

EL MÉTODO DE MONTE CARLO APLICADO AL CÁLCULO DE BLINDAJES DE FOTONES

CONSIDERACIONES ACERCA DE LA OPTIMIZACIÓN DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

PEDRO COLL BUTI
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Se propone una metodología basada en la utilización de operadores matriciales para el análisis del problema de la transmisión de fotones a través de una placa. Considerando el importante papel que, en la implantación de las técnicas de Monte Carlo, desempeñan las consideraciones relacionadas con el error estadístico (Variancia) asociado a los resultados obtenidos, se dan unas estimaciones de dichos errores, al objeto de optimizar el tamaño de la muestra.

Keywords: A MONTE CARLO METHOD, PHOTON SHIELDING, ERRORS ESTIMATORS, PHOTON ATTENUATION.

1. INTRODUCCION.

Como es sabido, el método de Monte Carlo permite resolver numéricamente problemas de la física matemática mediante la simulación de variables aleatorias. Su utilidad y eficacia se ha hecho cada vez más palpable a medida que se ha incrementado la potencia de cálculo y memoria de los ordenadores y se usa, tanto para simular procesos en cuya marcha intervienen variables aleatorias, como para resolver problemas matemáticos (ecuaciones), aunque éstos no tengan relación con procesos aleatorios.

Con el apoyo de medios informáticos adecuados, en teoría, el método presenta grandes ventajas. Sin embargo, cabe advertir del importante papel que, en su implantación, desempeñan las consideraciones relativas al error estadístico (variancia) asociado a los resultados obtenidos, el cual va íntimamente ligado al tamaño de la muestra (número de historias) y a las leyes de probabilidad empleadas. La optimización práctica de este aspecto ha conducido a la aplicación de una serie de técnicas complementarias, al objeto de reducir el error o el tamaño de la muestra. Entre dichas técnicas cabe citar, por su uso habitual, la introducción de los denominados factores de peso $/1/$, $/2/$, el uso

de leyes de probabilidad (variables correlacionadas) distintas de las que gobiernan el fenómeno real, siempre que se cumplan ciertas condiciones, $/3/$, $/4/$, etc.

En el presente artículo, se trata el problema clásico de la interacción de un haz de fotones sobre una placa con el objetivo básico de proporcionar unos estimadores previos de la variancia (acotación del error) para las diversas magnitudes consideradas en la resolución del problema. Asimismo, se aporta un método basado en operadores matriciales para el seguimiento de las historias de cada fotón.

Para una mayor claridad conceptual de los objetivos indicados se analiza el problema planteado utilizando las probabilidades reales. No obstante, la metodología utilizada podrá aplicarse sin dificultades a casos en que se usen factores de peso o variables correlacionadas.

2. LOS PRINCIPIOS BASICOS DEL METODO.

Como es conocido, el fundamento del método de Monte Carlo hay que buscarlo en el teorema del límite central de la teoría de probabili-

dades. Según ello, el valor medio de una variable aleatoria, ξ , puede estimarse a partir del valor medio de N valores resultantes del sorteo de la variable, el cual se distribuye aproximadamente según una ley normal, cuya variancia viene dada por $\sigma(\xi) / \sqrt{N}$.

En general, los valores de la variable ξ se obtienen partiendo de un sorteo de la variable aleatoria γ equiprobable en el intervalo $(0,1)$, es decir, generando números aleatorios en dicho intervalo mediante las diversas técnicas existentes al respecto. La relación entre los valores de γ y de ξ , viene dada por:

$$\gamma = \int_a^\xi p(x) dx \quad (1)$$

siendo $p(x)$ la densidad de probabilidad correspondiente a la variable aleatoria ξ , definida en un intervalo (a,b) .

A menudo resulta difícil explicitar analíticamente la función $\xi = f(\gamma)$, a partir de la ecuación (1), en cuyo caso suele recurrirse a procedimientos numéricos (métodos de Neumann), /2/, /5/, /6/.

