

# GENERACIÓ ADAPTATIVA DE CONTORNS DE NIVELL

LLUIS PÉREZ VIDAL, PERE BRUNET CROSA

Universitat Politècnica de Catalunya

*La elaboració de dibuixos que incloguin contorns de nivell es fa a partir de un conjunt de punts donats per les seves ordenades. Existeixen varies formulacions analítiques per definir una funció d'interpolació. En aquest article es proposa una variant de la formulació de Little que pot servir per a millorar localment el seu funcionament. Per tal d'estudiar el seu rendiment es descriuen les alternatives presents amb quatre exemples.*

## Adaptative contour Generation

**Keywords:** Contour generation, Surface interpolation.

## 1. INTRODUCCIÓ

En diverses aplicacions de la ciència i de la tècnica es fa necessari representar una superfície per contorns de nivell: plànols topogràfics, medicina (tomografia axial computeritzada, coneguda com a scanner o com a TAC), mapes del temps (és a dir de isobares), disseny assistit per computadora de superfícies, visualització de programes de control numèric per a mecanització de superfícies, entre altres exemples. En general, els contorns de nivell són útils per a estudiar les característiques i propietats de superfícies tridimensionals sobre un suport bidimensional, com ara una pantalla gràfica o un dibuix resultant de sortida per un plotter. Sovint hom no disposa d'una expressió analítica de la superfície a presentar. En canvi, hom coneix un conjunt de  $n$  punts, donats per les seves coordenades ( $x$ ,  $y$  i  $z$  de cadascun d'ells). El primer problema a resoldre, doncs, és el d'interpoliar els punts donats: cal disposar d'un algorisme que proporcioni la  $z$  corresponent a un punt qualsevol donat per les seves  $x$ ,  $y$ ; i això, en gene-

---

—Lluís Pérez Vidal i Pere Brunet Crosa - ETSEI Dept. de Mètodes Informàtics - U.P.C. - Av. Diagonal, 547 - 08028 Barcelona.

—Article rebut el setembre de 1987.

ral, es fa construint una superfície que passi per els punts donats, i que després serà seccionada mitjançant plans horitzontals i hom intentarà reproduir amb exactitud aquesta traça amb els contorns de nivell. El conjunt de punts pot estar repartit sobre una malla rectangular en el pla  $x - y$ , o bé, pot presentar una distribució irregular sobre aquest pla (figura 1).

Si els punts són distribuïts regularment, hi han diversos algorismes per a obtenir directament la funció d'interpolació: Si hom disposa de dues famílies de funcions univaluades  $C_i(x)$ , per  $i = 1, \dots, n$   $C_j(y)$ , per  $j = 1, \dots, m$  tals que

$$(1) \quad C_i(x_k) = 1 \text{ si } i = k, 0 \text{ si } i \neq k \quad C_j(y_l) = 1 \text{ si } j = l, 0 \text{ si } j \neq l$$

hom pot construir el producte tensorial de ambdues funcions i obtenir la superfície  $S(x, y)$  que interpola el conjunt de valors  $Z$  donats

$$(2) \quad S(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Z_{ij} C_i(x) C_j(y)$$

Les funcions  $C$  que configuren les bases dels interpolants considerats poden estar construïdes a partir de splines cúbics o bé quadràtics. En tots els casos es necessari fer un càlcul o una estimació de les derivades de cada punt (és a dir, a cada vèrtex de la malla) amb respecte a les dues direccions coordenades i la primera derivada creuada. Pràcticament sempre es treballa amb coordenades paramètriques, o sigui, que la primera operació a efectuar és la transformació de coordenades cartesianes a paramètriques. Si la distribució és irregular, gairebé mai no s'utilitza l'obtenció directa de l'interpolant, sino que, o bé passa per una triangularització prèvia del domini, o bé es torna a la malla rectangular a través d'un pas intermediari. Un cop s'ha arribat a la funció d'interpolació, hom genera els contorns de nivell per aproximacions poligonals lo suficientment fines, doncs, en general, no es factible resoldre analíticament el problema de la traça d'una família de plans horitzontals sobre la funció interpolant. Si és necessari es retalla el contorn amb la frontera prèviament donada del domini, i també s'hi posen rètols. L'obtenció del model d'interpolació és un problema encara obert que ha estat abordat per molts camins: una descripció panoràmica, juntament amb una comparació dels diversos mètodes de resolució es pot trobar a [1]. En aquest article s'hi fa una descripció dels algorismes a l'abast:

**Shepard triangular:** Amb els mètodes d'estimació de derivades parcials, descrit aquí més endavant.

**Powell i Sabin:** Amb elements quadràtics, per lo que necessita els valors de les alçades i de les primeres derivades parcials de la funció interpolada als

vertex del triangle per construir una superfície  $C^1$  formada per la unió de sis o dotze funcions quadràtiques, segons la corbatura.

