

UN CONTRASTE EN MODELOS DE GERMEN Y GRANO

PLAZA DELGADO, M.* y MONTES SUAY, F.†

El trabajo presenta un test de Montecarlo, basado en el área comprendida en un intervalo entre las curvas de dilatación y erosión, para contrastar el modelo booleano frente a otros modelos de germen y grano con modelos de gérmenes de tipo de agrupación o repulsión pero manteniendo la distribución del grano.

A Test in Germ-Grain Models.

Keywords: Inference on Boolean models, germ-grain models.

1. MODELO BOOLEANO Y ALTERNATIVAS

El modelo booleano es un conjunto aleatorio que se inscribe en el contexto más general de lo que Hanisch (1981) denomina modelos de germen y grano. Un modelo de germen y grano en \mathbb{R}^2 es un conjunto aleatorio cerrado X de la forma

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (x_n + X_n)$$

* PLAZA DELGADO, M.: Universidad de Castilla-La Mancha.

† MONTES SUAY, F.: Universitat de València.

-Article rebut el maig de 1992.

-Acceptat l'octubre de 1992.

siendo $\{x_i\}$ un proceso puntual y $\{X_i\}$ una sucesión de compactos ambos en \mathbb{R}^2 .

Un modelo booleano $X = (X_0, \lambda)$ es un modelo de germen y grano donde $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$ es un proceso puntual de Poisson estacionario de intensidad λ , y $\{X_1, X_2, \dots\}$ es una sucesión de compactos idéntica e independientemente distribuidos como X_0 , independientes de Φ , y tales que $E(\nu_2(X_0 \oplus \check{K})) < +\infty$ para todo compacto K . Se indica por \check{K} el conjunto simétrico de K respecto del origen, y por ν_2 la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 .

Las razones del amplio uso que se ha hecho, y que se hace, del modelo booleano son su flexibilidad, sencillez, manejabilidad en cuanto a la expresión de sus características básicas, y utilidad tanto para describir imágenes bifásicas como, a veces, explicar su génesis (Stoyan, Kendall y Mecke, 1987, pág. 68).

El contraste sobre una imagen bifásica de un modelo booleano depende de las alternativas que se consideren: otros valores de los parámetros sin alterar las familias de distribución del germen y del grano, la distribución de los gérmenes sin cambiar las demás características, la distribución de los granos, etc. Pero las alternativas más naturales, y también las más sencillas, al modelo booleano se derivan de alterar las hipótesis relativas al proceso de gérmenes asociado, manteniendo idénticas todas las demás características del modelo. No obstante, el problema de contraste que origina dicho cambio no puede tratarse como un problema típico de modelo en procesos puntuales, ya que el proceso de los gérmenes x_i estará oculto, en las imágenes bifásicas, por los granos X_i que se “apoyan” en ellos.

Nos proponemos en este artículo construir un procedimiento de contraste para el modelo booleano que nos permita obtener cierta orientación alternativa respecto de la regularidad del proceso puntual de los gérmenes en un modelo de germen y grano. Para ello, por sencillez y flexibilidad, hemos tomado como alternativas modelos de agregación y de repulsión, también llamados respectivamente cluster de Poisson y hard-core (Mattern 1960, Stoyan, Kendall y Mecke, 1985). En un proceso puntual de agregación el centro de los grupos de puntos sigue un proceso puntual de Poisson con intensidad λ ; el número de puntos en cada grupo sigue una distribución de Poisson de media μ , y están distribuidos uniformemente en una bola de radio R con centro en el centro del grupo. En el proceso puntual de repulsión elegido como alternativa se parte de un proceso puntual de Poisson de intensidad λ , del que se suprimen ordenadamente los puntos que distan menos que h de alguno de los anteriores no rechazado. Las figuras siguientes son simulaciones en el cuadrado unidad de un proceso puntual estacionario de Poisson con $\lambda = 50$; de un proceso puntual de agregación con

$\lambda = 25, \mu = 2$ y $R = 0.025$, figura 2; y un proceso puntual de repulsión con $\lambda = 200$ y $h = 0.1$ en la figura 3.

