Demostración:

El cuadrado de la M-divergencia $M_{n,\phi}(x,y)$ puede escribirse como

$$M^2_{n,\phi}(x,y)=2.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}.(\phi(x_i)+\phi(y_i))-(\phi(x_i).\phi(y_i))^{\frac{1}{2}}\right)$$

Por el lema anterior, de $\phi(x)$ log-convexa se deduce que

$$M^2_{n,\phi}(x,y)\leq 2.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}.(\phi(x_i)+\phi(y_i))-\phi\left(\frac{x_i+y_i}{2}\right)\right)$$

Así, cuando $\phi(x)$ es log-convexa,

$M_{n,\phi}(x,y)\leq 2.J_{n,\phi}(x,y)$.

Recíprocamente, si $M^2_{n,\phi}(x,y)\leq 2.J_{n,\phi}(x,y)$ en $I^n x I^n$, para todo z,t de I, tomando x=(z,..z) e y=(t,..,t) se tendrá la desigualdad

$$\frac{1}{2}.M^2_{n,\phi}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}.(\phi(z)+\phi(t))-(\phi(z).\phi(t))^{\frac{1}{2}}\right)\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}.(\phi(z)+\phi(t))-\phi\left(\frac{z+t}{2}\right)\right)=J_{n,\phi}(x,y)$$

de la que se deduce

$$-n.(\phi(z).\phi(t))^{\frac{1}{2}}\leq -n.\phi\left(\frac{z+t}{2}\right)$$

para todo z,t de I, resultando a partir del lema 1 que $\phi(x)$ es log-convexa en I.

Corolario 4.1

Si $\psi(x)=\phi(x)/x$ es cóncava en I y $\phi(x)$ es log-convexa en I, entonces

$$K_{n,\phi}(x,y)\geq 4.J_{n,\phi}(x,y)\geq 2.M^2_{n,\phi}(x,y)\geq 0$$

Demostración:

Por ser $\phi(x)$ positiva y log-convexa en I, $\phi''(x)$ debe ser positiva en I, resultando de /4/, de $\phi(x)$ convexa en I y de $\psi(x)$ cóncava en I que

$$K_{n,\phi}(x,y)\geq 4.J_{n,\phi}(x,y)$$

y de considerar la proposición anterior, el corolario es inmediato.

5. SOBRE LA CONVEXIDAD DE LA M-DIVERGENCIA.

En esta última parte vamos a considerar ciertas propiedades relativas a la convexidad de la M-divergencia, convexidad que tendrá su interés en aspectos de inferencia estadística relacionados con el cálculo de la estimación máximo verosímil.

Proposición 5.1

$M^2_{n,\phi}(x,y)$ es convexa en $I^n x\, I^n$ si y sólo si $M^2_{1,\phi}(x,y)$ es convexa en IxI.

Demostración:

Es evidente comprobar que $M^2_{n,\phi}(x,y)=$

$$=\sum_{i=1}^{n}M^2_{1,\phi}(x_i,y_i)$$

Así, si $M^2_{1,\phi}(x,y)$ es convexa en IxI, $M^2_{n,\phi}(x,y)$ será convexa en $I^n x I^n$ por ser la suma de convexas.

Recíprocamente, para todo z,t de I podemos tomar x=(z,...,z), y=(t,...,t), resultando

$$M^2_{n,\phi}(x,y)=n.M_{1,\phi}(z,t)$$

y de la convexidad de $M^2_{n,\phi}(x,y)$ en $I^n x I^n$ se deduce la convexidad de $M^2_{1,\phi}(z,t)$ en IxI.

Proposición 5.2

$M^2_{n,\phi}(x,y)$ es convexa en términos de $\underline{\Phi}(x)=$ $=(\phi(x_1),\ldots,\phi(x_n))$, es decir, $M^2_{n,\phi}(\lambda(\Phi(x),\Phi(y))+(1-\lambda)(\Phi(z),\Phi(t)))\leq\lambda M^2_{n,\phi}(\Phi(x),\Phi(y))+$ $+(1-\lambda)M^2_{n,\phi}(\Phi(z),\Phi(t))$

Demostración : De la propiedad 4.1

$$M^2_{n,\phi}(x,y)=L_{n,\psi}((\phi(x_1),\ldots,\phi(x_n)),(\phi(y_1),\ldots,\phi(y_n)))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\phi(y_i).f\left(\frac{\phi(x_i)}{\phi(y_i)}\right)$$

con $f(t)=(1-\sqrt{t})^2=\psi^2(t)$

A partir de /4/ y de f(t) convexa en R^+ se deduce que $L_{n,\psi}(\phi(x),\phi(y))$ es convexa en $R^n_+ \times R^n_+$.