3. APLICACION AL ANALISIS DE LA TRANSMISION DE FOTONES A TRAVES DE UNA PLACA PLANA.

Se trata de un clásico problema de radioprotección. Supóngase que se trata de analizar la proporción de fotones que logran atravesar una placa de espesor finito y dimensiones laterales infinitas, sin haber sufrido ninguna interacción, así como la proporción que atraviesa habiendo sufrido una o varias interacciones de dispersión (efecto Compton) en el seno de la placa y los fotones retrodispersados, es decir, aquellos que emergen de dicha placa por el mismo plano de incidencia.

Supóngase, a efectos simplificados, que se trata de un haz paralelo y monoenergético de fotones de energía E_0 , incidiendo normalmente sobre la placa de espesor t , tal como se indica en la Figura 1.

Sean $\mu(E_0)$ el coeficiente de atenuación del material de la placa (homogéneo e isotropo) y $\mu_c(E_0)$ el coeficiente o sección eficaz

microscópica para las interacciones Compton, ambos dependientes de la energía de los fotones.

La probabilidad de que un fotón incidente de energía E_0 recorra una distancia r en el interior de la placa, sufriendo una interacción entre r y $r + dr$ será:

$$p(r)dr = \mu(E_0)e^{-\mu(E_0)r}dr \quad (2)$$

Partiendo de un valor γ_0 de la variable aleatoria equiprobable en el intervalo $(0,1)$, el correspondiente sorteo de la variable r proporciona, de acuerdo con (1) y (2), un valor r_0 tal que se tendrá:

$$\gamma_0 = \int_0^{r_0} \mu(E_0)e^{-\mu(E_0)r} dr$$

es decir:

$$r_0 = -\frac{1}{\mu(E_0)} \ln(1-\gamma_0) \equiv -\frac{1}{\mu(E_0)} \ln \gamma_0 \quad (3)$$

ya que la variable $1 - \gamma$ tiene la misma distribución que γ .

Si $r_0 > t$ el fotón atraviesa la placa sin interaccionar. Si $r_0 < t$ la interacción de ese fotón puede conducir a una absorción o a una dispersión en el interior de la placa.

Un nuevo número aleatorio γ_{to} (tipo ruleta rusa) definirá el tipo de interacción.

Si $\gamma_{to} > \mu_c(E_0)/\mu(E_0)$ habrá que considerar el fotón absorbido.

Si $\gamma_{to} < \mu_c(E_0)/\mu(E_0)$ será dispersado por efecto Compton.

El análisis se complica en el caso de que se de la segunda eventualidad, ya que dicho fotón dispersado tendrá una energía que será función del ángulo polar de dispersión θ y dicho ángulo no es equiprobable.

De acuerdo con la formulación del efecto Compton, se tendrá:

$$E_1 = \frac{E_0}{1+k(1-\cos\theta)} \quad \text{con } k = \frac{E_0}{m_0c^2} = \frac{E_0(\text{Mev})}{0,511} \quad (4)$$

La sección eficaz microscópica diferencial de Klein-Nishina para la dispersión Compton, vie

ne dada, /7/, por:

$$\frac{d\sigma_c(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left[1+k(1-\cos\theta) \right]^{-2} \left[1+\cos^2\theta + \frac{k^2(1-\cos\theta)^2}{1+k(1-\cos\theta)} \right] \quad (5)$$

siendo r_0 el radio equivalente del electrón ($r_0 = 2,817 \cdot 10^{-13}$ cm).

La sección eficaz microscópica total viene dada por:

$$\sigma_c = 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{1+k}{k^2} \left[\frac{2(1+k)}{1+2k} - \frac{\ln(1+2k)}{k} \right] + \frac{\ln(1+2k)}{2k} - \frac{1+3k}{(1+2k)^2} \right\} \quad (6)$$

La probabilidad de que, en la colisión, el fotón sea dispersado con un ángulo polar comprendido entre θ y $\theta + d\theta$, será

$$p(\theta)d\theta = \frac{1}{\sigma_c} \frac{d\sigma_c(\theta)}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta \quad (7)$$

