Qüestiió - V. 10, n.º 1 (març 1986) pp. 7-12

DISTRIBUCIONES MÍNIMO INFORMATIVAS, CASO DE ESPACIO PARAMÉTRICO FINITO

M.ª PILAR GARCÍA-CARRASCO
UNIV. COMPLUTENSE DE MADRID

Este trabajo estudia las distribuciones a priori de mínima información, para un espacio paramétrico finito, y una función de información generalizada. Concretamente, se generalizan la definición de distribución de referencia y el principio de maximización de la entropía. Se estudia la extensión al caso de transformaciones del parámetro. Los resultados fundamentales obtenidos son: la coincidencia de ambos métodos para las funciones incertidumbre decisivas y continuas, y la independencia de las distribuciones de referencia del experimento para las funciones incertidumbre continuas.

Keywords: UNCERTAINTY. INFORMATION. MINIMAL INFORMATIVE DISTRIBUTIONS. REFERENCE DISTRIBUTIONS. ENTROPY MAXIMIZATION PRINCIPLE.

1. INTRODUCCION.

Se trata en este trabajo de, dado un espacio paramétrico, buscar una distribución a priori que refleje ignorancia; o visto de otro modo, que añada poca información a la proporcionada por la muestra. La bibliografía sobre este problema, dado su enorme interés en estadística bayesiana, es abundante. Podemos citar entre otros los trabajos /2/, /15/, /12/, /13/, /1/, /10/, /11/, /3/, y /5/.

Nosotros nos restringimos a espacios paramétricos finitos, lo cual es una restricción crucial. Concretamente vamos a extender en este caso para una función de incertidumbre generalizada (ver /6/ a /9/) las ideas dadas para la entropía de Shannon por /5/ con la obtención de las distribuciones de referencia y por /11/ con el principio de maximización de la entropía. Finalmente, extenderemos las ideas y resultados obtenidos al caso de transformaciones del parámetro.

2. DEFINICIONES Y RESULTADOS PREVIOS.

(Ver /6/ y /9/).

Sea el espacio paramétrico $W=\{w_1,\ldots,w_m\}$ con $m \geq 2$.

Sea $P=\{p=(p_1,\ldots,p_m)/ \sum_{i=1}^{m} p_i=1,\ p_i\geq 0,\ \forall i=1,\ldots,m\}\subset R^m$

el conjunto de distribuciones sobre W.

Denotaremos, alternativamente, a los elementos de P por p(w) o p, siendo $p(w_i) = p_i$, $\forall\ i = 1,\ldots,m$.

Definición 1. Una función de incertidumbre es una función no negativa y cóncava u: $P \to R$.

Definición 2. Dada una función de incertidumbre u, la información que un experimento X da sobre W, cuando la distribución a priori es p(w), se define:

$$I_u(X;\ p(w)) = u(p(w)) - E_X\ u(p(w/x))$$

Definición 3. Llamaremos $q_i(w)\in P$ a la distribución sobre $W=\{w_1,\ldots,w_m\}$ tal que $q_i(w_i)=1$ y $q_i(w_j)=0$, $\forall\ j\neq i$, $i=1,\ldots,m$.

Definición 4. Se dice que una función de incertidumbre u: $P \to R$ es decisiva si y sólo si $u(q_i(w)) = 0 \quad \forall\ i = 1,\ldots,m$.

- Pilar García-Carrasco - Universidad Complutense de Madrid - Ciudad Universitaria - Madrid
- Article rebut el novembre de 1985.

Propiedad 1. Sea $u: P \to R$ una función de incertidumbre; entonces, u es acotada en P.