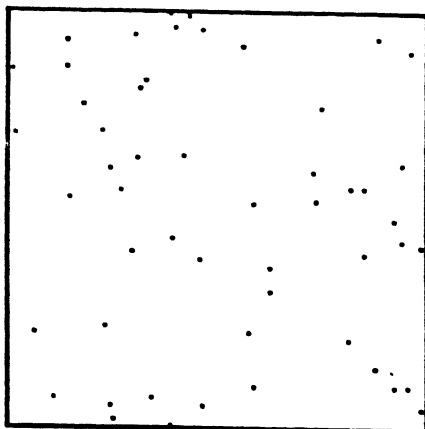


Figura 1.
Realización de un proceso de Poisson con $\lambda = 50$.

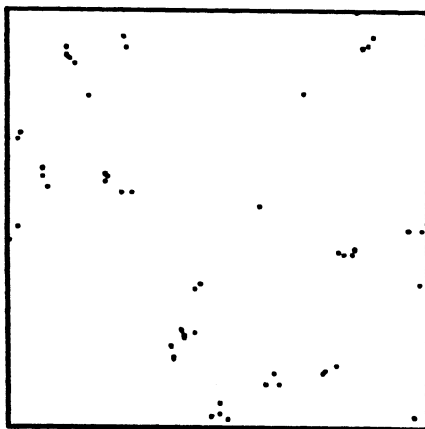


Figura 2.
Realización de un proceso puntual de agrupación con $\lambda = 25$ y $\mu = 2$.

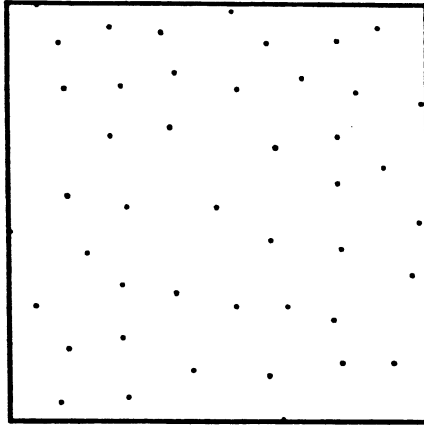


Figura 3.

Realización de un proceso puntual de repulsión con $\lambda = 200$ y $h = 0.1$.

2. ESTIMACIÓN Y CONTRASTE EN MODELOS BOOLEANOS

Los problemas generales asociados al uso de los modelos estadísticos son la estimación de los parámetros y el contraste del modelo. Para la estimación paramétrica en modelos booleanos en el plano, esencialmente modelos de bolas, se dispone fundamentalmente de los métodos propuestos en Dupač (1980), Serra (1982), Kellerer (1985) y Ayala, Ferrándiz y Montes (1989b).

Los principales métodos de contraste para este tipo de modelos booleanos planos son los que se recogen a continuación:

- a) En Diggle (1981) se utiliza la función de distribución de contacto esférico teórica, $H_S(x)$, y la estimada sobre una figura objeto de estudio $\hat{H}_S(x)$ para calcular

$$T_0 = \int_0^a (H_S(x) - \hat{H}_S(x))^2 dx$$

con el fin de determinar el rango de T_0 entre 99 valores análogos relativos a otras tantas simulaciones realizadas según el modelo que se quiere contrastar. La distribución de contacto esférico de un conjunto aleatorio X es la función de distribución de la distancia de un punto elegido al azar de fuera de X al punto más próximo de X . En general, para cada elemento estructurante B , un compacto que contenga al origen, la distribución de contacto se define como:

$$H_B(r) = 1 - \frac{P(X \cap rB = \emptyset, o \notin X)}{(1-p)} \quad \text{para } r \geq 0$$

con p la fracción de volumen de X . Para la distribución de contacto esférico B es la bola unidad.

- b) En Serra (1982) se propone o bien considerar la función $g(x) = -\log(1 - \hat{H}_S(x))$, o bien $h(x) = -\log(\hat{Q}(xS_0))$, donde $\hat{Q}(xS_0)$ es el estimador de la probabilidad de que el conjunto xS_0 esté en el poro, y tratar de comparar la una ó la otra, con la forma de un polinomio cuadrático, que es la clase de función que les correspondería a g o a h en un modelo booleano. En Hall (1988) se apuntan para el método que utiliza $h(x)$ las dificultades de que se desconoce la varianza de $\hat{Q}(xS_0)$, de que existen altas correlaciones entre los valores estimados en una misma imagen de $\hat{Q}(xS_0)$ para distintos valores de x , y de que $h(x)$ no depende de la distribución del grano sino sólo a través de su área y de su perímetro medios.
- c) En Ripley (1986, 1988) se sugiere la utilización de un método de contraste, que se aplica a la imagen del brezo de Diggle (1981), consistente en comparar la figura que componen las curvas de dilatación, erosión, apertura y clausura estimadas sobre la imagen observada con la figura que componen las mismas curvas estimadas sobre una realización simulada según los parámetros estimados sobre la imagen a estudiar.