**Clough i Tocher:** Amb elements cúbics, a partir dels valors de les alçades i de les primeres derivades parcials als vertex del triangle construeix una superfície  $C^1$  formada per la unió de tres polinomis cúbics en  $x$  i  $y$ .

**Akima:** Amb elements quintics, defineix una funció polinòmica de grau cinc a l'interior d'un triangle a partir de 21 dades, corresponents a l'alçada de la funció i les primeres i segones derivades parcials als vertex del triangle, així com les tres derivades parcials en la direcció normal a les arestes del triangle calculades al punt mitjà de l'aresta. I, finalment, s'explica una proposta d'algorisme de subdivisió recursiva plantejada pels autors, que parteix d'una triangularització òptima i subdivideix cada triangle en quatre, a base de dividir cada aresta per dos; el valor de l'alçada dels punts intermitjos s'interpolava amb un polinomi cúbic a partir de les alçades dels punts extrems de l'aresta i de les derivades primeres en aquests punts; les noves derivades parcials en els punts interpolats, però es determinen per interpolació lineal.

En un estudi de revisió, [1], l'autor descriu en detall un paquet de programes per a la interpolació bidimensional i la generació de contorns; i afegeix un estudi comparatiu dels diferents algorismes ja esmentats, tenien en compte la precisió de les seves solucions pel que fa a la sortida gràfica, la ocupació de memòria, i la complexitat algorísmica (temps de processament), amb lo que es poden establir criteris de decisió per la utilització pràctica dels diversos algorismes.

En aquest article presentem una millora del mètode de Shepard Triangular que permet una adaptació local a les necessitats canviants de suavitat i precisió local, que són antagoniques. A l'apartat 2 s'hi exposen els desenvolupaments teòrics dels mètodes d'interpolació global i entre ells l'aportació original, concretament als apartats 2.3 i 2.4. A l'apartat 3 hi són descrits diversos exemples i la corresponent discussió; i, finalment, a l'apartat 4 es condensen les conclusions de treball.

## 2. MÈTODES GLOBAIS PER A MALLES IRREGULARS

Per a un conjunt de punts distribuïts de forma irregular sobre el pla  $x - y$ , hom pot aplicar el mètode que s'ha mencionat, que consisteix en fer-hi passar una funció definida sobre una malla regular. Aquests darrers algorismes presenten un funcionament en dues fases: A la primera hom calcula una matriu de valors  $F_{i,j}$  sobre la malla rectangular deditjada, de manera que la superfície generada amb splines bicúbics o biquadràtics a partir de  $F_{i,j}$  passi pels  $P$  punts donats; en la segona fase hom genera valors interpolats directament a partir de les equacions i amb els coeficients aïllats a la primera fase. També s'hi poden aplicar mètodes d'interpolació global, que utilitzin (cas de Shepard triangu-

lar), o no (cas de Shepard clàssic) una triangularització prèvia, a partir de les projeccions dels punts donats sobre el plà.

### 2.1. MÈTODE DE SHEPARD

La superfície de Shepard és una combinació convexa d'interpolants de Taylor. Hom pot establir a voluntat tant la dimensió del domini com l'ordre de l'interpolant de Taylor. Per a un conjunt de punts donats  $V_i$ , amb  $i = 1, \dots, n$  sigui  $T_i$  l'interpolant de Taylor de les dades diferencials sumministrades a  $V_i$ , i sigui  $\mu_i$  més gran que l'ordre de  $T_i$ . La superfície de Shepard és la combinació convexa.

$$(3) \quad S(v) = \sum_{i=1}^n T_i(V) W_i(V)$$

a ón

$$(4) \quad W_i(V) = \frac{\frac{1}{d_i(V)^{\mu_i}}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j(V)^{\mu_j}}}$$

i  $d_i(V)$  és la distància de  $V$  fins a  $V_i$ . Com que la divisió per zero no és legal s'ha de aclarir que

$$(5) \quad W_i(V_j) = \delta_{ij}$$

L'interpolant de Shepard és fàcil de programar, suau i interpola les dades d'una forma molt flexible; aquests avantatges superen, per a algunes aplicacions els seus inconvenients: és una interpolació global, té poca precisió polinòmica, i la superfície resultant és antiestètic i no és precisa.

