Qüestiió - V. 10, n.º 2 (juny 1986) pp. 69-82

ALGORITMO PARA LA ELECCION DE FRACCIONES FACTORIALES CON ÓPTIMA PROYECCION

JAVIER TORT MARTORELL Y ALBERT PRAT
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA

En cualquier proceso industrial hay dos fases, diseño del producto y producción donde experimentos cuidadosamente diseñados pueden contribuir enormemente a aumentar la calidad del producto final.

En ambos casos el interés estriba en obtener la máxima cantidad de información útil sobre el efecto de los factores en la respuesta (tanto sobre su nivel como sobre su variabilidad) con el mínimo número de experimentos (runs). Para conseguirlo es muy importante escoger diseños con propiedades proyectivas adecuadas y asignar las variables con mas posibilidades "a priori" de ser inertes, a los factores del diseño (columnas de la matriz de diseño) que proporcionen un mejor (más informativo) diseño proyección.

En este artículo se presenta un algoritmo para conseguir estos objetivos.

Keywords: FACTORIAL AND FRACTIONAL FACTORIAL DESIGNS, REPLICATION, RESOLUTION ABERRATION, PROJECTION.

1. INTRODUCCION.

Durante los últimos años, en los paises industrializados de Occidente ha aparecido un enorme interés por estudiar las causas del éxito de los productos japoneses en los mercados internacionales. Este interés se ha traducido incluso en programas de televisión como el famoso "If Japan can, why can't we?" de la cadena norteamericana NBC.

Es muy extensa la literatura aparecida sobre el tema y muchos los paises que de una manera u otra han enviado delegaciones al Japón para estudiar el fenómeno "in situ".

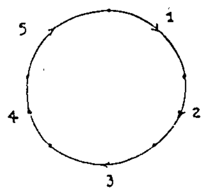
Desgraciadamente, no siempre se han entendido bien las verdaderas causas del fenómeno. Así, por ejemplo, la gran proliferación de Círculos de Calidad en la industria europea sin modificaciones importantes en los métodos de gestión, y sin la implantación en la empresa de la filosofía de la calidad total y la involucración de todo el personal en los temas de calidad y productividad, puede a nuestro entender, frenar en lugar de acelerar la resolución real de los problemas en este entorno, dado que más del 80% de los mismos son causados por el sistema de gestión y deben ser resueltos por él.

Si bien como señala Ishikawa (/9/), existen importantes factores sociológicos y religiosos en la sociedad japonesa que la diferencian de los paises occidentales; una de las causas más importantes del éxito japonés, hay que identificarla en la aplicación con esfuerzo sostenido de conceptos claramente occidentales, introducidos en Japón por Deming y Juran en la década de los 50 y magistralmente expuestos en Deming (/6/).

La nueva concepción del ciclo de un producto (ver Fig. 1), con realimentación constante del mercado hacia el rediseño industrial ha sido perfectamente entendido en Japón

- Javier Tort i Martorell, Albert Prat i Bartés - Universitat Politècnica de Barcelona - E.T.S.E.I.B.
Dep. Tècniques Quantitatives de Gestió - Av. Diagonal, 647 - Barcelona

- Article rebut el febrer de 1986.



1. Diseño del producto con el control adecuado.
2. Producirlo, probarlo durante su fabricación y en el laboratorio.
3. Colocarlo en el mercado.
4. Probarlo en servicio. A través de estudios de mercado averiguar que piensa de él el usuario y por qué no lo ha comprado el no usuario.
5. Rediseñar el producto a la vista de la reacción del consumidor a la calidad y al precio.

Fig. 1: Ciclo de un producto

De hecho, como señalan Taguchi y Phadke (/14/), la causa tecnológica más importante para explicar la alta calidad y el bajo coste de los productos japoneses, hay que buscarla en el énfasis dado a la optimización del diseño de productos y procesos, y a las herramientas estadísticas de experimentación y simulación empleadas en dicha optimización.

Sin calidad de diseño no es posible asegurar la calidad en producción y en servicio, y sin un buen diseño de los procesos de fabricación es impensable implementar métodos tales como el JIT (Just in time production) que están en la base de las altas cotas de productividad japonesa.

Entre los métodos estadísticos empleados en la optimización del diseño de nuevos productos, destacan los "orthogonal arrays" de Taguchi (/13/, /15/), que no son otra cosa que diseños factoriales fraccionales con un elevado grado de fraccionamiento.