El estudio de estos métodos sugiere las siguientes consideraciones:

- a) la estrecha relación entre los métodos de estimación y contraste,
- b) los contrastes presentados son prácticamente visuales, excepto en Diggle (1981) que se da un resultado cuantificado en términos de rango,
- c) ninguno de los métodos da una orientación sobre el sentido de la modificación del modelo cuando éste sea inadecuado a la imagen observada.

A la vista de estas consideraciones la motivación de nuestro trabajo es el interés por obtener un contraste cuantificado que además pudiera sugerir el sentido de la alteración más conveniente en las características del proceso de los gérmenes de un modelo para mejorar la adecuación a una figura real dada.

3. EL CONTRASTE DEL ÁREA ENTRE LAS CURVAS DE DILATACIÓN Y EROSIÓN

En Ripley (1988) se utilizan las funciones de dilatación, clausura, apertura y erosión para mostrar de manera visual la falta de adecuación entre la imagen del brezo de Diggle y una realización simulada según los parámetros estimados del modelo correspondiente. Este procedimiento puede usarse para distinguir entre realizaciones de un modelo booleano y de ejemplos de las alternativas antes consideradas. Esto es lo que ocurre en efecto con las realizaciones siguientes que pertenecen respectivamente a un modelo booleano con $\lambda = 100$ y grano circular de radio uniforme en $[0, 0.1]$ (figura 4), a un modelo de germen y grano donde los gérmenes forman un proceso puntual de agregación de parámetros $\lambda = 46, \mu = 3$ y $R = 0.1$, y la misma distribución de grano (figura 5), y a un modelo de germen y grano con el proceso puntual de los gérmenes de repulsión con $\lambda = 320$, y $h = 0.085$, y una distribución de grano igual a las anteriores (figura 6).

En efecto, a estas figuras corresponde una fracción de vacío aproximada de 0.40 y los patrones de regularidad que en el apartado anterior observábamos en los distintos procesos considerados se manifiestan en estas figuras en la desigual distribución de zonas blancas y negras. Este comportamiento diferencial

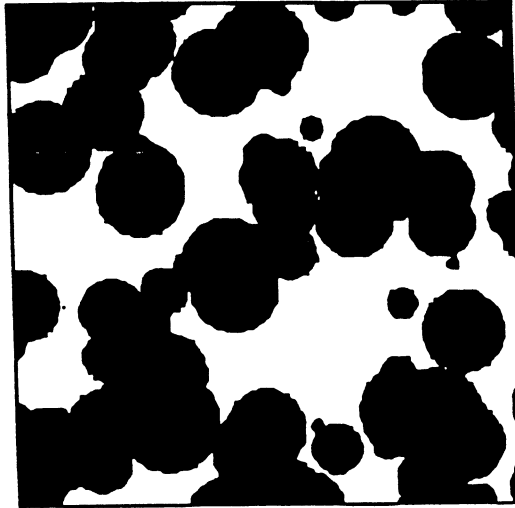


Figura 4.

Modelo Booleano con $\lambda = 100$ y grano circular de radio uniforme en el intervalo $[0, 0.1]$.



Figura 5.

Modelo de germen-grano con germen un proceso de agrupación con $\lambda = 46$ y $\mu = 3$, y grano circular de radio uniforme en el intervalo $[0, 0.1]$.

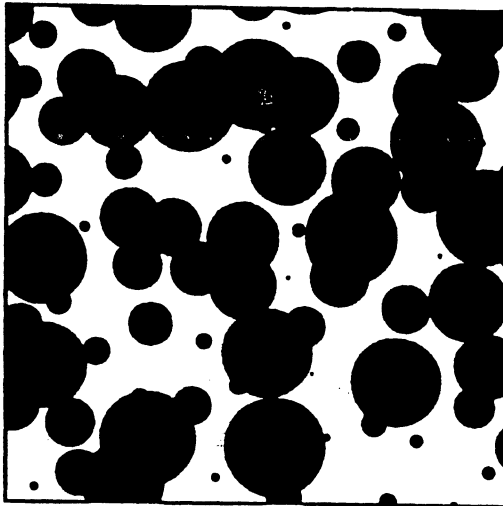


Figura 6.