3. DISTRIBUCIONES DE REFERENCIA Y DISTRIBUCIONES QUE MAXIMIZAN LA INCERTIDUMBRE.

Definiciones y resultados principales. Sea u una función de incertidumbre contínua; sea X un experimento. Denotamos por $X^{(k)}$ el experimento consistente en k repeticiones independientes de X. Consideramos la cantidad de información $I_u(X^{(k)};\ p(w))$. Sea C la clase de a prioris admisibles, que suponemos compacta; es decir, aquellas distribuciones sobre W que están de acuerdo con la información objetiva inicial que uno está dispuesto a admitir. Haciendo infinitas repeticiones de X se llegaría a conocer el valor de w. Así, $I_u(X^{(\infty)};\ p(w)) = \lim_{k\to\infty} I_u(X^{(k)};\ p(w))$ mide la cantidad de información sobre w que falta cuando la distribución a priori es p(w). Parece por tanto lógico definir el conocimiento vago inicial sobre w como aquella distribución que maximice la información $I_u(X^{(\infty)};\ p(w))$.

Teorema 1. Sea u una función de incertidumbre contínua. Entonces,

$$\lim_{k\to\infty} I_u(X^{(k)};\ p(w)) = u(p(w)) - \sum_{i=1}^{m} p(w_i)\, u(q_i(w)).$$

Demostración. Llamamos $z_k = (x_1,\ldots,x_k)$ a la muestra aleatoria simple de tamaño k; entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} I_u(X^{(k)};p(w)) &= \\ &= \lim_{k\to\infty} (u(p(w)) - E_{z_k} u(p(w/z_k))) = \\ &= u(p(w)) - \lim_{k\to\infty} E_{z_k} u(p(w/z_k)) = (1)\end{aligned}$$

considerando para cada k una función de $(R^N, \beta^N, \hat{P}) \to (R^k, \beta^k, P^k)$ que a cada sucesión $z = (x_i)_{i\in N}$ le hace corresponder el vector $z_k = (x_1,\ldots,x_k)$, y siendo P^k la probabilidad que corresponde a la densidad predictiva $p(z_k)$ y $|u(p(w/z_k))| \le M \quad \forall z_k \quad \forall k$ por ser u acotada; entonces

$$(1) = u(p(w)) - \lim_{k\to\infty} \int_{R^N} u(p(w/z))\, d\hat{P} =$$

y por /14/, página 121,

$$= u(p(w)) - \int_{R^N} (\lim_{k\to\infty} u(p(w/z_k)))\, d\hat{P} = (2)$$

Queremos hallar ese límite cuando z_k se ha muestreado de la predictiva $p(z_k)$, que es una mixtura de las $p(z_k/w_i)$ con probabilidad $p(w_i)$; llamando $A_i^* = \{z\in R^N / \lim_{k\to\infty} p(w/z_k) = q_i(w)\}$,

$$P(A_i^*) = \sum_{j=1}^{m} p(w_j)\, P(A_i^*/w_j) \ge p(w_i)$$

donde $P(A_i^*/w_j)$ viene definida por las $p(z_k/w_j)$ $\forall k\in N$ y $j = 1,\ldots,m$, siendo por /7/, página 202, $P(A_i^*/w_i) = 1$

Como los A_i^* son disjuntos y $\sum_{i=1}^{m} \hat{P}(A_i^*) = 1$, $\hat{P}(A_i^*) = p(w_i)$

De aquí, por ser u contínua, obtenemos

$\hat{P}\{z\in R^N/\lim_{k\to\infty} u(p(w/z_k)) = u(q_i w))\} = p(w_i)$; es decir,

$$\lim_{k\to\infty} u(p(w/z_k)) = \begin{cases} u(q_1(w)) \text{ con probabilidad } p(w_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u(q_m(w)) \text{ con probabilidad } p(w_m)\end{cases}$$

y por tanto

$$(2) = u(p(w)) - \sum_{i=1}^{m} p(w_i)\, u(q_i(w))$$

Corolario. Si u es contínua, $I_u(X^{(\infty)};\ p(w))$ no depende de X y como función de $P \to R$ es contínua.