### 2.2. MÈTODE DE SHEPARD TRIANGULAR

Aquest mètode és degut a Frank Little [7]. En primer lloc s'estableix una triangularització segons el criteri max-min de Lawson [6]. La major complexitat introduïda per la triangularització és compensada pel millor comportament de la funció interpolant, doncs hi ha continuïtat de les primeres derivades parcials en els punts donats. Si  $[T]$  és la triangularització de les projeccions, a cada triangle  $T$  de  $[T]$  se li assigna un interpolant lineal  $L_t(x, y)$  definit per

l'equació del plà que passa pels tres vertex de  $T$ . Aleshores, la superfície interpolant  $S(x, y)$ , que passa per tots els punts donats es pot expressar mitjançant la combinació convexa

$$(6) \quad S(x, y) = \sum_{\forall T \in [T]} \alpha_k L_t(x, y)$$

a ón

$$(7) \quad \alpha_k = \frac{w_t(x, y)}{\sum_{\forall T \in [T]} w_t(x, y)}$$

i a ón

$T$ : triangle  $(i, j, k)$

$$(8) \quad L_t(x_l, y_l) = z_l \text{ per a } l = i, j, k$$

$$(9) \quad w_t(x, y) = \frac{1}{d_i^2 d_j^2 d_k^2}$$

amb

$$(10) \quad d_l^2 = (x - x_l)^2 + (y - y_l)^2$$

La superfície  $S$  té precisió linial, és a dir, que representa exactament a la superfície donada si aquesta és un plà. A més la seva continuïtat és  $C^\infty$ , amb el que s'obté una gran suavitat dels contorns de nivell que proporciona. Aquest esquema d'interpolació és global, doncs la forma final de la superfície depèn de tots els punts donats. Es per això que aquest esquema és convenient quan el nombre de punts donats és reduït, perquè si és alt, el procés de càlcul de valors interpolats és molt llarg en temps de computador. Aquest mètode permet fer extrapolacions inclús més enllà del polígon convex de tancament del conjunt de punts (convex-hull). Aquesta propietat s'aprofita per a generar els contorns de nivell, doncs la forma analítica de la interpolant no és senzilla: es genera una malla de mínima divisió construïda sobre una regió triangular del plà  $x - y$ . Així s'obté una malla rectangular sobre el domini de  $m$  per  $n$  constants i dins de cada rectangle es generen dos triangles per una diagonal; dins de cada triangle "gran" es subdivideix cada costat en  $k$  prec segments i així es generen

els triangles “petits” de mínima divisió en quins vertex es calcula, mitjançant la fórmula facilitada, l'alçada. Els contorns resultan de fer una interpolació lineal als triangles petits per les alçades a les que corresponen contorns de nivell desitjats.

### 2.3. DISCUSSIÓ D'ALTERNATIVES DE LA FUNCIÓ DE DISTÀNCIA

Com s'ha vist, la principal millora del mètode de Shepard triangular respecte al clàssic de Shepard consisteix en ponderar funcions lineals en lloc de valors puntuals als punts desitjats d'interpolació. Les funcions de ponderació,  $\beta_k(P)$ , passen a dependre dels triangles de la malla, ja que ara la informació de partida s'estructura en dominis triangulars en lloc de punts aïllats. Les característiques que han de complir aquestes funcions  $\beta_k(P)$  són

- Esser monòtones decreixents respecte la distància de  $P$  a  $T_k$ .
- Si es desitja que s'interpoli el conjunt de punts donats, cal que

$$(11) \quad \beta_k(P) \longrightarrow \infty \text{ quan } P \longrightarrow Q_{kj}, \forall_j$$

- Cal que assegurin la continuïtat (i a poder ser la derivabilitat) de les funcions  $\alpha_k(P)$ , de forma que l'interpolant global  $S(P)$  sigui continu.