El sorteo de un valor para el ángulo polar deberá proporcionar un valor θ_1 tal que se cumpla:

$$\gamma(\theta_1) = \int_0^{\theta_1} \frac{1}{\sigma_c} \frac{d\sigma_c}{d\Omega} 2\pi \sin\theta d\theta$$

es decir:

$$\gamma(\theta_1) = \left\{ -\frac{1}{1+k(1-\cos\theta_1)} \frac{1+2k}{k^3} - \frac{1}{k^2} \cos\theta_1 - \frac{1}{2k} \frac{1}{[1+k(1-\cos\theta_1)]^2} + \ln \left[1+k(1-\cos\theta_1) \right] + \frac{k^2-2(1+k)}{k^3} \frac{2+6k+k^2}{2k^3} \right\} \frac{\pi r_0^2}{\sigma_c} \quad (8)$$

Como es bien conocido, para la energía de los fotones de interés en el cálculo de blindajes, la dispersión Compton es bastante isotropa, por lo que es bastante habitual en esos casos utilizar este tipo de aproximación, con la cual se simplifica considerablemente el sorteo del ángulo polar, al tener, para dispersiones isotropas:

$$\cos\theta_1 = 1 - 2\gamma(\theta_1) \quad (9)$$

Dado que el ángulo azimutal ψ es equiprobable, su sorteo conducirá a un valor:

$$\psi_1 = 2\pi\gamma(\psi_1) \quad (10)$$

Una vez conocidos esos valores, habrá que sortear la nueva distancia recorrida r_1 , cuyo valor será:

$$r_1 = -\frac{1}{\mu(E_1)} \ln\gamma_1$$

Si ϕ es el ángulo formado por la nueva dirección del fotón con la normal a la placa, para saber si dicho fotón ha salido o no de la misma, habrá que considerar las siguientes relaciones:

Si $r_0+r_1\cos\phi > t$ el fotón escapa por la cara posterior.

Si $r_0+r_1\cos\phi < 0$ el fotón escapa por la cara anterior.

Si $0 \leq r_0+r_1\cos\phi \leq t$ el fotón sufrirá otra interacción en el seno de la placa.

Para una correcta determinación en cada colisión del ángulo ϕ , proponemos la siguiente metodología basada en operadores matriciales que permitan, para cada recorrido del fotón entre dos colisiones Compton, conocer exactamente su posición definiendo un vector que coincida con la trayectoria del mismo.

Utilizando unos ejes cartesianos, con el eje OZ normal a la placa, de acuerdo con la Figura 2, existirá una relación entre dos vectores consecutivos correspondientes a dos trayectos recorridos por el fotón. Conocidas las componentes del vector \vec{v}_{n-1} , de módulo r_{n-1} y energía E_{n-1} , el sorteo de los ángulos θ_n y ψ_n , así como el del módulo r_n , definirá el vector \vec{v}_n siguiente:

Sean i' , j' y k' tres vectores unitarios situados sobre los ejes $O'X'$, $O'Y'$ y $O'Z'$, tales que $O'Z'$ coincida con la dirección \vec{v}_{n-1} y $O'Y'$ sea perpendicular a OX .

Las componentes del vector \vec{v}_n en esos ejes serán:

$$\vec{v}_n = v_{1,n} i' + v_{2,n} j' + v_{3,n} k'$$

Las componentes de i' , j' y k' , tomando como referencia los ejes OX, OY y OZ, definen una matriz cambio de base que permite tener las componentes de \vec{v}_n respecto a dichos ejes.

Es decir:

$$\vec{v}_n = \frac{r_n}{r_{n-1}} A(\vec{v}_{n-1}) \vec{u}'_n \quad (11)$$

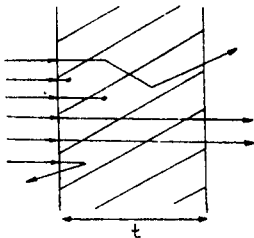


Figura 1: Haz de fotones incidentes sobre una placa plana.