Definición 1. Dada la función de incertidumbre contínua u, la clase de a prioris admisibles compacta C, y el experimento X sobre W, se dice que la distribución $\Pi(w)$ es la a priori de referencia si $I_u(X^{(\infty)};\ \Pi(w)) =$

$$= \max_{p(w)\in C} I_u(X^{(\infty)};\ p(w)).$$

Otro punto de vista, defendido por diversos autores, es que para buscar una distribución a priori que refleje ignorancia sobre W, ésta debe ser, por definición, independiente del experimento. En este sentido, la distribución más natural es la dada por el principio de maximización de la incertidumbre.

Definición 2. Dada la función de incertidumbre continua u y la clase de a prioris admisibles compacta C, se dice que la distribución $\Pi_*(w)$ es la a priori no informativa si $u(\Pi_*(w)) = \max_{p(w)\in C} u(p(w))$.

Observaciones:

1.- Ambos enfoques, dependiendo y sin depender del experimento, tienen ventajas e inconvenientes, que han de tenerse en cuenta en su uso posterior.

2.- Las distribuciones $\Pi(w)$ y $\Pi_*(w)$ no tienen en general porque ser únicas; aún siendo u estrictamente cóncava, si $C \neq P$, con frecuencia el máximo no es único.

Ejemplo: Sea m = 2 tal que

$u(p) = 1 - \max(p_1, p_2)$, $C = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$

compacto, en este caso $\Pi(w) = \Pi_*(w)$ no es única correspondiendo el $\max_{p \in C} u(p) = 1/4$ a $p_1 = 1/4$ y $p_1 = 3/4$.

Observaciones del teorema 1. (inmediatas)

1) Para toda función de incertidumbre u contínua y decisiva y $\forall$ experimento X, las distribuciones a priori de referencia y las no informativas coinciden.

2) Si existen u_1 y u_2 funciones de incertidumbre contínuas y decisivas y existe un experimento X tal que $I_{u_1}(X^{(k)}; p(w)) = I_{u_2}(X^{(k)}, p(w))$ $\forall$ $k \geq 1$, $\forall$ $p(w) \in P$, entonces $u_1(p(w)) = u_2(p(w))$ $\forall$ $p(w) \in P$.

3) Si existen u_1 y u_2 funciones de incertidumbre contínuas y decisivas tales que $I_{u_1}(X, p(w)) = I_{u_2}(X; p(w))$ $\forall$ experimento X y $\forall$ $p(w) \in P$, entonces $u_1(p(w)) = u_2(p(w))$ $\forall$ $p(w) \in P$.

4) Para W discreto y finito y u contínua, la distribución de referencia $\Pi(w)$ no depende del experimento X considerado.

5) Si u es contínua pero $u(q_i(w))$ no es constante $\forall$ $i = 1, \ldots, m$, en general $\Pi(w) \neq \Pi_*(w)$. Basta considerar el ejemplo con m = 2, $u(p) = 1 - (p - \frac{2}{3})^2$ $\forall$ p, $0 \leq p \leq 1$, en el cual $\Pi(w) = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$ y $\Pi_*(w) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

4. EXTENSION AL CASO DE TRANSFORMACIONES DEL PARAMETRO.

Supongamos ahora que dados W, p(w) y X sobre W, estamos interesados en $\psi = \psi(w) \in \Psi$, una función en general no biyectiva de w. Nos interesa por tanto solo una parte de la información total proporcionada por X; la idea es extensión de las expuestas en /3/, /4/ y /8/.

Definición 1: Dada una función de incertidumbre u, la información que un experimento X sobre W proporciona sobre $\psi = \psi(w)$, cuando la distribución a priori es p(w), se define:

$$I_u(X; \psi; p(w)) = u(p(\psi)) - E_x u(p(\psi/x))$$

Observaciones 1.

1.- En el caso particular $\psi(w) = w$, $I_u(X; \psi; p(w)) = I_u(X; w, p(w)) = I_u(X; p(x))$, con la notación de los apartados anteriores.