Como señala Taguchi, (/15/), los costes que un producto causa a la sociedad una vez en servicio, son proporcionales a la variabilidad de las características funcionales del mismo. Un producto de calidad es aquel en que las características funcionales supuestas se mantienen en el valor nominal deseado y con mínima variabilidad.

La variabilidad en las respuestas de un cierto producto son debidas a múltiples causas (ruido), algunas de ellas externas, tales como temperatura, humedad, polvo, vibraciones del entorno, errores humanos en su utilización, etc., otras debidas a la variabilidad inherente a todo proceso de fabricación y finalmente, otras debidas al deterioro o envejecimiento del producto.

Intentar eliminar las causas de variabilidad de todos estos factores es un problema si no imposible, si muy costoso.

Existe otro sistema más barato: situar los valores de las componentes (esos valores se fijan en la etapa de diseño) de tal manera que se minimice la sensibilidad al ruido. Esto se consigue explotando la no-linealidad en las relaciones entre los factores de control, el ruido y las variables respuesta. La figura representa la relación (no-lineal) entre un factor de control y la respuesta.

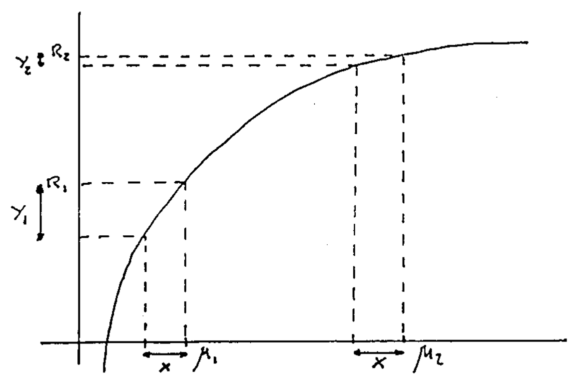


Fig. 2: Influencia de la no-linealidad en la variabilidad de la respuesta.

Obsérvese que si hacemos trabajar el factor al nivel μ_1, y permitimos que tenga una variabilidad x alrededor de este valor (debida a la utilización de componentes con alta variabilidad, baratos, ruido, etc.) obtenemos una respuesta R_1 con una variabilidad Y_1. Si por contra utilizamos el factor al nivel μ_2 con la misma variabilidad x se obtiene la respuesta R_2 con variabilidad Y_2 mucho menor que Y_1.

Si esta variabilidad fuese aún demasiado grande habría que reducir las tolerancias del factor en cuestión. Nótese que con ello se ha obtenido una respuesta (R_2) distinta de la deseada (R_1), habría pues que detectar algún factor que afectase al nivel de la -

respuesta pero no a su variabilidad (relación lineal) para llevar la respuesta al valor deseado y con la mínima variabilidad alrededor del mismo.

Este proceso requiere como ya hemos señalado, diseños de experimentos altamente fraccionados y/0 "orthogonal arrays" para poder detectar entre un gran número de factores, cuales afectan a la variabilidad y cuales al nivel, o a las dos cosas, o son inertes.

En el presente trabajo, presentamos un algoritmo, desarrollado en la tesis doctoral de Javier Tort-Martorell /16/, que es consecuencia del análisis de las propiedades proyectivas de los diseños 2^{K-P} y su utilización para la detección de factores que afectan al nivel de la respuesta, si bien la tesis cubre también aspectos de la detección de factores que afectan a la variabilidad.

2. PROYECCION DE DISEÑOS FRACCIONALES.

En la mayoría de situaciones reales, se cumple el conocido principio de PARETO, o lo que Box (/3/) llama "effect sparsity":

De entre los muchos factores que pueden afectar a una determinada respuesta, sólo unos pocos tienen efectos importantes.

Al utilizar diseños 2^{K-P} altamente fraccionados u otros "orthogonal arrays" para identificar dichos factores de interés, se tiene en general un patrón de confusión que no permite distinguir los efectos principales de las interacciones, ni éstas entre sí.

A partir de este hecho, una de las razones para la utilización de estos diseños altamente fraccionados con las variables a dos niveles, es que, si al analizar los resultados se encuentra que sólo unos pocos factores tienen efectos importantes y el resto son esencialmente inertes, se obtiene por proyección (Box y Hunter /1/) un diseño en los factores activos con un patrón de confusión mucho más favorable, o incluso un factorial completo.

Ejemplo: Un fraccional 2^{3-1}_{III} se proyecta como un completo 2^2 en cualquier subconjunto de dos variables. Figura 3.