Modelo de germen-grano con germen un proceso de repulsión con $\lambda = 320$, $h = 0.085$ y grano circular de radio uniforme en el intervalo $[0, 0.1]$.

queda también reflejado en la representación de los funcionales resumen, a saber, dilatación, clausura, apertura y erosión: $d_B(x)$, $c_B(x)$, $o_B(x)$ y $e_B(x)$ de las figuras 4, 5 y 6 que son respectivamente las figuras 7, 8 y 9, donde se toma como B el hexágono elemental de la trama de digitalización, y x es un número natural. Estos funcionales se estiman respectivamente por:

$$\begin{aligned} d_B(x) &= \text{fra vol}(X \oplus x\check{B}) \\ c_B(x) &= \text{fra vol}((X \oplus x\check{B}) \ominus xB) \\ o_B(x) &= \text{fra vol}((X \ominus x\check{B}) \oplus xB) \\ e_B(x) &= \text{fra vol}(X \ominus x\check{B}) \end{aligned}$$

Definiendo como es usual

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x + y: x \in A, y \in B\} = \bigcup_{y \in B} A_y = \bigcup_{x \in A} B_x \\ A \ominus B &= \bigcap_{y \in B} A_y = (A^C \oplus B)^C \end{aligned}$$

El diferente comportamiento de los distintos modelos en cuanto a la rapidez de alcanzar sus valores extremos, sugiere que las variables que se recogen en la tabla 1, derivadas todas ellas de los funcionales resumen de Ripley, pueden servir de punto de partida en el problema de diseñar un contraste que permita distinguir entre los comportamientos de los modelos propuestos.

Tabla 1

Variable	Significado de la variable
$a1$	área entre las curvas $d_B(r)$ y $c_B(r)$
$a2$	área entre las curvas $o_B(r)$ y $e_B(r)$
$a3$	área entre las curvas $d_B(r)$ y $e_B(r)$
$dl99$	menor valor de r tal que $d_B(r) \geq 0.99$
$cl99$	menor valor de r tal que $c_B(r) \geq 0.99$
$dl95$	menor valor de r tal que $d_B(r) \geq 0.95$
$cl95$	menor valor de r tal que $c_B(r) \geq 0.95$
$er01$	menor valor de r tal que $e_B(r) \leq 0.01$
$op01$	menor valor de r tal que $o_B(r) \leq 0.01$
$er05$	menor valor de r tal que $e_B(r) \leq 0.05$
$op05$	menor valor de r tal que $o_B(r) \leq 0.05$

En Plaza (1991) se realiza un estudio exhaustivo de la capacidad que estas variables tienen para discriminar entre los tres modelos, utilizando para ello 50 realizaciones aleatorias de cada uno de los modelos que dan lugar a las figuras 4, 5 y 6. El análisis discriminante mostró que la variable α_3 , área comprendida en un intervalo entre las curvas de dilatación y erosión, presentaba por si sola una capacidad discriminante similar al conjunto de las 11. La tabla 2 pone de manifiesto este hecho.

Tabla 2

grupo	casos	clasificación con las 11 var			clasificación con α_3		
		MB	Cluster	Hard	MB	Cluster	Hard
MB	50	42 84%	1 2%	7 14%	38 76%	2 4%	10 20%
Cluster	50	6 12%	44 88%	0 0%	8 16%	42 84%	0 0%
Hard	50	3 6%	0 0%	47 94%	6 12%	0 0%	44 88%
Bien clasificados		88.67%			82.67%		

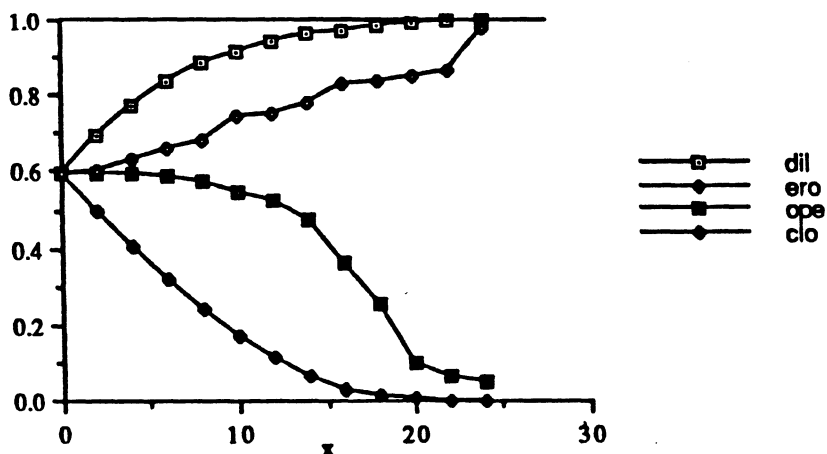


Figura 7.