2.- La distribución $p(\psi)$ es obtenida a partir de p(w), mientras que $p(\psi/x)$ depende de X, del resultado $x \in \mathcal{X}$, de p(w) y de $\psi = \psi(w)$. Es por tanto necesario para calcular $I(X; \psi; p(w))$ dar la distribución a priori concreta p(w), no siendo en general suficiente con especificar X y $p(\psi)$ puesto que no podríamos calcular $p(\psi/x)$ ni p(x).

3.- Dado que W es finito, para el estudio de la información sobre transformaciones de w, vamos a tomar, sin pérdida de generalidad, la siguiente notación:

$$W = \{w_{11}, \ldots, w_{1m}, w_{21}, \ldots, w_{2m_2}, \ldots, w_{h1}, \ldots, w_{hm_h}\}$$

$$\psi_i = \psi(w_{ij}) \quad j = 1, \ldots, m_i \quad i = 1, \ldots, h.$$

4.- Dada la idea intuitiva de las distribuciones de referencia y de las no informativas, es evidente que éstas dependerán de la transformación del parámetro $\psi = \psi(w)$ sobre la que se trata de obtener información, debiendo extender convenientemente las definiciones 1 y 2 de 3, como hacemos a continuación.

Teorema 1. Sea u una función de incertidumbre contínua. Sea $\psi: W \to \Psi$, una aplicación en general, no biyectiva. Sea X un experimento sobre W y p(w) la distribución a priori. Entonces,

$$I_u(X^{(\infty)};\psi;p(w)) = \lim_{k\to\infty} I_u(X^{(k)};\psi;p(w)) =$$

$$= u(p(\psi)) - \sum_{i=1}^{h} p(\psi_i)u(q_i(\psi)).$$

Demostración:

$$\lim_{k\to\infty} I_u(X^{(k)};\psi;p(w)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (u(p(\psi)) - E_{z_k} u(p(\psi/z_k))) =$$

$$= u(p(\psi)) - \lim_{k\to\infty} E_{z_k} u(p(\psi/z_k))$$

Observación:

Los datos son $p(x/w_{ij})$ y $p(w_{ij})$; z_k una muestra aleatoria simple para cada w_{ij}, luego

$$p(z_k/w_{ij}) = \prod_{r=1}^{k} p(x_r/w_{ij});\ p(z_k) =$$

$$= \sum_{i,j} p(z_k/w_{ij})p(w_{ij});\ p(\psi_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m_i} p(w_{ij});p(w_{ij}/z_k) = \frac{p(z_k/w_{ij})\cdot p(w_{ij})}{p(z_k)}\ ;$$

$$p(\psi_i/z_k) = \sum_{j=1}^{m_i} p(w_{ij}/z_k)\ ;$$

y u es acotada. Por tanto, de modo análogo al teorema 1. de 3. tenemos:

$$\lim_{k\to\infty} E_{z_k} u(p(\psi/z_k)) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{R^k} u(p(\psi/z_k))p(z_k)dz_k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{R^N} u(p(\psi/z_k))\, d\hat{P} = \int_{R^N} \lim_{k\to\infty} u(p(\psi/z_k))\, d\hat{P} =$$

$$= \int_{R^N} \lim_{\to\infty} u\left(\sum_{j=1}^{m_1} p(w_{1j}/z_k),\dots,\sum_{j=1}^{m_h} p(w_{hj}/z_k)\right) d\hat{P} = (1)$$

Sea $A_{ij}^* = \{ z\in R^N / \lim_{k\to\infty} p(w_{ij}/z) = q_{ij}(w)\}$; por el mismo razonamiento del teorema 1. de 3., $\hat{P}(A_{ij}^*) = p(w_{ij})$; luego, por ser u contínua,

$$(1) = \sum_{ij} u(q_i(\psi))p(w_{ij}) = \sum_{i=1}^{h} p(\psi_i)u(q_i(\psi)).$$

Observación:

No parece que el resultado de este teorema se pueda obtener directamente del teorema 1. de 3 ya que se necesitaría la hipótesis de ser z_k una muestra aleatoria simple para cada ψ_i, y sin embargo aquí z_k es una muestra aleatoria simple dado w_{ij}. Lo que sí es cierto es que $p(z_k)$ es la predictiva tanto desde w como desde ψ.