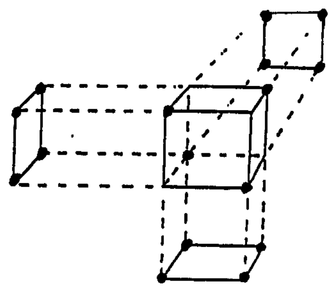


Fig.3: Proyección de un diseño fraccional 2^{3-1}_{III} en tres diseños completos 2^2.

Box y Hunter (/1/), demuestran que los diseños de resolución R proyectan como factoriales completos en cualquier subconjunto de (R-1) variables.

De hecho se puede ir más allá, ya que por construcción es obvio que un 2^{K-P} se proyecta como un factorial completo en algunos de los subconjuntos de K-P factores o menos, y en muchas ocasiones K-P>R.

Ejemplo: Un diseño 2^{15-11}_{III} se proyecta como un 2^2 completo replicado 4 veces en cualquiera de los 105 posibles subconjuntos de dos factores. Pero también se proyecta como un 2^3 replicado en 420 de los 455 subconjuntos posibles de tres factores y en 840 de los 1365 subconjuntos de cuatro factores (K-p = 15-11 = 4).

El principal peligro al proyectar un diseño altamente fraccionado es que se está suponiendo que los factores cuyo efecto principal no es importante, no interaccionan con los demás. Esta suposición está en general justificada por dos motivos: primero porque la experiencia lo confirma, y en segundo lugar porque para que un efecto principal no aparezca como importante y una interacción de dos factores en la que esté involucrado si, ha de ocurrir que el efecto sea exactamente igual ($\pm$ ruido) y de sentido contrario en los dos niveles del otro factor. (Tort-Martorell /16/).

Por otra parte sólo se requerirá añadir dos experimentos elementales para aclarar la situación y ver si la interacción es importante o la importancia de ese efecto se debe a algún otro factor con el que esté confundida.

3. DISEÑOS CON MEJOR PROYECCION.

La proyección de un diseño fraccional está directamente ligada a las variables que resultan inertes después de analizar los datos recogidos en el experimento.

Los diseños con mejores propiedades proyectivas serán pues aquellos que se proyecten de forma más uniforme. Es decir que sea cual sea el subconjunto de $\binom{K}{m}$ factores $(1 \leq n \leq K)$ que resulten inertes los diseños proyección sean iguales.

Desgraciadamente no existen diseños que cumplan esta propiedad, los que más se acercan, los que tienen propiedades proyectivas más uniformes, son los diseños con máxima resolución y mínima aberración (Fries y Hunter /8/). Ello es lógico ya que el número de factores que interviene en la relación de definición de un diseño 2^{K-P} es constante e igual a $Kx2^{P-1}$ sean cuales sean los generadores (Burton y Connor /4/); el número de palabras de la relación de definición también es constante e igual a 2^{P-1}, y cuanto mejor repartidas estén los $Kx2^{P-1}$ factores en las 2^{P-1} palabras (máxima resolución y mínima aberración) más uniformes serán las proyecciones. Recuérdese que proyectar es eliminar de la relación de definición las palabras en las que aparecen factores inertes (Box y Hunter /1/).

Así pues, a menos que se posean conocimientos muy exactos y fiables (que casi harían innecesario el experimento, o por lo menos la inclusión de alguno de los factores) sobre el sistema que se está investigando previos al experimento, será conveniente utilizar diseños con máxima resolución y mínima aberración.

Ni siquiera estos diseños se proyectan de forma totalmente uniforme y por tanto es de vital importancia utilizar cualquier tipo de conocimiento previo para asignar las variables de la investigación a los factores del diseño. La óptima utilización de estos conocimientos para asignar variables a factores es la misión del algoritmo que se detalla en la sección 5.

4. NOTACION Y PROPIEDADES.

Para la descripción del algoritmo, así como para su implementación en software, hemos utilizado la notación de Franklin (/7/).

Siguiendo esta notación se representa la relación de definición de un diseño factorial fraccional 2^{K-P} como una matriz de ceros y unos, donde cada fila representa una palabra y cada columna representa un factor. Un uno en la casilla a_{ij} representa que el factor j está presente en la palabra i, y un cero representa que el factor j no forma parte de la palabra i.

Ejemplo: Supongamos un diseño 2^{7-3}_{IV} con generadores 5=234, 6=134 y 7=123. La relación de definición sería:

I = 1237 = 2345 = 1346 (generadores)
= 1457 = 2467 = 1256 (productos de dos generadores)
= 3567 (productos de tres generadores)

En la Tabla 1 aparece la misma relación de definición en notación matricial.