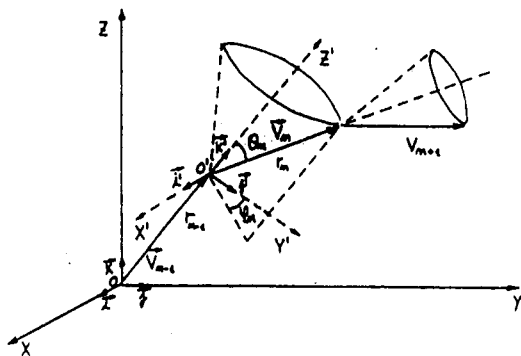


Figura 2: Relación entre dos tramos consecutivos de la trayectoria.

siendo:

$$A(\vec{v}_{n-1}) = \begin{bmatrix} \frac{v_{2,n-1}^2 + v_{3,n-1}^2}{\sqrt{v_{2,n-1}^2 + v_{3,n-1}^2}} & 0 & v_{1,n-1} \\ -\frac{v_{1,n-1} \cdot v_{2,n-1}}{\sqrt{v_{2,n-1}^2 + v_{3,n-1}^2}} & \frac{v_{3,n-1} r_{n-1}}{\sqrt{v_{2,n-1}^2 + v_{3,n-1}^2}} & v_{2,n-1} \\ -\frac{v_{1,n-1} \cdot v_{3,n-1}}{\sqrt{v_{2,n-1}^2 + v_{3,n-1}^2}} & -\frac{v_{2,n-1} \cdot r_{n-1}}{\sqrt{v_{2,n-1}^2 + v_{3,n-1}^2}} & v_{3,n-1} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}'_n = \begin{bmatrix} \text{sen } \theta_n \text{ sen } \psi_n \\ \text{sen } \theta_n \text{ cos } \psi_n \\ \text{cos } \theta_n \end{bmatrix}$$

La relación:

$$\vec{v}_n = \frac{r_n}{r_{n-1}} A(\vec{v}_{n-1}) \vec{u}'_n$$

definié una secuencia que permite ir obteniendo los sucesivos vectores \vec{v}_n , sorteando cada vez los ángulos θ_n y ψ_n (que proporcionan \vec{u}'_n y E_n) y r_n .

El primer vector a considerar, será $\vec{v}_0(0,0,r_0)$ y los siguientes:

$$\vec{v}_1 = \frac{r_1}{r_0} A(\vec{v}_0) \vec{u}'_1 = r_1 \vec{u}'_1$$

$$\vec{v}_2 = \frac{r_2}{r_1} A(\vec{v}_1) \vec{u}'_2 = r_2 A(\vec{u}'_1) \vec{u}'_2$$

$$\vec{v}_3 = \frac{r_3}{r_2} A(\vec{v}_2) \vec{u}'_3 = r_3 A(A(\vec{u}'_1) \cdot \vec{u}'_2) \vec{u}'_3$$

En una notación más compacta, se tendrá:

$$\vec{v}_n = r_n A^{(n-1)} \cdot \vec{u}'_n \quad (12)$$

Al cabo de n interacciones, la componente Z del vector \vec{v}_n , es la que permitirá averiguar la situación del fotón:

Si $\sum_{n=0}^N v_{3,n} > t$ habrá atravesado la placa en el sentido de flujo.

Si $\sum_{n=0}^N v_{3,n} < 0$ habrá atravesado la placa en sentido contrario.

Si $0 \leq \sum_{n=0}^N v_{3,n} \leq t$ sufrirá una nueva interacción.

El espectro direccional de los fotones que atraviesan la placa vendrá dado por el último vector posicional v_n , de forma que se tendrá $\cos\phi = v_{3,n}/r_n$, siendo ϕ el ángulo formado por la dirección del fotón emergente con la normal a la placa.

El espectro energético de dichos fotones vendrá dado por la distribución de los valores E_n .

El "grado de degradación" o número de colisiones sufridas por los fotones emergentes vendrá dado por los respectivos valores de n .