Representación de los funcionales resumen correspondientes a la figura 4.

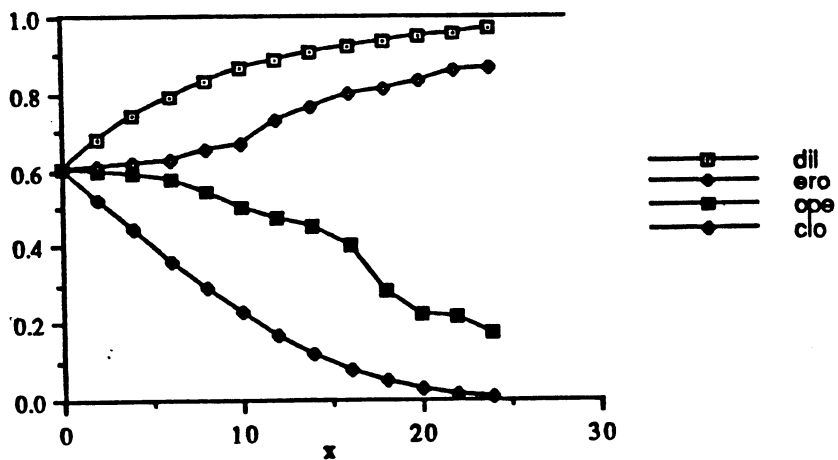


Figura 8.

Representación de los funcionales resumen correspondientes a la figura 5.

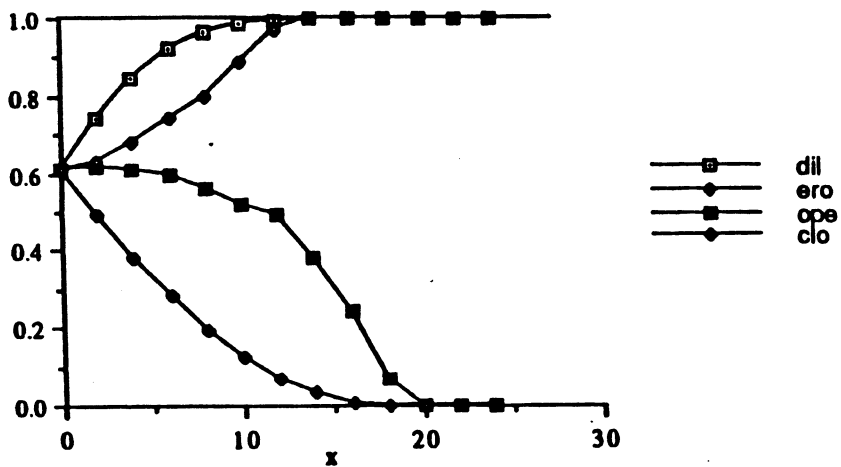


Figura 9.

Representación de los funcionales resumen correspondientes a la figura 6.

Estos resultados nos llevan a la construcción de un test de Montecarlo basado exclusivamente en la variable α_3 para contrastar las hipótesis de que las figuras 4 y 5 corresponden a modelos booleanos. En un test de Montecarlo se trata de comparar el valor de una característica de un objeto real con la misma característica medida sobre realizaciones de dicho objeto simuladas según la hipótesis. Si el valor de la característica medida en el objeto real es muy extremo con respecto a los obtenidos por simulación, ello proporciona evidencia en contra de la hipótesis que se quiere contrastar. El funcionamiento del contraste lo probamos como sigue:

- a) Si la figura 5 correspondiera a un modelo booleano con grano circular de radio uniforme en $[0, 0.1]$, de la expresión $\text{Prob}\{0 \in X\} = \exp\{-\lambda E\nu_2(X)\}$ se obtendría un valor de λ por la estimación de la fracción de vacío $1 - p = 0.390$. Resulta $\lambda = 89.92$. Y se puede comparar el área entre las curvas de dilatación y de erosión de la figura 8, que es 15.33, con el área entre las curvas estimadas sobre 50 realizaciones simuladas de un modelo booleano con las características que corresponderían a la figura 5 de serlo. El resultado obtenido es que los 50 valores así calculados están en el intervalo $[16.38, 18.40]$.
- b) En la figura 6 puede razonarse de manera análoga obteniéndose $1 - p = 0.409$ y $\lambda = 85.37$. El área correspondiente entre las curvas de dilatación y de erosión, que están en la figura 9, es 18.73. Y las áreas correspondientes a 50 realizaciones simuladas de un modelo booleano con $\lambda = 85.37$ y grano circular de radio uniforme en $[0, 0.1]$ están en el intervalo $[16.30, 18.40]$.