Hay cuatro propiedades de las relaciones de definición que han resultado de utilidad en la elaboración del algoritmo y las notas sobre proyecciones de la sección 5. Las tres primeras son bien conocidas, la cuarta es nueva.

a) Los diseños con máxima resolución y mínima aberración contienen todos los factores en la relación de definición (Fries y Hunter /8/).

b) Los diseños 2^{K-P} contienen 2^{P-1} palabras en su relación de definición (2^P palabras si consideramos la identidad) (Box y Hunter /1/).

c) En los diseños 2^{K-P} cada factor que interviene en la relación de definición forma parte de 2^{P-1} palabras (Burton y Connor /4/).

d) Para que un conjunto de 2^{P-1} palabras formen una relación de definición de un diseño 2^{K-P} es condición necesaria y suficiente que cualquier conjunto de dos factores:
   - aparezcan siempre juntos en las mismas palabras

o bien

- aparezcan juntos en 2^{P-2} palabras y no aparezca ninguno de los dos en $2^{P-2}-1$ palabras (lo cual implica que aparece uno sólo de los dos en 2^{P-1} palabras) (Tort-Martorell /16/).

5. ALGORITMO.

5.1. UTILIDAD Y PROPIEDADES.

El proceso de diseñar un experimento requiere siempre de la unión de los conocimientos del investigador sobre el sistema y del estadístico sobre diseños, estructures de alias, etc.

El tipo de diseño (número de factores, niveles, grado de fraccionamiento, etc.) está en gran medida condicionado por circunstancias físicas y debe surgir de la colaboración entre el estadístico y un investigador. A continuación el estadístico sugerirá un diseño que cumpliendo lo anterior tenga una serie de características deseables. Si el diseño escogido es un 2^{K-P} una de esas características será, en general, la máxima resolución y mínima aberración. Hemos señalado ya que esto es conveniente no sólo por la mejor estructura de alias sino también por proporcionar proyecciones más uniformes.

Podría creerse que con la elección del diseño finalizaría la etapa de diseño propiamente dicha, pero todavía faltaría un último paso, asignar las variables físicas a los factores (columnas de la matriz de diseño). En este paso la interacción entre el estadístico y el investigador es crítica.

Este algoritmo consigue que dado un diseño 2^{K-P} en el que por tanto intervienen k factores asignar las K variables de forma que si los conocimientos del investigador previos al experimento resultan ciertos, este se vea compensado con un diseño proyección lo más favorable posible, es decir, con la máxima resolución y la mínima aberración posibles.

El algoritmo (implementado en programas de ordenador que están a disposición de los interesados) proporciona una secuencia de factores a los que se deben asignar las variables en orden de menos a más importantes, según los conocimientos "a priori".

El algoritmo funciona con cualquier diseño factorial fraccional con las variables a dos niveles, aunque como ya hemos visto, los diseños con máxima resolución y mínima aberración son los más adecuados para proyectar. Garantiza que si las ℓ variables que resultan no significativas al analizar el diseño habían sido asignadas a los ℓ primeros factores proporcionados por el algoritmo, se obtendrá un diseño que tendrá resolución máxima y aberración mínima entre todos los que se podrían obtener al proyectar el diseño original sobre R-ℓ variables. También garantiza que si las ℓ variables están entre las presumidas "a priori" nunca se obtendrá un fraccional replicado (aunque en este caso puede que exista otro $2^{(K-\ell)-(P-\ell)}$ obtenido por proyección con mejor resolución o aberración). Si ℓ es mayor que p siempre se obtendrán diseños factoriales completos replicados.

5.2. DESARROLLO.

La figura 4 contiene el diagrama de flujo del algoritmo. Las casillas están numeradas. A continuación detallamos los pasos, utilizamos la notación introducida en la sección 4.

1.- Hallar la matriz relación de definición:

A partir de los generadores, expresados en forma de una matriz con p filas (generadores) y K columnas (factores) formada por ceros y y unos.

A base de sumar binariamente todas las combinaciones posibles de esas p filas se obtiene la matriz de $(2^p - 1) \times K$ que representa la relación de definición.

2.- Sumar las filas:

Sumar algebraicamente (en base 10) los ceros y unos de cada fila para hallar la longitud de cada una de las palabras de la relación de definición.

3.-Ver si todas las filas suman lo mismo:

Si todas las filas suman lo mismo, como todas las columnas deben sumar lo mismo (propiedad de las relaciones de definición) al eliminar cualquier factor se elimina el mismo número de palabras cortas. Por tanto ir a 12.

Si no todas las columnas suman lo mismo ir a 4.