Evidentment, la funció original  $w$  del mètode de Shepard triangular compleix aquest requisits. En canvi la funció més simètrica

$$(12) \quad \beta_x(P)^* = \frac{1}{\text{dist}(P, G_k)}$$

ón  $G_k$  és el centroide de  $T_k$ , no compleix la condició segona i, en conseqüència no interpola els punts. Una possibilitat alternativa es basa en usar les coordenades baricèntriques de  $P$  respecte  $T_k$ . Com se sap, si les coordenades respecte  $T_k$  es representen per  $r_k, s_k, t_k$ , es compleix [5],

$$(13) \quad \begin{aligned} r_k(P) + s_k(P) + t_k(P) &= 1 \forall P \\ r_k(Q_{k1}) &= 1, s_k(Q_{k1}) = t_k(Q_{k1}) = 0 \\ r_k(Q_{k2}) &= 1, s_k(Q_{k2}) = t_k(Q_{k2}) = 0 \\ r_k(Q_{k3}) &= 1, s_k(Q_{k3}) = t_k(Q_{k3}) = 0 \end{aligned}$$

En conseqüència, el producte  $r_k(P)s_k(P)t_k(P)$  s'anulla als tres vertexs de  $T_k$ . Per tant, es pot pensar en la funció de ponderació

$$(14) \quad \beta_k(P)^{**} = \frac{1}{r_k^2(P)s_k^2(P)t_k^2(P)}$$

Ara bé, el fet de que sempre existeixi una coordenada baricèntrica nul·la al llarg cada un dels costats del triangle  $T - k$  fa que  $\beta_k(P)^{**}$  s'anul·li a la frontera de  $T_k$ . La conseqüència és que, si bé l'interpolant final interpola els punts donats, també coincideix amb l'interpolant lineal a trossos en totes les arestes de la triangulació inicial. Finalment, es pot pensar en modificar, a la definició inicial de  $\beta_k(P)$ , (12), la dependència del coeficient  $\beta_k$  respecte a la distància entre  $P$  i  $T_k$ . Si s'inclou l'exponent  $\mu$  a (15),

$$(15) \quad \beta_k(P) = \frac{1}{(d_{k1}^2(P)d_{k2}^2(P)d_{k3}^2(P))^\mu}$$

el paràmetre  $\mu$  permet modificar el grau d'influència de triangles llunyans sobre el punt  $P$ . Per a valors alts de  $\mu$ ,  $\beta_k$  tendeix ràpidament a zero, i cada punt és pràcticament afectat només pels triangles més propers; en conseqüència, l'interpolant es fa menys suau i tendeix a l'interpolant lineal a trossos format pel conjunt de triangles plans a l'espai definits sobre els diferents triangles de la malla. Per contra, valors petits de  $\mu$  tendeixen a donar interpolants suaus.

#### 2.4. PARÀMETRES DE TENSÍO LOCAL

Per tal d'estudiar el comportament d'una placa prima empotrada sota càrregues puntuals elevades perpendiculars al pla de la placa, Franke [5] ha exposat la idea de aplicar paràmetres de tensió a les funcions d'interpolació; això li ha permès poder modelitzar adequadament les situacions en que es produeixen forts gradients de la tensió i la deformació de les plaques mencionades. Tot i que la aplicació que aquí ens ocupa –les corbes de nivell– està lluny de l'estudi de la elasticitat de les plaques, s'hi poden establir algunes similituds. A partir de l'equació (16), és possible obtenir un conjunt de funcions de ponderació  $\beta_k(P)$  que depenguin de paràmetres locals. Si, en lloc de suposar un valor  $\mu$  constant per a tota la interpolació, l'usuari defineix un valor  $\mu_k$ , que anomenarem paràmetre de tensió local, per a cada triangle de la malla, hom pot definir

$$(16) \quad \beta_k^t(P) = \frac{1}{(d_{k1}^2(P)d_{k2}^2(P)d_{k3}^2(P))^{\mu_k}}$$

i, en aquest cas, la velocitat de decrement de  $\beta_k^t(P)$  en funció de la distància ve regulada per  $\mu_k$ . Els triangles de la malla amb valors elevats  $\mu_k$  influirán molt

en la interpolació de punts  $P$  propers, i, en canvi, ho farán poc en punts més llunyants; per tant, la funció interpolada, en ells, s'acostarà a la interpolant  $C^0$  linial a troços. Per contra, els triangles amb valors baixos de  $\mu_k$  donen lloc a zones amb funció més suau. En aquest sentit, els paràmetres  $\mu_k$  regulen la tensió de la superfície entre el cas límit de continuïtat  $C^0$  i funció  $p$  a trossos i el de la funció amb màxima suavitat. L'elecció correcta del conjunt  $\mu_k$  permet definir zones més abruptes que d'altres, i d'aquesta manera, en un futur serà possible introduir paràmetres per a poder ajustar localment la suavitat de la superfície. Aquest efecte, com es veurà a l'apartat següent, és d'interés en aplicacions –per exemple, topogràfiques– on el domini d'interpolació no té una estructura homogènia.