Obsérvese que para las cien simulaciones de los dos modelos booleanos, cincuenta de cada uno, que nos han servido para comparar las áreas entre las curvas de dilatación y erosión, y que corresponden a dos modelos booleanos muy parecidos, ninguna de ellas ha dado valores del estadístico de contraste fuera del intervalo $(15.33, 18.73)$.

4. UN EJEMPLO REAL DE APLICACIÓN

La figura 10 está tomada de Margalef (1974, pág. 849). Corresponde a un esquema de 'brousse tigrée' tomado de una fotografía aérea sobre $13^\circ 6'N$, $10^\circ E$ en los bordes de un escudo laterítico; la parte negra corresponde a vegetación arborescente con Combretum.

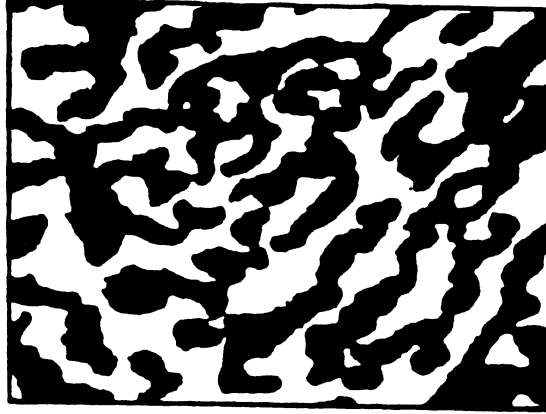


Figura 10.

Esquema correspondiente a una vegetación arborescente con Combretum (tomado de Margalef, 1974).

Sobre ella, tras ser digitalizada, se realizó el proceso de estimación paramétrica con el método de las dilataciones de Ayala, Ferrándiz y Montes (1989a). En este método se obtienen los valores de λ , a área media del grano y s perímetro medio de X_0 de las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 P(x_j \in X^C) &= p_0 = \exp\{-\lambda a\} \\
 P(x_j \in (X \oplus \check{T}_1)^C) &= p_1 = \exp\left\{-\lambda \left(a + \frac{st}{\pi}\right)\right\} \\
 P(x_j \in (X \oplus \check{T}_2)^C) &= p_2 = \exp\left\{-\lambda \left(a + \frac{s}{2\pi}U(T_2) + \nu_2(T_2)\right)\right\}
 \end{aligned}$$

donde T_1 es un segmento de longitud t , y T_2 un compacto con $U(T_2)$ de perímetro y $A(T_2)$ de área.

En Plaza (1991) está la justificación de la versión digitalizada de este método, cuyas fórmulas para trama de digitalización hexagonal son:

$$\begin{aligned}
 P(x_j \in X^C) &= p_0 = \exp\{-\lambda f_a \mathbb{E}(\hat{A}(X_0))\} \\
 P(x_j \in (X \oplus iL)^C) &= p_1 = \exp\left\{-\lambda f_a \left(\mathbb{E}(\hat{A}(X_0)) + \frac{\mathbb{E}(\hat{U}(X_0)) + 3}{3}i\right)\right\} \\
 P(x_j \in (X \oplus iH)^C) &= p_2 = \exp\left\{-\lambda f_a (\mathbb{E}(\hat{A}(X_0)) + (\mathbb{E}(\hat{U}(X_0)) + 3)i + 3i^2)\right\}
 \end{aligned}$$

con \hat{U} y \hat{A} los perímetros y áreas digitales, $f_a = \sqrt{3/2}a_k^2 = 1.526\text{E-}5$ el factor del área. Expresiones éstas basadas en las fórmulas para las áreas de las dilataciones de un conjunto convexo mediante un múltiplo del elemento estructural H de la trama de digitalización hexagonal, y en la definición de perímetro entero para grano en el anillo convexo $S(H)$, uniones finitas de conjuntos convexos para la trama hexagonal con número de conectividad igual a 1.