4.- Ordenar las filas de menor a mayor suma de modo que la palabra más corta quede en la fila 1 y la más larga en la 2^P-1

5.- Detectar que columnas tienen más unos en las filas con mímima suma.

Se trata de ver que factores intervienen en el mayor número de palabras cortas.

Eliminando uno de ellos obtendríamos el diseño con mayor resolución y menor aberración posible ya que habríamos eliminado el mayor número posible de palabras cortas de la relación de definición.

Si el factor es único, debe ser elegido (paso 6) si hay varios hay que ver cual de --- ellos es mejor (pasos 7,8 y 9).

6.- Ver si la columna (factor) que tiene --- más unos en las filas con menor suma es única.

Si lo es ir a 13.
Si no lo es ir a 7.

7.- Hallar el número de ceros en la misma posición que tienen las columnas dos a dos en las palabras más cortas.

En este paso se averigua cual de las columnas que tenían mayor número de unos en las palabras más cortas es mejor eliminar primero.

La mejor columna es aquella que al ser eliminada produzca una relación de definición que contenga una columna con más unos en las palabras más cortas.

Se escogen por tanto, las columnas con menor número de ceros en la misma posición (mayor número de unos en posiciones diferentes).

Nótese que las columnas escogidas (siempre serán como mínimo dos) siempre estarán entre las que tienen mayor número de unos en las palabras más cortas, pero hay que mirar los ceros que tienen en la misma posición con todas las columnas.

8.- Seleccionar las columnas que tienen el - menor número de ceros en la misma posi-- ción.

Esto producirá que al eliminarse una de esas columnas (en 9 y 10 se decide cual) el diseño obtenido sea el mejor preparado para una nueva proyección.

9, 10, 11.- Detectar que columna de las seleccionadas tiene más unos en el conjunto de palabras que siguen en longitud.

Estos pasos están destinados a minimizar la aberración. Encontrar la columna que elimina más palabras cortas y por tanto menos largas. Asimismo ayuda a que los diseños de futuras proyecciones tengan mayor resolución.

Si al llegar a un conjunto de palabras, hay una sola columna con mayor número de unos ir a 13.

Si el número de unos de varias columnas es el mismo en todos los conjuntos de palabras, ir a 12.

12.- Escoger la columna que está repetida menos veces.

Al llegar aquí se tiene un conjunto de columnas igualmente buenas para ser eliminadas. El nuevo criterio para elegir una es que las columnas estén repetidas lo mínimo posible.

Ello minimiza el riesgo de que si un factor inesperado resulta inerte el diseño proyección sea un fraccional replicado.

Si están repetidas el mismo número de veces las columnas son equivalentes (en cuanto a - proyección) y se escoge una al azar.

13.- Recomendar la asignación de la variable menos significativa (presumiblemente) - de las que quedan al factor detectado.

4.- Obtener la matriz relación de definición del diseño proyección obtenido al eliminar esa variable.

La matriz se obtiene borrando de la matriz anterior la columna elegida y todas las filas en las que esta columna tenía unos (/1/).

15.- Identificación del diseño proyección obtenido.

Se halla la nueva K (número de factores que restan). La nueva p, grado de fraccionamiento. Y la resolución.

16.- ¿Es el diseño obtenido un 2^{K-1}?

Si lo es ir a 17
Si no lo es ir a 2 (recomenzar).

17.- Hallar los factores siguientes a recomendar:

Al llegar aquí p=1 y por tanto sólo resta por recomendar una variable que puede ser una cualquiera de las que aparecen en la única palabra que resta de la relación de definición.

18.- Señalar que a partir de entonces si más variables resultan no significativas se obtendrán diseños completos replicados.

19.- FIN.

El algoritmo se completa con un programa que una vez realizado el experimento y averiguado que factores son realmente inertes proporciona el diseño proyección y su relación de definición.

Ejemplo: Como ejemplo vamos a utilizar un 2^{9-4}_{III} con generadores G=123, G=145, G=678 y G=296. Este diseño no es de máxima resolución, pero resulta conveniente como ejemplo ya que es un diseño relativamente pequeño, pero que cubre la mayor parte de los pasos del algoritmo.

Pasos 1, 2 y 3: Hallar la matriz relación de definición, sumar las filas y ver si todas suman lo mismo. Ver tabla II.

Pasos 4 y 5: Ordenar las filas menor a mayor suma y detectar las columnas con más unos en las filas con menor suma. Ver tabla III.

Las columnas 1, 2 y 6 tienen dos unos en las filas con suma 3. El resto tienen un sólo uno.

Paso 6: ¿Una sóla columna ?

No, ir a 7.