### 3. EXEMPLES D'ESTUDI

Per a estudiar les conseqüències de la introducció del paràmetre de tensió local de manera uniforme en tot el domini d'interpolació s'ha treballat amb quatre exemples diferents.

#### 3.1. EXEMPLE 1. 30 PUNTS ALEATORIS.

Amb un programa de generació de nombres aleatoris de tipus Monte–Carlo, s'han generat 30 punts amb  $x, y, z$  aleatòries compreses entre 0 i 1. La única finalitat d'aquesta prova prèvia es comprovar que les corbes de nivell generades amb paràmetres de tensió diferents son efectivament diferents i calibrar la importància d'aquestes diferències. Amb paràmetre de tensió unitat (fig. 1) els contorns de nivell són suaus i arrodonits. En augmentar el paràmetre de tensió (fig. 2) la corba de nivell es va fent cada cop més dependent dels punt més pròxims; s'observa que les corbes de nivell tenen contorns amb corbatures més pronunciades (és a dir, radis de corbatura més petits) i variacions de corbatura més ràpides al llarg del contorn; dit d'una altra manera, s'observa que la corba perd en suavitat per guanyar en fidelitat. Incidentalment, aqueste dues figures d'exemple també il·lustren sobre el problema els ports: al centre quasi exacte de la figura hi ha un port que es caracteritza per presentar un mínim relatiu de la funció  $z$  en la direcció de dalt a baix de les figures, i, en canvi, un màxim en la direcció de dreta a esquerra de les figures. Aquí queda clar com una diferència, que en aquest cas es petita, en els esquemes d'interpolació aplicats es tradueix en un canvi total del "lligam" entre els quatre extrems de la mateixa corba de nivell que arriben a aquest port.



### 3.2. EXEMPLE 2. 30 PUNTS D'AKIMA

Desde fa més de deu anys existeix una prova "patró" publicada per Hiroshi Akima [1] per determinar la qualitat dels diversos esquemes d'interpolació de punts irregularment distribuïts, amb dos grups de punts, un de 30 i un altre de 50 punts; s'han probat diversos valors del paràmetre de tensió amb el primer grup (3) punts). Per un valor de  $\mu$  unitat (fig. 3), les corbes corresponen als resultats "bons" d'Akima doncs  $\mu$  igual a 1 implica no introduir tensió. Per valors superiors ( $\mu = 2$ . fig 4;  $\mu = 4$ . fig 5) les corbes presenten una forta discontinuïtat de les corbatures. En aquest exemple, amb un nombre relativament petit de punts queda clar el doble efecte de la introducció de la tensió: augment de la correspondència de les corbes amb les variacions locals brusques dels gradients, pero, en contrapartida, pèrdua de la suavitat de les corbes de nivell.

### 3.3. EXEMPLE 3. 700 PUNTS DE DADES TOPOGRÀFIQUES.

En un problema real, es va presentar la necessitat de dibuixar les corbes de nivell a partir d'un gran nombre de punts presos per taquimetria (fig. 6). De l'examen de les dades s'en desprén, tanmateix, una manca de dades en punts importants, per exemple en el contorn d'un llac situat al mitg del domini d'interpolació. Es va procedir, doncs, a comparar els efectes dels diversos valors del paràmetre de tensió local sobre la correspondència de les corbes de nivell amb la superfície estudiada. S'observa que el resultat és millor per un valor de  $\mu$  superior ( $\mu = 1$  fig. 7;  $\mu = 2$  fig. 8). L'explicació es que, en haver tants punts donats, si es tenen en compte tots per a la interpolació en un punt no donat, la influència dels punts llunyans es perniciososa; si, al contrari, es dona una "prima" extra als punts propers, la corba de nivell seguirà millor el que és la superfície real. L'observació de l'aspecte general del terreny (fig. 6) ens mostra característiques que mereixen consideració detinguda. Les zones inferior mig, cantonada superior dreta, i inferior dreta presenten forts gradients (és a dir, corbes molt juntes) però la quantitat de punts donats que hi han al seu voltant és molt insuficient. Per contra a l'esquerra del llac i a la dreta i cap amunt del mateix es troben fortes pendents amb molts punts donats rodejant aquestes zones singulars en totes les direccions. La conseqüència d'aquestes diferències és que la representació d'aquestes últimes zones és molt més fidel i correcta que la de les primeres. El mateix es pot dir de les zones on la densitat dels punts donats és baixa (p. ex. tota la franja dreta del terreny). El que es pot dir és que el programa no està preparat per extrapolar superfícies i, per tant, no es pot esperar que ho faci bé.