Para $i = 5$ se obtienen los valores $p_0 = 0.4309$, $p_1 = 0.2934$ y $p_2 = 0.0930$, que conducen a las estimaciones $\lambda = 332.6$, $a = 2.531\text{E-}3$ y $s = 1.729\text{E-}1$. Si por sencillez suponemos que la distribución del radio del grano es uniforme, entonces se obtiene que su intervalo de distribución es $[1.547\text{E-}2, 3.957\text{E-}2]$. Con esos parámetros se pueden obtener 19 realizaciones simuladas de este modelo con fracciones de vacío en el intervalo 0.569 ± 0.025 . Tras digitalizarlas y calcular las curvas de dilatación y erosión, se tiene que los 19 valores correspondientes al estadístico de contraste están en el intervalo $(8.50, 8.89)$, y el correspondiente a la imagen de la figura 10 es 8.48.

Este resultado apuntaría a una tendencia hacia un modelo de agrupación en el proceso puntual de los gérmenes.

El diseño del contraste basado en el estadístico propuesto, área en un intervalo entre las curvas de dilatación y erosión, está pensado para detectar alteraciones en la distribución del proceso de Poisson de los gérmenes, permaneciendo idéntico todo lo demás. Desde el punto de vista teórico es interesante estudiar la robustez de este estadístico frente a cambios de la forma y la distribución del tamaño de los granos, o incluso de la forma del elemento estructurante B utilizado en las operaciones morfológicas. En este trabajo el objetivo principal es presentar un contraste que supone, en nuestra opinión, una cierta mejora en los sentidos apuntados respecto de los contrastes propuestos hasta ahora, y que presenta gran aplicabilidad en la práctica.

5. AGRADECIMIENTOS

La precisión de muchos de los aspectos de interés que puedan contenerse en este artículo se deben a la benevolencia y al buen criterio del desconocido referee al que no podemos dejar de expresar nuestro más sincero reconocimiento.

6. REFERENCIAS

- [1] **Ayala, G., Ferrándiz, J. y Montes, F.** (1989a). "Two Methods of Estimation in Boolean Models". *Acta Stereol.*, **8/2**, 629–634.
- [2] **Ayala, G., Ferrándiz, J. y Montes, F.** (1989b). "On Parametric Estimation in Boolean Models". 5th International Workshop on Stereology, Stochastic & Image Analysis. CWI. Amsterdam. Pendiente de publicar en *Ressegna di Metodi Statistici ed Applicazione*.
- [3] **Diggle, P.J.** (1981). "Binary mosaics and the spatial pattern of heather". *Biometrics*, **37**, 531–539.
- [4] **Dupač, V.** (1980). "Parameter estimation in the Poisson field of discs". *Biometrics*, **67**, 187–190.
- [5] **Hall, P.** (1988). *Introduction to theory of coverage Processes*. Wiley. New York.
- [6] **Hanisch, K.H.** (1981). "On classes of random sets and point processes". *Serdica*, **7**, 160–166.
- [7] **Kellerer, A.M.** (1985). "Counting figures in planar random configurations". *Jour. Appl. Probl.*, **22**, 68–81.
- [8] **Margalef, R.** (1974). *Ecología*. Omega. Barcelona.
- [9] **Matern, B.** (1986). *Springer Lecture Notes Statist.* **36** (2 ed.), Springer-Verlag, New York.
- [10] **Plaza, M.** (1991). "Contrastes en modelos de germen y grano". Tesis Doctoral. Valencia.
- [11] **Ripley, B.D.** (1986). "Statistics, images and pattern recognition". *The Canadian Jour. of Statist.*, Vol. 14, **2**, 83–111.
- [12] **Ripley, B.D.** (1988). *Spatial Inference for Spatial Processes*. Cambridge University Press.
- [13] **Serra, J.** (1982). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press. London.
- [14] **Stoyan, D., Kendall, W.S. y Mecke, J.** (1987). *Stochastic Geometry and its Applications*. Wiley. Chichester.

ENGLISH SUMMARY:

A TEST IN GERM-GRAIN MODELS

Plaza, M. and Montes, F.