Corolario 5.1

El cuadrado de la distancia Matusita es convexo en $R^n_+ \times R^n_+$

Demostración:

Ya que la distancia Matusita al cuadrado se obtiene con $\phi(x)=x$, $M^2_{n,\phi}(x,y)$ es convexa en x,y.

6. CONCLUSIONES.

En este trabajo se ha estudiado la relación entre la M-divergencia y la J-divergencia, resultando la relación con la K-divergencia una consecuencia inmediata del estudio de Burbea & Rao /4/.

Por otro lado se han estudiado ciertos aspectos de la convexidad de la M-divergencia, -- propiedad de gran interés en estudios de teoría de la información e inferencia estadística. En este sentido, la M-divergencia se ha obtenido como una L-divergencia entre elementos a los que se les ha aplicado una transformación.

7. BIBLIOGRAFIA.

/1/ AGRESTI, A. y AGRESTI, B.F.: "Statistical analysis of qualitative variation". Social Methodology, 204-237 (1978).

/2/ BHATTACHARYA, A.: "A measure of divergence between two multinomial populations" Sankhya 7, 401 (1946).

/3/ BURBEA, J. y RAO, C.R.: "Entropy differential metric, distance and divergence measures in probability spaces: a unified approach". Jornal of multivariate analysis, V.12, nº 4. (1982).

/4/ BURBEA, J. y RAO, C.R.: "On the convexity of some divergence measures based on entropy functions". IEE transactions on information theory" V. 28, 3, 489-495 (1982) (1982).

/5/ BURBEA, J. & RAO, C.R.: "Differential metrics in probability spaces". Prob. Math.Stat., 3, 241-258 (1984)

/6/ BURBEA, J.: "Informative geometry of probability spaces. Technical Report, nº 84-52, Univers. Pittsburgh. (1984).

/7/ CSISZAR, I.: "A class of measures of informativity of observation channels". Perioriodica Math. Hungarica, V.2, 191-213. (1972).

/8/ DAROCZY, Z.: "Generalized information functions". Inform. and Contr., V. 16, 83-88 (1970).

/9/ GOOD, I.J.: "Maximum entropy for hypothesis formulation, especially for multidimensional contingency tables". Anals Math. Statistics, 911-933. (1963).

/10/ HAVRDA, M.E. y CHARVAT, F.: "Quantification method of classification processes: concept of structural α-entropy.Kybernetica, V.3, 30-35. (1967).

/11/ JEFFREYS, H.: "Theory of probability." Oxford Univ. Press. London (1948).

/12/ KULLBACK, S. y LEIBLER, R.A.: "On information and sufficiency". Ann. Mathe Statist., V.22, 79-86 (1951).

/13/ MATTAI, A. y RATHIE, P.N.: "Basic concepts in information theory and statistics". John Wiley, New York.(1974).

/14/ MATUSITA, K.: "Decision rules, based on the distance, for problems of fit, two samples, and estimation". Anals Math. Statistical, V.26, 631-640 (1955).

/15/ MATUSITA, K.: "Decision rule based on the distance for the classification problem". Ann. Inst. Statis. Math., V.8, 66-77. (1957).

/16/ MATUSITA, K.: "Distance and decision rules". Annals of the Ins. Statis. Math., V. 14, 305-315. (1964).

/17/ MATUSITA, K.:"Classification based on distance in multivariate Gaussian cases". Proceed. of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and probability. (1966).

/18/ NEI, M.: "The theory of genetic distance and evolution of human races". Japan, J.Human Genet. V. 23, 341-369. (1978).

/19/ RAO, C.R.: "The utilization of multiple measurements in problems of biological classification". J.Roy Statist. Soc. V.10, 159-193 (1948).

/20/ RENYI, A.: "On measures of entropy and information". Proceedings fourth Berkeley Symp., V.1, 547-561 (1961).

/21/ SIMPSON, E.H.: "Measurement of diversity". Nature 163-688, (1949).

/22/ SHAKED, M.: "Statistical inference for a class of life distributions". Com. Stat. Theo. Math., A6(13), 1323-1339. (1977).

/23/ SHANNON, C.E.: "A mathematical theory of communications". Bell System. Tech. V. 27, 379-423, 623-656. (1948).

/24/ WALD, A.: "Statistical Decision Functions". John Wiley, New York. (1950).