### 3.4. EXEMPLE 4. VARIACIÓ ADAPTATIVA DEL PARÀMETRE DE TENSIÓ LOCAL

En quant a dades, aquest exemple 4 utilitza el mateix conjunt de dades que el 3, per tant el terreny real és el mateix. S'ha separat de l'anterior perquè aquí s'hi introdueix un canvi significatiu en l'algorisme d'interpolació. Així com abans hom podia interpolar amb paràmetre de tensió  $\mu$  igual a 1 (fig. 6) o bé igual a 2 (fig. 9), ara es podrà aplicar un valor diferent a cada zona, en funció de que calgui respectar més les irregularitats locals i no sigui imprescindible presentar una suavitat de les corbes, o a l'inrevés. Així, es presenta un exemple (fig 10) en el que s'ha aplicat una tensió local igual a 2 a la zona de les rodalies del llac, i una tensió unitat a la resta del domini d'interpolació. El criteri per aquesta determinació ha estat el següent: A les rodalies del llac, amb tensió 1 el contorn inferior del llac es representa molt pitjor que amb tensió 2. Per contra, a les zones perifèriques, la interpolació amb tensió 2 proporciona corbes de nivell massa quebrades, i es produeixen corbes més suaus amb tensió 1. L'observació dels resultats obtinguts amb tensions combinades en un mateix resultat adaptant-se a les necessitats locals mostra un diagrama adequat (fig. 10), sobre tot tenint en compte la inadequada distribució de les dades en algunes zones. Tanmateix, queda obert un camp d'experimentació amb valors més elevats de la tensió; també amb la determinació de criteris diferents de la inspecció visual (p. ex. gradients diferents en direccions ortogonals) per determinar la tensió òptima per a cada zona.

## 4. CONCLUSIONS

Dels exemples descrits en el paràgraf anterior es dedueix una proposta de solució del problema a resoldre: Si el nombre de punts donats és reduït (per exemple, menor a 80), i hom desitja unes corbes de nivell suaus, aleshores el valor de  $\mu$  ha de ser la unitat; si, per contra, el nombre de punts donats és elevat (de l'ordre de centenars) i hom desitja que la corba de nivell s'ajusti a la superfície real a la que corresponen els punts donats, aleshores convé un valor de  $\mu$  entre 2 i 4. En situacions intermitjes, és molt convenient fer varies proves amb diferents valors de  $\mu$  i decidir, per inspecció visual quin és el millor. En problemes amb un nombre elevat de punts donats és convenient utilitzar l'algorisme que permet una adaptació local de la tensió en funció de les necessitats canviants de l'entorn. Queden obertes qüestions en diverses direccions, tal com ara l'experimentació amb diversos criteris per a fixar el valor de la tensió, o el càlcul automàtic d'aquest valor.

## 5. BIBLIOGRAFIA

- [1] **Akima, Hiroshi**, "A method of bivariate interpolation". ACM Trans. Math. Software, Vol. 4, 148-159 (1978)
- [2] **Brunet, Pere; Carrasco, Francisco; Pérez Lluís**, "Generación automática de contornos de nivel". Rev. Intl. Mets. Nums. para Cal. i Dis. En Ingeniería. Vol. 2-2 195-218 (1986).
- [3] **Carrasco, Francisco**, "Estudio comparativo de algoritmos de generación de contornos de nivel". Informe de recerca DMI02-85 - ET-SEIB.UPC - Barcelona (1985).
- [4] **Farin, Gerald**, "Smooth Interpolation to Scattered 3d Data". Surfaces in Computer Aided Geometric Design - North Holland (1983).
- [5] **Franke, Roger**, "Scattered Data Interpolation Using Thin Plate Splines With Tension". Technical Report NPS-53-85-0005- Naval Postgraduate School Monterrey, California (1985).
- [6] **Lawson, C.L.**, "Software for C1 Interpolation". Mathematical Software III - Ed. by J.R. Rice (1977).
- [7] **Little, Frank F.**, "Convex combination surfaces". Surfaces in Computer Aided Geometric Design - North Holland (1983).
- [8] **Satterfield, S.G.; Rogers, D.F.**, "A procedure for generating contour lines from a B-Spline Surface". IEEE CG&A - pp. 71-75, April (1985).
- [9] **Sabin, Malcolm. A.**, "Contouring- A review of Methods for Scattered Data". Mathematical Methods in Computer Graphics and Design - Academic Press (1980).