1. BOOLEAN MODEL AND ALTERNATIVES

The Boolean model is a random set that can be considered as a particular case of those models called by Hanisch (1981) germ-grain models. These models, in \mathbb{R}^2 , are random closed sets defined by

$$X = \bigcup_{n \geq 1} (x_n + X_n),$$

where $\Phi = \{x_n\}$ is a point process and $\{X_n\}$ is a sequence of compact sets, both in \mathbb{R}^2 . For the Boolean model, $X = (X_0, \lambda)$, Φ is a Poisson process with parameter λ , and the compact sets, $\{X_n\}$, are i.i.d. as X_0 verifying $E[\nu_2(X_0 \oplus \check{K})] < +\infty$ for all compact K , where ν_2 stands for Lebesgue measure in \mathbb{R}^2 .

The aim of the paper is to derive a test procedure for the Boolean model that detects the deviation of the model towards its natural alternatives: the hard-core model (with a hard-core process as germs) and the cluster model (with a Poisson cluster process as germss).

2. ESTIMATION AND TEST IN BOOLEAN MODELS

A large part of literature on *parametric estimation* for Boolean models is devoted to ball models in \mathbb{R}^2 : Dupač (1980), Serra (1982), Kellerer (1985) y Ayala, Ferrándiz and Montes (1989b).

The most interesting *testing methods* for bidimensional models have been proposed by

- (1) Diggle (1981): he uses the theoretical first contact distribution function, $H_S(x)$, and the estimated from a simulated Boolean model with the same

probabilistic characteristics, $\check{H}_S(\mathbf{x})$, in a Montecarlo test based on the rank of $T_0 = \int_0^a (H_S(\mathbf{x}) - \check{H}_S(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}$.

- (2) Serra (1982): he proposes to compare the experimental functions $g(\mathbf{x}) = -\log(1 - \check{H}_S(\mathbf{x}))$ or $h(\mathbf{x}) = -\log(\hat{Q}(\mathbf{x}S_0))$, where $\hat{Q}(\mathbf{x}S_0) = \mathcal{P}(\mathbf{x}S_0 \subset X^c)$, with a quadratic polynomial, its theoretical counterpart in the case of a Boolean model. The method was improved by Hall (1988).
- (3) Ripley (1986, 1988). He suggests a test method based on the joint graph of the dilation, erosion, opening and closing curves for the observed and simulated images.

A detailed examination of these methods allows us to point out that:

- (1) estimation and test methods are very related,
- (2) all of them, except Diggle's methods, are visual,
- (3) they give no orientation about the direction of the deviation when the Boolean hypothesis is rejected.

3. A TEST BASED ON THE AREA BETWEEN THE DILATION AND EROSION CURVES

From realizations of a Boolean model (fig. 4) and two germ-grains models with the same grain distribution as that but different germ processes, a cluster Poisson process (fig. 5) and a hard-core process (fig. 6), and all of them with similar volume fraction, we estimate the dilation, erosion, opening and closing curves by means of

$$\begin{aligned}
 \text{dilation } d_B(\mathbf{x}) &= \text{vol frac}(X \oplus \mathbf{x}\check{B}) \\
 \text{closing } c_B(\mathbf{x}) &= \text{vol frac}((X \oplus \mathbf{x}\check{B}) \ominus \mathbf{x}B) \\
 \text{opening } o_B(\mathbf{x}) &= \text{vol frac}((X \ominus \mathbf{x}\check{B}) \oplus \mathbf{x}B) \\
 \text{erosion } e_B(\mathbf{x}) &= \text{vol frac}(X \ominus \mathbf{x}\check{B})
 \end{aligned}$$

The figs. 7, 8 and 9 show the joint graphs of these curves for the three models and following Ripley's suggestion some parameters, listed in table 1, are derived. An

exhaustive study about its capability for discriminating among the three models can be found in Plaza (1991). The study concludes, see table 2, that the *area between the dilation and erosion curves*, in a fixed interval, can be used alone for this purpose and a Montecarlo test based on it is derived.

4. APPLICATION TO A REAL EXAMPLE

Fig. 10 shows an aerial photograph, taken from Margalef (1974, pag. 849), where the black part is an arborescent vegetation called *combretum*. In order to describe it by means of a Boolean model, we digitalize the image and the dilations method proposed by Ayala, Ferrándiz and Montes (1989a) furnish us estimations for λ , a , the mean area of X_0 , and s , the mean perimeter of X_0 . In this case $\lambda = 332.6$, $a = 2.531E-3$ y $s = 1.729E-1$. These values are used to simulate 19 realizations of the corresponding Boolean model and on each the are between dilation and erosion curves is calculated being 8.50 and 8.89 the extreme values. For our image in fig. 10 this value is 8.48, the smallest one, suggesting a clusterization in the germ process as an alternative to the rejected Boolean model.