El punto de emergencia vendrá dado por las componentes x e y del vector \vec{v}_n .

Este algoritmo presenta una indeterminación en el caso en que algunos de los vectores \vec{v}_{n-1} tengan nulas la segunda y tercera componente. Esta indeterminación se soslaya -- utilizando, en tales casos, la matriz:

$$A(v_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{n-1} \\ 0 & r_{n-1} & 0 \\ -r_{n-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la Figura 3 se da una representación esquemática de las secuencias de cálculo para el problema analizado.

4. ESTIMACION DEL ERROR DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

De acuerdo con la aplicación del teorema del límite central, para valorar el error asociado a cualquiera de las variables obtenidas, debe conocerse la variancia de la ley de probabilidad correspondiente.

En el caso de la placa analizado, para la proporción de fotones que la atraviesan en el

sentido del flujo sin interaccionar, la ley de probabilidad vendrá dada por una variable aleatoria v , cuyos valores son 1 y 0, con probabilidades respectivas $e^{-\mu t}$ y $1-e^{-\mu t}$, la cual puede expresarse en la forma:

$$v \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-\mu t} & 1-e^{-\mu t} \end{pmatrix}$$

Su valor medio $\langle v \rangle$ y su variancia v_v valen:

$$\langle v \rangle = e^{-\mu t}$$

$$v_v = e^{-\mu t} - e^{-2\mu t}$$

La relación entre el error relativo y el tamaño de la muestra (número de historias), de acuerdo con el teorema del límite central y considerando un intervalo de confianza $\pm 3\sigma$, será:

$$\epsilon = \frac{3\sqrt{e^{-\mu t}(1-e^{-\mu t})}}{e^{-\mu t} \sqrt{N}} \quad (13)$$

Para una placa con $\mu t = 1$, el número de historias necesario para tener un error del 5%, sería $N=6.186$, con $\langle v \rangle = 0,367$.

Si la variable considerada fuese la proporción de fotones que atraviesan la placa en el sentido del flujo, habiendo sufrido una única colisión de dispersión, la probabilidad correspondiente, $p^+(1)$, puede estimarse según:

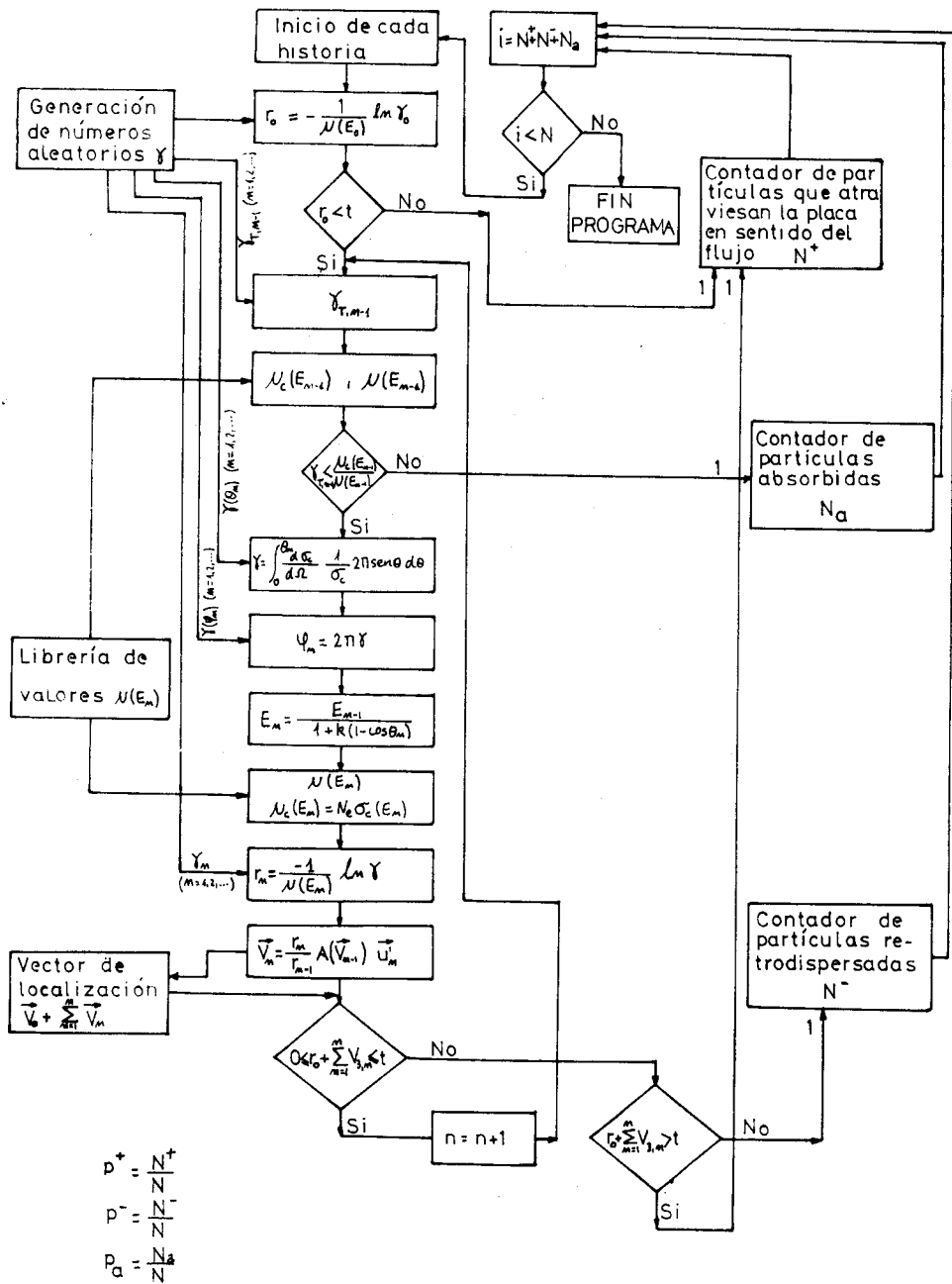


Figura 3 Diagrama de la secuencia de cálculo para la transmisión de fotones a través de una placa con un número total de historias N

$$p^+(1) = \int_{x=0}^{x=t} \int_{z=t-x}^{z=\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \mu e^{-\mu x \left(\frac{\mu_c}{\mu}\right)} \frac{1}{2} \sin\theta \mu' e^{-\frac{\mu' z}{\cos\theta}} \frac{1}{\cos\theta} dx dz d\theta \quad (14)$$

habiendo considerado, a efectos simplificados, la isotropía de las dispersiones, un mismo valor μ' para el coeficiente de atenuación después de la colisión y siendo z la proyección, en dirección del flujo, de la distancia recorrida tras dicha colisión.

La integral tiene la siguiente solución analítica:

$$p^+(1) = \frac{1}{2} \frac{\mu_c}{\mu} \left\{ -e^{-\mu t} + E_2(\mu' t) + \frac{\mu'}{\mu} e^{-\mu t} \left[E_1(\mu' t) - E_1((\mu' - \mu)t) + \ln \frac{\mu'}{\mu' - \mu} \right] \right\} \quad (15)$$

siendo E_1 y E_2 respectivamente las funciones integrales exponenciales de primer y segundo orden, /8/, /9/.

Definiendo como antes la variable aleatoria $v^+(1)$ en la forma:

$$v^+(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^+(1) & 1-p^+(1) \end{pmatrix}$$

La relación entre el error y el tamaño de muestra, será:

$$\epsilon(1) = \frac{3\sqrt{p^+ - (p^+)^2}}{p^+ \sqrt{N}} \quad (16)$$

Para una placa con $\mu t=1$ y con los valores $\mu'=8\mu$ y $\mu_c=0,7\mu$, (apropiados para fotones con energías cercanas a 1 Mev), se obtiene $p^+(1)=0,0087$, con lo que, si se utiliza el mismo número de historias halladas anteriormente ($N=6186$), el error asociado a la estimación de la proporción de los fotones que atraviesan la placa en el sentido del flujo, habiendo sufrido una colisión, será del 40,7%.