Definición 2. Dada la aplicación $\psi: W\to\Psi$ tal que $\psi_i=\psi(w_{ij})$ $j=1,\dots,m_i$, $i=1,\dots,h$ denotamos por α la aplicación $\alpha:P_m\subset R^m \to P_h\subset R^h$ tal que $\alpha(p) = \alpha(p_{11},\dots,p_{hm_h}) = (q_1,\dots,q_h)$ con $q_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij}$, $i=1,\dots,h$.

Observamos que α es contínua.

Propiedad 1. (inmediata). Sea $C\subset P_m\subset R^m$ tal que C es compacto. Entonces $C' = \alpha(C)$ es compacto.

Definición 3. Dada la función de incertidumbre contínua u, el experimento X sobre W, la clase de a prioris admisible compacta C y la transformación $\psi=\psi(w)$, se dice que la distribución $\Pi^{\psi}(w)$ sobre W es la a priori de referencia respecto de ψ si

$$I_u(X^{(\infty)};\psi;\Pi^{\psi}(w)) = \max_{p(w)\in C} I_u(X^{(\infty)};\psi;p(w))$$

Definición 4. Dado un espacio paramétrico W, una clase de a prioris admisibles compacta C, una transformación $\psi = \psi(w)$ y una función de incertidumbre contínua u, se dice que la distribución $\Pi_*^{\psi}(w)$ sobre W es la a priori no informativa respecto de ψ, si $u(\Pi_*(\psi)) =$ $= \max_{p(\psi)\in C'} u(p(\psi))$, siendo cada $p(\psi) = \alpha(p(w))$, $C'=\alpha(C)$ y $\Pi_*^{\psi}(w)$ tal que $\alpha(\Pi_*^{\psi}(w)) = \Pi_*(\psi)$.

Definición 5. Dado que las distribuciones $\Pi^{\psi}(w)$ y $\Pi^{\psi}(w)$ no son en general únicas, definimos los conjuntos respectivos:

$$C^{\psi} = \{p\in C / I_u(X^{(\infty)};\psi;p) = \max_{p'\in C} I_u(X^{(\infty)};\psi;p')\}$$

$$C_*^{\psi} = \{p\in C / u(\alpha(p)) = \max_{p'\in C'} u(p')\}$$

Observaciones 2:

1.- Por simplificar notaciones, y considerar que no da lugar a error, hemos denotado por u tanto $u(p(w))$ como $u(p(\psi))$, siendo la primera una aplicación de $P_n \to R$ y la segunda de $P_h \to R$. Más importante aún es no olvidar esta simplificación notacional en los casos donde aparecen explícitamente los valores w_i en la expresión de $u(p(w))$ como es el caso de $u(p(w)) = \mathrm{Var}\ w$.

2.- Una vez obtenidos los conjuntos C^{ψ} y C_*^{ψ}, podemos estar interesados en definir en cada uno de esos casos una distribución sobre W con la idea de elegir, entre las que son más difusas respecto de ψ, aquellas que son más difusas respecto de w. Para ello, antes de definirlas, veremos algunas propiedades previas.

Propiedad 2: Los conjuntos C^{ψ} y C_*^{ψ} son compactos de R^m.

Demostración:

a) $C^{\psi} \subset C \subset P_m$ C^{ψ}, por lo tanto, C^{ψ} es acotado de R^m.