Pasos 7 y 8 : Hallar el número de ceros en la misma posición que tienen las columnas dos a dos, en las filas con mínima suma. Y seleccionar las que tienen menor número de ceros. Ver tablas IV y V.

Las columnas 1 y 6 no tienen ningún cero en la misma posición y por tanto entre ellas ha de estar la elegida.

Obsérvese que si se eleminan los factores 1 y 6 desaparecen todas las palabras de longitud tres, cosa que no sucede con ninguna otra combinación de dos factores.

Pasos 1, 10 y 11: Ver que la columna de las seleccionadas tiene más unos en los conjuntos de palabras siguientes en longitud. Ver tablas VI y VII.

Como empatan en todos los conjuntos de palabras ir a 12.

Paso 12: Escoger la columna que esté repetida menos veces.

Como puede verse en la matriz relación de definición inicial, ninguna de las dos columnas está repetida. Por tanto, se escoge una al azar. Por ejemplo la 1.

Paso 13: Se recomienda que se asigne la variable previsiblemente menos significativa al factor 1.

Paso 14: Obtención de la matriz relación de definición del diseño resultante. Ver tabla VIII.

Paso 15: Identificación del diseño obtenido.

Hay 8 factores
Hay 7 palabras en la relación de definición.
Hay 2 palabras de longitud 3
Por tanto es un 2^{8-3}_{III}