Para la probabilidad de que, con una única colisión, la partícula salga de la placa, en dirección contraria (retrodispersión), se tendrá:

$$p^-(1) = \frac{1}{2} \frac{\mu_c}{\mu} \left\{ 1 - e^{-\mu t} E_2(\mu' t) + \frac{\mu'}{\mu} \left[e^{-\mu t} E_1(\mu' t) - E_1((\mu + \mu')t) + \ln \frac{\mu'}{\mu + \mu'} \right] \right\} \quad (17)$$

Con los mismos valores anteriores, se obtiene $p^-(1)=0,2$ con un error asociado del 26,7%, para el mismo tamaño de muestra.

Es interesante destacar que la probabilidad de que una partícula, después de una inter-

acción de dispersión (supuesta isotropa) recorra una distancia hasta la siguiente colisión, tal que su proyección en dirección normal esté comprendida entre z y $z+dz$, viene dada por:

$$P(z) dz = \frac{\mu}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} e^{-\frac{\mu z}{\cos\theta}} d\theta dz \quad -\infty < z < \infty$$

expresión que puede ponerse en función de la integral exponencial de primer orden, en la forma:

$$P(z) dz = \frac{\mu}{2} E_1(\mu |z|) dz \quad (18)$$

ley de probabilidad cuyo valor medio y variancia son, respectivamente, $\langle z \rangle = 0$ y $v_z = 2/3\mu^2$.

Para el caso general, es decir, para la probabilidad de que una partícula atraviese la placa, en el sentido del flujo, habiendo sufrido n colisiones, se tendrá:

$$p^+(n) = \left(\frac{\mu_{C,0}}{\mu_0}\right) \int_0^t \mu_0 e^{-\mu_0 z_0} dz_0 \int_{-z_0}^{t-z_0} \left(\frac{\mu_{C,1}}{\mu_1}\right) p(z_1) dz_1 \dots \int_{-\sum_{i=0}^{n-2} z_i}^{t-\sum_{i=0}^{n-2} z_i} \left(\frac{\mu_{C,n-1}}{\mu_{n-1}}\right) p(z_{n-1}) dz_{n-1} \int_{t-\sum_{i=0}^{n-1} z_i}^{\infty} p(z_n) dz_n \quad (19)$$

Puede hallarse una cota inferior de $p^+(n)$ de la siguiente forma ($n > 2$):

$$p^+(n) \geq \left(\frac{\mu_{C,0}}{\mu_0}\right) (1-e^{-\mu_0 t}) \frac{1}{2} E_2(\mu_n t) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mu_{C,i}}{\mu_i}\right) \int_0^t p(z_i) dz_i =$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{\mu_{C,0}}{\mu_0}\right) (1-e^{-\mu_0 t}) E_2(\mu_n t) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\mu_{C,i}}{\mu_i}\right) (1-E_2(\mu_i t)) \quad (20)$$

Los valores del coeficiente μ_i , en general, irán aumentando, al aumentar el número de colisiones debido a la degradación de la energía. En consecuencia, en función de la media geométrica $(\mu_{C,i}/\mu_i)$, para $i=0,1,\dots,n-1$, se podrá poner:

$$p^+(n) \geq \frac{1}{2^n} \left(\frac{\mu_{C,i}}{\mu_i}\right)^n (1-e^{-\mu_0 t}) E_2(\mu_n t) (1-E_2(\mu_0 t))^{n-1} \quad (21)$$

Dependiendo del número de colisiones habidas, el valor de $E_2(\mu_n t)$, puede ser muy pequeño (μ_n muy elevado), lo cual puede conducir a estimaciones demasiado pequeñas de la cota inferior de la probabilidad. Para evitar este inconveniente, puede suponerse, de forma aproximada:

$$p^+(n) \approx \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\mu_{C,i}}{\mu_i}\right)^{n-1} (1-E_2(\mu_0 t))^{n-1} \int_0^t \mu_0 e^{-\mu_0 z_0} dz_0 \int_{t-z_0}^{\infty} p(z_n) dz_n =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{\mu_{C,i}}{\mu_i}\right)^{n-1} (1-E_2(\mu_0 t))^{n-1} p^+(1) \quad (22)$$