Veamos que C^{ψ} es cerrado de R^m; o lo que es equivalente, qué $\forall$ suceción $p_n \in C^{\psi}$, $\lim_{n\to\infty} p_n \in C^{\psi}$; en efecto: $\lim_{n\to\infty} p_n \in C$ por ser C cerrado; además

$$I_u(X^{(\infty)};\psi;\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} I_u(X^{(\infty)};\psi;p_n) = (1)$$

ya que por el teorema 1 y α y u contínuas, I_u es contínua de $P_m \to R$; además por $\forall$ $p_n \in C^{\psi}$, $(1) = \max_{p' \in C} I_u(X^{(\infty)};\psi;p')$.

b) $C_*^{\psi} \subset P_m$, por lo tanto C_*^{ψ} es acotado de R^m

Veamos que C_*^{ψ} es cerrado de R^m; sea $p_n \in C_*^{\psi}$, basta ver que $\lim_{n\to\infty} p_n \in C_*^{\psi}$;

en efecto: por ser α y u contínuas, y $\lim_{n\to\infty} p_n \in C$ por ser C cerrado,

$$u(\alpha(\lim_{n\to\infty} p_n)) = u(\lim_{n\to\infty} \alpha(p_n)) = \lim_{n\to\infty} u(\alpha(p_n)) =$$
$= (1)$, por ser $\forall$ $p_n \in C_*^{\psi}$, $(1) = \max_{p' \in C'} u(p')$.

Definición 6. Dado el espacio paramétrico W, la distribución a priori $p(w)$, la aplicación $\psi=\psi(w)$, el experimento X sobre W y la función de incertidumbre u, definimos la incertidumbre e información medias, respectivamente, como:

$$u(p(w/\psi)) = \sum_{i=1}^{h} p(\psi_i)u(p(w/\psi_i))$$

$$I_u(X;w;p(w/\psi)) = \sum_{i=1}^{h} p(\psi_i) I_u(X;w;p(w/\psi_i))$$

Observación 3:

$\forall$ i = 1,...,h $p(w/\psi_i) =$

$$= \left(0,\ldots,0,\frac{p(w_{i1})}{p(\psi_i)},\ldots,\frac{p(w_{im_i})}{p(\psi_i)},0,\ldots,0\right)$$

Teorema 2. (inmediato). Sea el espacio paramétrico W, la distribución a priori $p(w)$, la aplicación $\psi = \psi(w)$, el experimento X sobre W y la función de incertidumbre contínua u. Entonces, $I_u(X^{(\infty)}; w; p(w/\psi)) =$

$$= \lim_{k\to\infty} I_u(X^{(k)}; w; p(w/\psi)) =$$

$$= u(p(w/\psi)) - \sum_{i,j} p(w_{ij})u(q_{ij}(w)).$$

Propiedad 3. Dado el espacio paramétrico W, la aplicación $\psi = \psi(w)$, el experimento X sobre W, y la función de incertidumbre contínua u, las aplicaciones de $P \subset R^m \to R$, $u(p(w/\psi))$ e $I(X^{(\infty)}; w; p(w/\psi))$, son ambas funciones contínuas y cóncavas de $p(w) \in P$.

Demostración:

a) $u(p(w/\psi))$ es contínua como función de $p(w)$.

Hay que ver que la función $f: P \to R$ tal que $f(p(w)) = u(p(w/\psi))$ es contínua, en efecto:

1) para cada i, la aplicación que a cada $p(w)$ le hace corresponder $u(p(w/\psi_i))$ es contínua de $p(w)$, por ser composición de las aplicaciones $P \xrightarrow{g_i} P \xrightarrow{u} R$, con $g_i(p(w)) = p(w/\psi_i)$ contínua por la observación 3, y u continua por hipótesis.

2) $p(\psi_i) = \sum_{j=1}^{m_i} p(w_{ij})$ como función de $p(w)$ es continua de $P \to R$.

3) $f(p(w)) = \sum_{i=1}^{h} p(\psi_i)\ u(p(w/\psi_i))$ es continua, por ser suma y producto de funciones contínuas.

b) $u(p(w/\psi))$ es cóncava como función de $p(w)$, lo cual se obtiene directamente del teorema 2.2. de /6/.

c) $I(X^{(\infty)};\ w;\ p(w/\psi)) =$

$= u(p(w/\psi)) - \sum_{ij} p(w_{ij})\ u(q_{ij}(w))$ es continua y cóncava de $p(w)$ por a) y b).