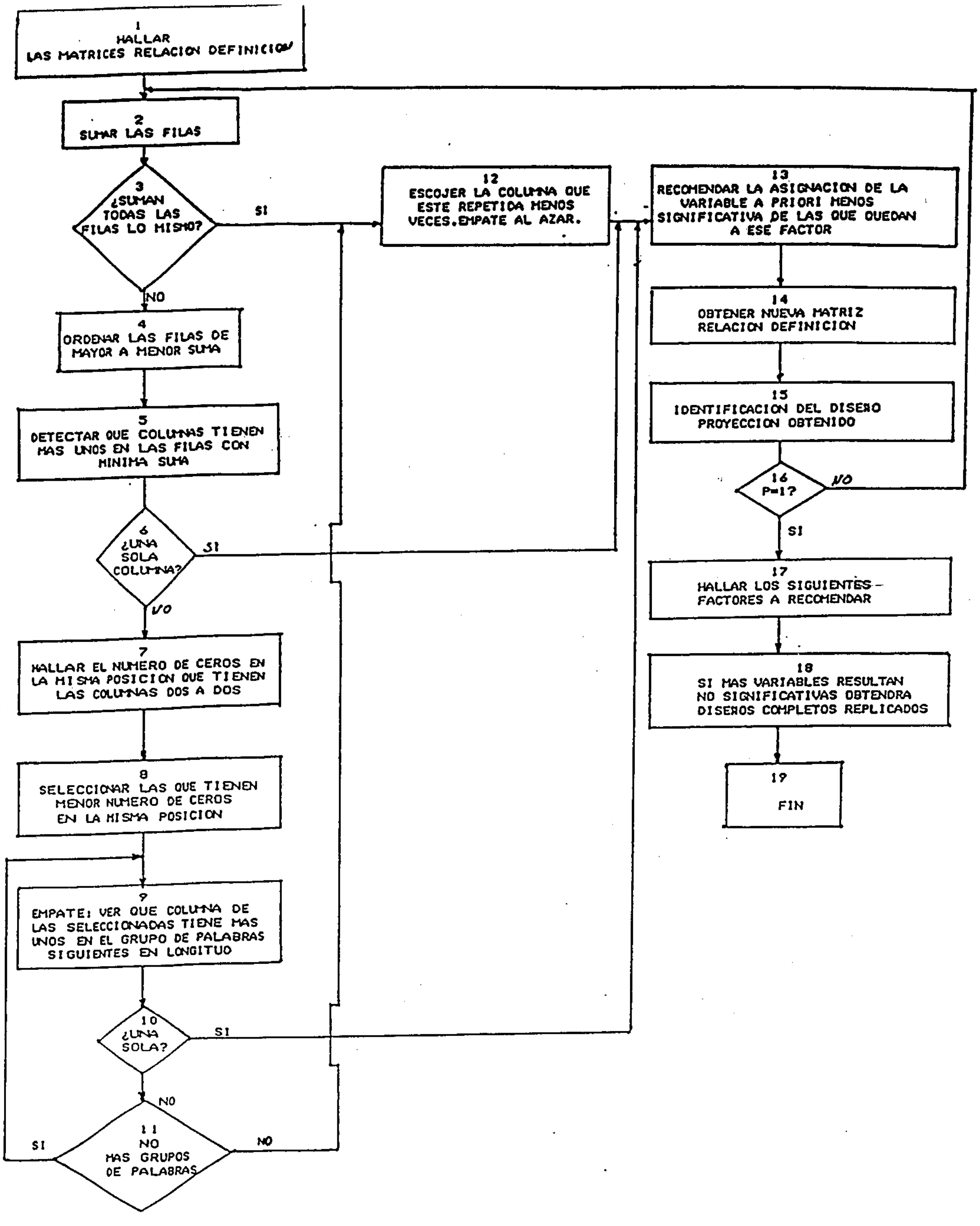


Fig. 4: Diagrama de flujo del algoritmo

TABLA I

RELACION DE DEFINICIÓN DE UN DISEÑO 2^{7-3} EN NOTACION MATRICIAL

palabras \ factores	1	2	3	4	5	6	7	
1	1	1	1	0	0	0	1	1237
2	0	1	1	1	1	0	0	2345
3	1	0	1	1	0	1	0	1346
4	1	0	0	1	1	0	1	1457
5	0	1	0	1	0	1	1	2467
6	1	1	0	0	1	1	0	1256
7	0	0	1	0	1	1	1	3567

TABLA II

MATRIZ RELACION DE DEFINICION DE UN DISEÑO 2^{9-4}

palabras \ factores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma de las filas
generadores	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3
	0	1	0	0	0	1	0	0	1	3
Productos de dos generadores	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4
	1	1	1	0	0	1	1	1	0	6
	1	0	1	0	0	1	0	0	1	4
	1	0	0	1	1	1	1	1	0	6
	1	1	0	1	1	1	0	0	1	6
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	4
Productos de tres generadores	0	1	1	1	1	1	1	1	0	7
	0	0	1	1	1	1	0	0	1	5
	1	0	1	0	0	0	1	1	1	5
	1	1	0	1	1	0	1	1	1	7
Producto de cuatro generadores	0	0	1	1	1	0	1	1	1	6

TABLA III

MATRIZ RELACION DE DEFINICIÓN CON LAS FILAS ORDENADAS DE MENOR A MAYOR

palabras \ factores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Suma de las filas
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	1	1	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	1	1	1	0	3
	0	1	0	0	0	1	0	0	1	3
	0	1	1	1	1	0	0	0	0	4
	1	0	1	0	0	1	0	0	1	4
	0	1	0	0	0	0	1	1	1	4
	0	0	1	1	1	1	0	0	1	5
	1	0	1	0	0	0	1	1	1	5
	1	1	1	0	0	1	1	1	0	6
	1	0	0	1	1	1	1	1	0	6
	1	1	0	1	1	1	0	0	1	6
	0	0	1	1	1	0	1	1	1	6
	0	1	1	1	1	1	1	1	0	7
	1	1	0	1	1	0	1	1	1	7

TABLA IV

PALABRAS DE LONGITUD TRES

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1

TABLA V

NUMERO DE CEROS EN COMUN EN LAS PALABRAS DE LONGITUD TRES ENTRE LOS FACTORES DOS A DOS

FACTORES

FACTORES	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	/	1	2	2	2	0	1	1	1
2		/	2	2	1	1	1	1	2
3			/	2	2	1	2	2	2
4				/	3	1	2	2	2
5					/	2	2	2	2
6						/	2	2	2
7							/	3	2
8								/	2
9									/

TABLA VI

COMPARACION DE LOS FACTORES 1 Y 6

1	6	longitud
0	0	
1	1	4
0	0	
0	1	
1	0	5
1	1	
1	1	6
1	1	
0	0	
0	1	
1	0	7

TABLA VII

NUMERO DE UNOS EN LAS PALABRAS CON LA MISMA LONGITUD

factor / long.	1	6
4	1	1
5	1	1
6	3	3
7	1	1

TABLA VIII

RELACION DE DEFINICION DEL DISEÑO 2^{8-3}_{III} RESULTANTE

2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1

TABLA IX

ASIGNACION DE VARIABLES A FACTORES DE ACUERDO CON EL ALGORITMO

variables en orden de significación a priori	factor	diseño obtenido si esa variable y todas las anteriores resultan inertes
menos	1	2_{III}^{8-3}
siguiente	6	2_{IV}^{7-2}
siguiente	2	2_{VI}^{6-1}
siguientes	a cualquiera de 3,4,5,7, 8 y 9	2^{5}

Paso 16 p=3 por tanto, habría que ir a 2.

