aceptaciones de la hipótesis de estabilidad predictiva en el modelo H_i $(i = 1,2)$, cuando se estima la matriz de varianzas y covarianzas con el modelo VAR(2).

A22: número de veces que se acepta la hipótesis de estabilidad predictiva del modelo H_2 cuando se estima la matriz de varianzas y covarianzas con el modelo H_2, VAR(1).

Como puede verse en la Tabla 4, la conclusión a la que se llega es que utilizando la estimación de la matriz de varianzas del modelo amplio, VAR(2), se tiende a aceptar la hipótesis de estabilidad predictiva, para cada modelo, en un número de veces similar al que se aceptaría utilizando la varianza real. En cambio, utilizando la matriz de varianzas y covarianzas estimada por el propio modelo, para el modelo VAR(1) se tiende a aceptar la hipótesis de estabilidad predictiva en una proporción de veces mayor de la que se aceptaría utilizando la varianza real.

El segundo de los casos que hemos analizado es el de un VAR (2) frente a un VAR (4) y debido a que la conclusión es la misma que en el primer caso, no presentamos los resultados para no ampliar el trabajo.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha demostrado que una versión corregida del contraste de estabilidad predictiva puede ser un instrumento muy útil en un proceso para elegir entre dos modelos econométricos.

Tabla 4

$$\textit{Modelos VAR. PGD: } y_t = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.03 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} y_{t-1} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} y_{t-2} + u_t$$

T	$v(u_{1t})$	$v(u_{2t})$	a	b	c	A1	A2	A11	A21	A22
100	0.01	0.01	−0.8	−0.8	1	467	0	468	0	116
100	0.01	0.01	−0.8	0.5	1	461	12	458	15	224
100	0.01	0.01	0.2	−0.8	1	469	6	463	12	283
100	0.01	0.01	0.2	0.5	1	450	58	446	69	211
100	0.01	5	−0.8	−0.8	1	469	3	468	4	219
100	0.01	5	−0.8	0.5	1	463	20	459	34	306
100	0.01	5	0.2	−0.8	1	455	41	452	59	311
100	0.01	5	0.2	0.5	1	442	251	451	264	352
100	5	0.01	−0.8	−0.8	1	457	0	461	0	89
100	5	0.01	−0.8	0.5	1	461	0	450	0	72
100	5	0.01	0.2	−0.8	1	459	0	456	0	258
100	5	0.01	0.2	0.5	1	444	0	450	0	71
500	5	5	−0.8	−0.8	1	466	0	465	0	99
500	5	5	−0.8	0.5	1	467	11	468	13	219
500	5	5	0.2	−0.8	1	473	7	470	11	272
500	5	5	0.2	0.5	1	459	52	462	64	233
500	0.01	0.01	−0.8	−0.8	1	480	0	482	0	101
500	0.01	0.01	−0.8	0.5	1	483	9	480	9	205
500	0.01	0.01	0.2	−0.8	1	471	13	473	13	280
500	0.01	0.01	0.2	0.5	1	477	55	478	52	203
500	0.01	5	−0.8	−0.8	1	477	1	481	1	205
500	0.01	5	−0.8	0.5	1	474	36	473	39	303
500	0.01	5	0.2	−0.8	1	465	45	468	48	258
500	0.01	5	0.2	0.5	1	472	273	471	273	381
500	5	0.01	−0.8	−0.8	1	473	0	477	0	102
500	5	0.01	−0.8	0.5	1	480	0	479	0	49
500	5	0.01	0.2	−0.8	1	478	0	477	0	245
500	5	0.01	0.2	0.5	1	464	0	460	0	71
500	5	5	−0.8	−0.8	1	472	0	477	0	90
500	5	5	−0.8	0.5	1	476	10	474	11	201
500	5	5	0.2	−0.8	1	477	14	473	15	273
500	5	5	0.2	0.5	1	473	50	476	55	195

La corrección hace referencia al estimador de la varianza de las perturbaciones que aparece en el denominador del estadístico que se usa para llevar a cabo el contraste de estabilidad predictiva.

La bondad de la corrección que se propone queda demostrada en el trabajo por la coincidencia que se produce entre los resultados obtenidos con el estadístico corregido, con los que se obtendrían conociendo la verdadera varianza de la perturbación del proceso. Esta coincidencia no tiene lugar si se utiliza el procedimiento habitual que aparece en los textos.