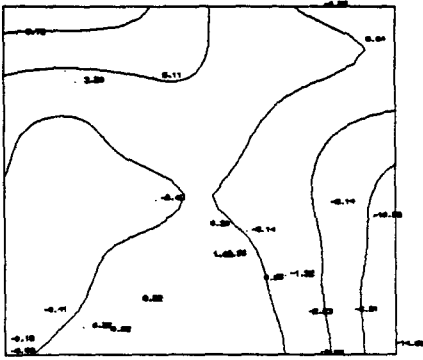


FIGURA 1. 30 punts aleatoris  $\mu = 1$

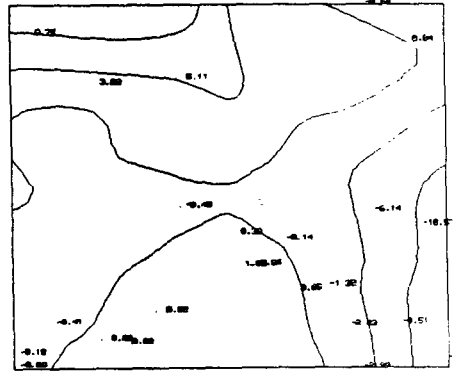


FIGURA 2. 30 punts aleatoris  $\mu = 2$

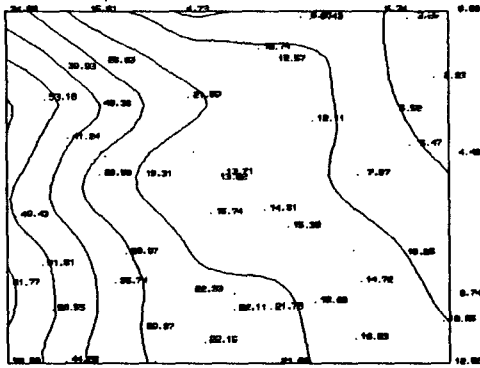


FIGURA 3. Prova d'Akima (30)  $\mu = 1$

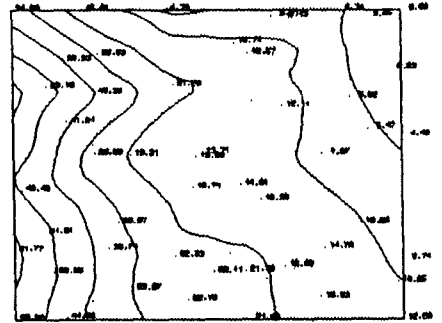


FIGURA 4. Prova d'Akima (30)  $\mu = 2$

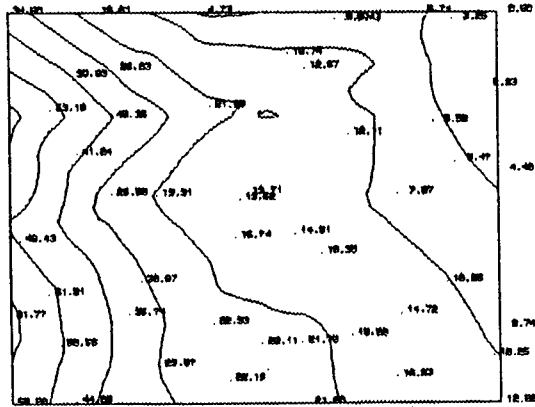


FIGURA 5. Prova d'Akima (30)  $\mu = 4$

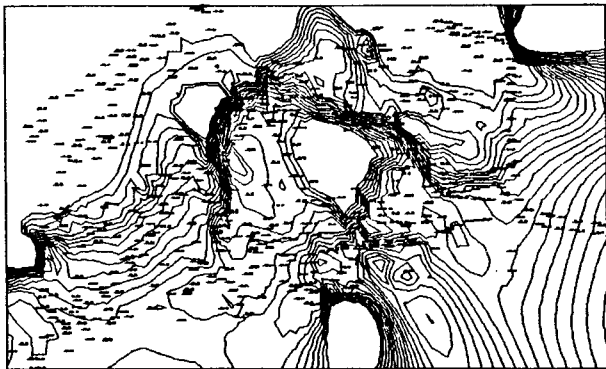