Prosiguiendo el algoritmo nos indicaría que asignásemos las variables a los factores tal como indica la tabla IX.

Si hubiésemos asignado las variables presumiblemente menos significativas a por ejemplo 3, 4 y 5 en lugar de a 1, 6 y 2, nuestras sospechas hubiesen resultado ciertas, hubiésemos obtenido un 2^{6-2}_{III} replicado en lugar de un -- 2^{6-1}_{VI} . Con la consiguiente y notable périda en el patrón de confusión.

5.4. CONSIDERACIONES.

Sin utilizar el algoritmo podría ser que al obtener dos factores no significativos el diseño proyección fuese un fraccional replicado. Veamos porqué, utilizando de nuevo la notación matricial.

El número de columnas diferentes (con 0 y 1) que se pueden obtener cumpliendo la condición d) del apartado cuatro es 2^P-1 por tanto siempre que en un diseño $K>2^P-1$ habrán columnas repetidas. La supresión de dos columnas repetidas produce un fraccional replicado.

En el caso de que $k\leq 2^P-1$ no se puede asegurar cual es el número mínimo de factores que hay que eliminar para correr el riesgo de obtener fraccionales replicados. Lo que sí es seguro, es que este riesgo existirá cuando el número de factores eliminados l sea tal que cumpla que

$$K - \ell > 2^{P-\ell}-1$$

Aún partiendo de un diseño con máxima resolución y mínima aberración, no se puede garantizar que al eliminar el mejor factor posible el diseño proyectado tenga máxima resolución y mínima aberración.

6. CONCLUSIONES.

En la industria es muy frecuente utilizar diseños altamente fraccionados. Entonces resulta muy importante utilizar los conocimientos "a priori" en la fase de diseño (asignar las variables a los factores) de modo que si las conjeturas iniciales resultan ciertas el experimentador no se vea penalizado en la fase de análisis.

El algoritmo propuesto resuelve la asignación de las variables del experimento a los factores del diseño para el caso de diseños factoriales con los factores a dos niveles (2^{K-P}).

7. BIBLIOGRAFIA.

/1/ BOX G.E.P. y HUNTER J.S.: "The 2^{K-P} Fractional Factorial Design", Technometrics, 3, 311-351, 449-458 (1961).

/2/ BOX G.E.P., HUNTER W.G. y HUNTER, J.S. "Statistics for experimenters", New-York: John Wiley. (1978).

/3/ BOX G.E.P. y MAYER R.D.:"Analizing two-level Fractional Factorial Experiments for Possible Dispersion Effects" MRC Technical Report # 2746 (University of Wisconsin). (1984).

/4/ BURTON, R. C. y CONNOR W.S.:"On the Identity Relationship for Fractional Replicates of the 2^n Series". Annals of Mathematical Statistics, 28, 762-767 (1957).

/5/ DANIEL C.:"Applications of Statistics to Industrial Experimentation". New York: John Wiley. (1976).

/6/ DEMMING W.E.:"Quality Productivity and Competitive Position" MIT. (1982).

/7/ FRANKLIN M.F.:"Constructing Tables of Minimun Aberration P^{u-m} Desings" Technometrics, 26, 225-232. (1984).

/8/ FRIES, A. y HUNTER W.G.:"Minimun Aberration 2^{K-P} Designs". Technometrics, 22, 601-608. (1980).

/9/ ISHIKAWA, K.:"What is Total Quality Control?. The Japanese Way". Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs N.J. (1985).

/10/ JOHN P.W.M.:"Statistical Design and Analysis of Experiments". New York:MacMillan Co. (1971).

/11/ PHADKE M.S.:"Quality Engineering Using Design of Experiments". Proccedings of the American Statistical Association (Section on Statistical Edication). (1982).

/12/ PHADKE, M.S. et. al.:"Off-line Quality Control in Integrated Circuit Fabrication Using Design of Experiments", Bell Systems Technical Journal. (1983).

/13/ TAGUCHI G.:"Tables of Orthogonal Arrays and Linear Graphs". Reports of Statistical Application Research, JUSE. Vol. 7. N. 1. (1960).

/14/ TAGUCHI G. y PHADKE, M.S.:"Quality Engeeniering through Design Optimization". GLOBECOM 84 (proceedings). (1984).

/15/ TAGUCHI, G. y WU. :"Introduction to Off-line Quality Control". Central Japan -- Quality Control Association. (1980).

/16/ TORT-MARTORELL, J.:"Diseños factoriales fraccionales. Aplicación al control de calidad mediante el diseño de productos y procesos". Tesis Doctoral U.P.C. (1986).