La demostración del resultado se hace mediante procedimientos analíticos y mediante un ejercicio de simulación para tres tipos de modelos diferentes: anidados, no anidados y VAR. En todos los casos la evidencia es clara a favor de la propuesta que se hace en el trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] **Chow, G.C.** (1960). «Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions». *Econometrica*, **28**, 591–603.

[2] **Dhrymes, P.J., E.P. Howrey, S.H. Hymans, H.T. Shapiro** and ***V. Zarnowitz*** (1972). «Criteria for evaluation of econometric models». *Annals of Economic and social measurement*, **1**, 291–324.

[3] **Fisher, F.M.** (1970). «Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions: an expository note». *Econometrica*, **38**, 361–366.

[4] **Lütkepohl, H.** (1989). «Prediction tests for structural stability of multiple time series». *Journal of Business & Economic Statistics*, **7**, 129–135.

[5] **Lütkepohl, H.** (1991). *Introduction to multiple time series analysis*. Berlin. Springer-Verlag.

[6] **Pesaran, M.H., R.P. Smith** and **J.S. Teo** (1985). «Testing for structural stability and predictive failure: a review». *The Manchester School*, **53**, 280–295.

ENGLISH SUMMARY

THE PREDICTIVE STABILITY TEST TO CHOOSE BETWEEN ECONOMETRIC MODELS

ANTONIO AZNAR GRASA

Mª ISABEL AYUDA BOSQUE*

Departamento de Análisis Económico

In this paper we consider the predictive stability test as a specification test in a framework in which we try to choose between two models. We propose a modification in the habitual test that consists of replace the variance of the model, in the denominator, by the estimated variance of the less restricted model, in nested models or VAR models, or by the estimated variance of the one general model that nested the two models in the case of non-nested models.

Keywords: Predictive stability, Selection, Econometric models.

---

* Antonio Aznar Grasa y Mª Isabel Ayuda Bosque. Departamento de Análisis Económico. Facultad de CC. EE. y EE. Doctor Cerrada 1. 50005 ZARAGOZA. Fax: 761770.

– Received june 1995.

– Accepted november 1995.

Testing for structural stability is a standard exercise in econometric analysis and has become an established part of the econometrics tool box, see for example, Chow (1960), Fisher (1970), Dhrymes *et al.* (1972) and Pesaran *et al.* (1985).

Most of these tests can also be regarded as a measure of how a model estimated from data from period 1 adequately predicts the values of the dependent variable in period 2, conditional upon the observed values of the regressors. In this sense, they are often called tests of predictive failure.

These tests are based on the values taken by a quadratic form of the vector of errors of prediction, weighted by the elements of the inverse of the variance-covariance matrix of that vector. In order to have an operative version of this quadratic form, this matrix has to be estimated. The standard practise has been to estimate it by using the model that is tested.

In this paper and within a framework in which two models are compared, we propose to estimate that matrix by using a general model, in three different situations, depending on the models that we compare are nested, non-nested or VAR models. The proposed test is:

$$F = e_p'[I_{T_1} + X_p(X'X)^{-1}X_p']^{-1}e_p/T_1 \cdot \sigma^{+2}$$

where σ^{+2} is the estimated variance in a general model and T_1 is the number of extrasample observations.

After two sections where we introduce the paper and we present the standard models and the test, respectively, we derive the form of this test for nested models (Section 3) where σ^{+2} is the estimated variance of the less restricted model. In section 4 we derive the form of this test when we compare two non-nested models; in this case, σ^{+2} is the estimated variance derived from a general model which nests the two models. In section 5 we deal with VAR models. For each of the three type of models we show that this corrected stability test follows an F distribution. The evidence presented in the last section of the paper from the Monte-Carlo experiment confirms the analytical results derived in sections 3-5 and proves the usefulness of the new proposal.

In this experiment we calculate the number the times, in 500 replications, that each of three alternative predictive stability tests choose one of the two compared models. The three criteria differ on how the variance of the predictive stability test expresion is estimated, that is:

a) Substituting the variance by the known variance of the data generating process assumed in the Monte Carlo experiments.

b) Estimating the variance with each model.

c) Estimating the variance with the less restrictive model, in the case of nested models, or a general model that nests the two compared models, in the case of non-nested models.

All the comparisons show that, using the general model to estimate the variance, the results obtained do not differ from those one would obtain in the hypothetical case where the variance is known.