Definición 7. Dadas W, $X, \psi = \psi(w)$, u contínua y C compacto de la definición 3, decimos que la distribución $\Pi^{(\psi,w)}(w)$ sobre W es de referencia respecto de (ψ,w) si $\Pi^{(\psi,w)}(w) \epsilon C^{\psi}$ y es tal que maximiza $I_u(X^{(\infty)};\ w;\ p(w/\psi))$ entre las $p(w) \epsilon C^{\psi}$.

Definición 8. Dadas W, $\psi = \psi(w)$ y C compacto de la definición 4, decimos que la distribución $\Pi_*^{(\psi,w)}(w)$ sobre W es la a priori no-informativa respecto de (ψ, w) si $\Pi_*^{(\psi,w)}(w) \epsilon C_*^{\psi}$ y es tal que maximiza $u(p(w/\psi))$ entre las $p(w) \epsilon C_*^{\psi}$.

Teorema 3. (inmediato). Sea u una función de incertidumbre contínua y decisiva. Para todo espacio paramétrico W discreto y finito, para todo experimento X, para toda clase de a prioris admisibles compacta C y para toda aplicación $\psi = \psi(w)$ dadas, se verifica: $\Pi(w) = \Pi_*(w)$, $\Pi^{\psi}(w) = \Pi_*^{\psi}(w)$ y $\Pi^{(\psi,w)}(w) = \Pi_*^{(\psi,w)}(w)$.

5. REFERENCIAS.

/1/ BARNARD, G.A.: "The frecuency justification of certain sequential tests". Biometrika 39, pp. 144-150. (1952).

/2/ BAYES, T.R.: "Essay towards solving a problem in the doctrine of chances". Reprinted in Biometrika 45 (1958), pp. 293-315. (1763).

/3/ BERNARDO, J.M.: "The use of Information in the Design and Analysis of Scientific Experimentation". PH. D. Thesis. University of London. (1975).

/4/ BERNARDO, J.M.: " Una medida de la información útil proporcionada por un experimento". Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Física y Naturales 72, pp. 419-440. (1978).

/5/ BERNARDO, J.M.: "Reference posterior distribución for Bayesian reference". J. Roy Statis. Soc. B., 41, pp. 113-147. (1979).

/6/ DE GROOT, M.H.: "Uncertainty, information, and sequential experiments". Ann. Math. Statist. 33, pp. 404-419. (1962).

/7/ DE GROOT, M.H.: "Optimal Statistical Decisions". New York. Mc Graw. (1970).

/8/ GARCIA-CARRASCO, M.P.: "Algunas extensiones y consecuencias de la medida de información cuadrática". XIV Reunión Nacional de Estadística, I.O. e Informática. Granada. Vol. I, pp. 444-454. (1984).

/9/ GARCIA-CARRASCO, M.P.: "Algunas propiedades y casos particulares de la incertidumbre generalizada".Estadística Española. Pendiente de publicación. (1985).

/10/ HARTIGAN, J.A.: "Invariant prior distributions". Ann. Math. Statis. 35, pp.836-845. (1964).

/11/ JAYNES, E.T.: "Prior Probabilities". IEEE Trans. Systems, Science and Cybernetics, SSC-4, pp. 227-241. (1968).

/12/ JEFFREYS, H. : "Theory of Probability" (3 rd. ed.), Oxford, Clarendon Press. (1939/67).

/13/ JEFFREYS, H.: "An invariant form for the prior probability in estimation problems". Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 186, pp. 453-461. (1946).

/14/ KINGMAN, J.F., and TAYLOR, S.J.: "Introduction to Measure and Probability" -- Cambridge University Press. (1973).

/15/ LAPLACE, P.S.: "Theorie Analitique des Probabilités". Reprinted (1960), Paris, Coucier (1825).