A partir de esta estimación, podrá relacionarse el error relativo con el tamaño de la muestra, es decir:

$$\epsilon(n) = \frac{3\sqrt{p^+(n) - (p^+(n))^2}}{p^+(n) \sqrt{N}}$$

La probabilidad global de que una partícula atraviese la placa en el sentido del flujo, será:

$$p^+ = \sum_{n=0}^{\infty} p^+(n) \quad (23)$$

Una metodología parecida podría utilizarse para estimar o acotar previamente la probabilidad de que una partícula atraviese la placa con un ángulo ϕ dado respecto a la normal y poder, en consecuencia, programar el número de historias necesarias para obtener, con un error dado, el espectro direccional de salida.

5. CONCLUSIONES.

En los últimos años ha sido muy notoria la introducción de las técnicas de Monte Carlo en el ámbito de los cálculos de blindajes en radioprotección, así como en la resolución de la ecuación del transporte para el estudio del comportamiento de una población de partículas en un medio determinado. El problema analizado acerca de la transmisión de fotones a través de una placa es clásico y suele abordarse mediante el método de Monte Carlo utilizando variados modelos simplificados. En este artículo se ha tratado el problema - mediante el uso de operadores matriciales y adoptando las leyes de probabilidad reales.

Dado el elevado número de historias necesarias para obtener errores pequeños en las estimaciones de las variables, es fundamental, en este método, analizar previamente la variancia de las leyes de probabilidad al objeto de poder minimizar el tamaño de la muestra y consecuentemente el tiempo de uso de ordenador. En esta línea se ha presentado -- una metodología para la determinación de una cota inferior del error para las probabilidades de salida de la placa en función del número de colisiones habidas en la misma.

6. BIBLIOGRAFIA.

- /1/ Y.A. SHERIDER (Editor): "The Monte Carlo Method". Pergamon Press. New York 1966.
- /2/ J.J. DUDERSTADT, W.R.MARTIN: "Teoría de Transporte". CECSA. México. D.F. 1983, pg. 587-592.
- /3/ A. DUBI, H. RIEF: "A Note on Some Aspects of Sensitivity Analysis in Monte Carlo". Proceeding of Specialists' Meeting on Nuclear Data and Benchmarks for Reactors

Shielding. Organizado por NEA y OCDE. Octubre 1980, pg. 181-190.

- /4/ G.DEJONGKE, J.GOMMORD, J.C.NIMAL: "Etude de Perturbations Utilisant la Methode de Monte Carlo". Proceeding of Specialists' Meeting on Nuclear Data and Benchmarks for Reactors Shielding. Organizado por NEA y OCDE. Octubre 1980, pg. 191-203.
- /5/ G.G. BIRO: "Application of the Monte Carlo Method to Shielding", en Engineering Compendium on Radiation Shielding. Vol.I, R.G. Jaeger (ed.). Springer Verlag, New York, 1968, Sec. 3.1. pg. 101-124.
- /6/ M. LEIMDORFER: "A Monte Carlo Method for the Analysis of Gamma Radiation Transport from Distributed Sources in Laminated Shields". Nukleonik 6, H.2.1964.
- /7/ R.D. EVANS: "The Atomic Nucleus". Mc.Graw Hill. New York, (1955).
- /8/ M. ABRAMOWITZ, A., STEGUN (eds.): "Handbook of Mathematical Functions". Dover Publications, Inc. New York, 1972. pg. 228-251.
- /9/ J. ALTER, A., FODERARO: "Mathematical Formulae and Graphs" en Engineering Compendium on Radiation Shielding, vol. I, R.G. Jaeger (ed.) Srpinger Verlag, New York, 1968, Sec. 6.8, pg. 411-415.