FIGURA 6. Panoramica general del terreny (700 punts)  $\mu = 1$

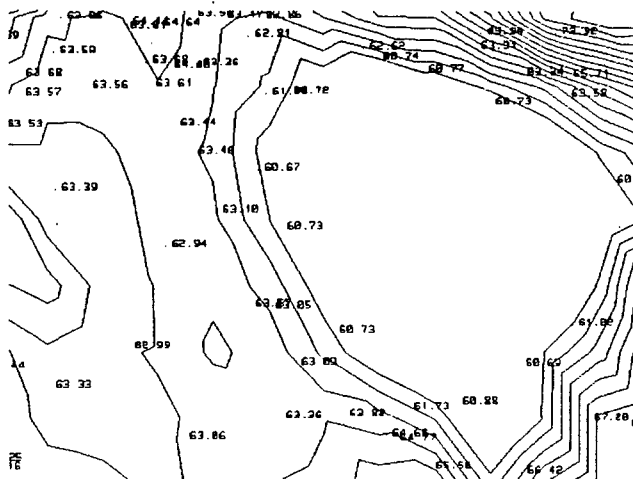


FIGURA 7. Zona del llac  $\mu = 1$

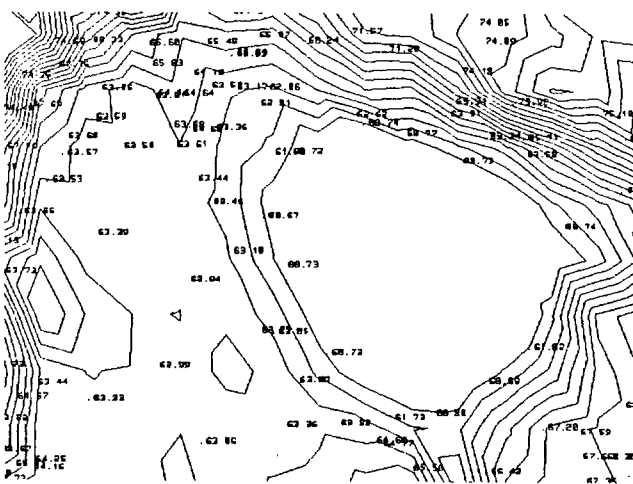


FIGURA 8. Zona del llac  $\mu = 2$

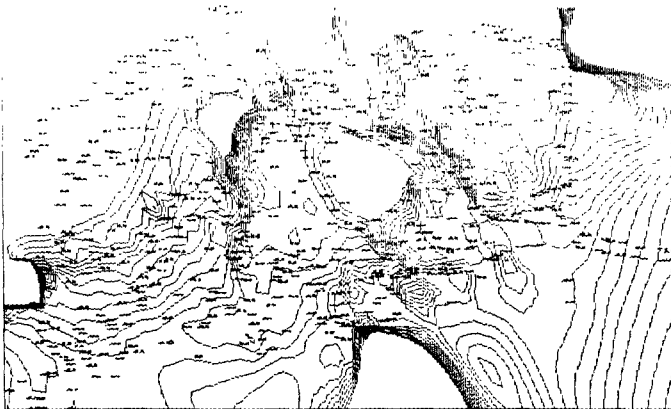


FIGURA 9. Panoràmica general del terreny (700 punts)  $\mu = 2$

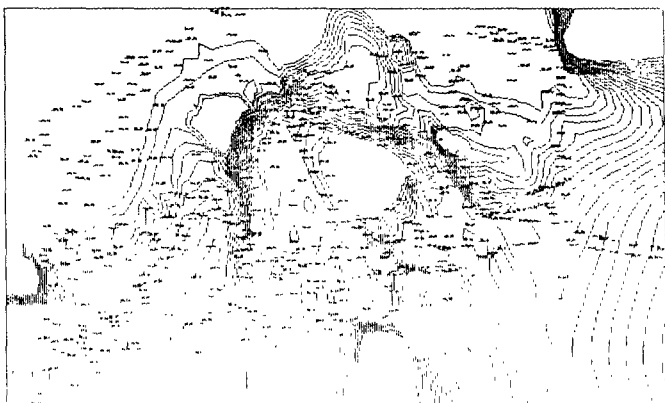


FIGURA 10. Panoràmica general del terreny  
(700 punts)  $\mu$  amb adaptació local.

