Qüestiió - V. 9, n.º 3 (setembre 1985) pp. 149-161

ALGUNOS ASPECTOS ACERCA DE LA CONSTRUCCIÓN DE DISTRIBUCIONES MULTIVARIANTES CON MARGINALES DADAS

PEDRO SÁNCHEZ-ALGARRA
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Este trabajo discute el problema de la construcción de distribuciones multivariantes donde las distribuciones marginales han sido fijadas. Se estudian dos casos. En el primer caso se analiza la construcción y propiedades de la clase general de Fréchet de las distribuciones multivariantes. En el segundo caso, se describen algunas familias paramétricas de distribuciones que dependen de ciertos parámetros de asociación estocástica. Finalmente se proponen algunas extensiones.

Keywords: MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS; FIXED-MARGINALS; FRÉCHET BOUNDS; STOCHASTIC DEPENDENCE; FARLIE GUMBEL-MORGENSTEN DISTRIBUTIONS.

1. INTRODUCCION.

Las interesantes interpretaciones experimentales de la distribución normal y su buena manejabilidad en contraste paramétrico de hipótesis, han propiciado que la hipótesis de normalidad haya dominado en la Inferencia Estadística hasta aproximadamente 1930. Posteriormente, en Economía, Teoría de la Fiabilidad, Análisis de Datos de Supervivencia, Física, Biología, Medicina, Psicología, etc. se han ido introduciendo y aplicando distribuciones no normales como modelos probabilísticos para describir variables contínuas observables. A menudo, la expresión matemática de la distribución se obtiene postulando ciertas condiciones razonables desde un punto de vista experimental. La mayor parte de las distribuciones no normales (uniforme, exponencial, Laplace, gamma, Cauchy, logística, log-normal, Weibull, Gumbel, Gompertz,..., etc.), se ajustan bien a una variable observable contínua X que cumple ciertas condiciones experimentales.

El panorama es muy distinto en el caso multivariante. No existe una variedad tan amplia de distribuciones. De hecho, nos encontramos, como ocurriera antes de 1930 en el caso univariante, con un claro predominio de la distribución normal multivariante. Son varias las causas:

a) Se reproducen en ella la mayoría de las propiedades de la normal univariante.

b) Se pueden describir sus características utilizando los recursos del álgebra lineal, que son muy bien conocidos.

c) Las distribuciones condicionadas y marginales son también normales.

d) La asociación estocástica entre las variables queda perfectamente descrita utilizando el coeficiente de correlación de Pearson.

Tales propiedades convierten a la distribución normal multivariante en una distribución manejable, de características muy bien conocidas y de fácil interpretación geométrica. Como una consecuencia, se conocen interesantes resultados en el problema de encontrar distribuciones exactas en el muestreo de ciertos estadísticos que aparecen en Inferencia Estadística Multivariante. Incluso, en algunos modelos multivariantes (Análisis Factorial, Modelos causales, LISREL, correlación canónica, etc.) la normal multivariante juega un papel fundamental, hasta el extremo de que es casi imposible abordar ciertos problemas partiendo de otra distribución distinta.

Debido a todas estas consideraciones, la normal multivariante ha sido la distribución pre

- Pedro Sánchez-Algarra, Universitat de Barcelona - Facultat de Biología - Departament de Bioestadística
Av. Diagonal, 637 - 08028 Barcelona

- Article rebut el setembre de 1985.

dilecta en las aplicaciones, sobre todo desde que a principios de este siglo, K. Pearson la incorporara a la Biometría, y desde que se tomara como distribución básica en Psicometría (Lawley, Maxwell, Jöreskog).

Las alternativas a la distribución normal multivariante como modelos probabilísticos que se ajusten a un conjunto de variables observables contínuas $X_1,\ldots,X_n$ son más bien escasas. Prácticamente, sólo podemos señalar algunas generalizaciones bivariantes del sistema de Pearson, los desarrollos de Gram-Charlier-Edgeworth, y algunas distribuciones exponenciales multivariantes /1/, que, en general, se asimilan a tiempos de vida de los componentes de un sistema. Si consideramos el caso de que las distribuciones univariantes de cada X_i sean de familia distinta, apenas se conoce nada acerca de las distribuciones conjuntas (salvo el caso trivial de independencia estocástica).

Existe un procedimiento para ajustar una distribución multivariante a n variables observables, que goza de gran operatividad y generalidad. Supongamos que hemos podido ajustar una función de distribución F_i a cada variable X_i (partimos de que no hay problema en conseguir este ajuste en el caso univariante). Se trata entonces de construir la distribución conjunta $F(x_1,\ldots,x_n)$ compatible con las marginales F_i, $i=1,\ldots,n$. Este procedimiento es eficaz si conseguimos que el camino a seguir para construir F no dependa de las expresiones funcionales de $F_1,\ldots,F_n$, de manera que la distribución conjunta obtenida sirva para todo tipo de distribuciones marginales. Este método de construcción ha dado pie a numerosos trabajos teóricos, y a ciertas aplicaciones en simulación estadística /2/ y mecánica cuántica /3/, /4/.

En este trabajo se hace una exposición general del problema de construir distribuciones multivariantes conocidas las marginales $F_1,\ldots,F_n$ y que expondremos en el contexto de dos situaciones diferentes pero relacionadas.

a) Análisis de la clase $\mathcal{F}$, llamada clase de Fréchet, de todas las distribuciones multivariantes con marginales $F_1,\ldots,F_n$.

Se trata de una clase muy amplia de distribuciones, de la que interesa obtener acotaciones, relaciones funcionales, distribuciones maximales y minimales, etc.

b) Análisis de familias paramétricas $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}$, donde θ es un vector de parámetros, que a menudo expresan dependencia estocástica. Una distribución de $\mathcal{F}_\theta$ tiene una expresión funcional conocida. De hecho, el problema no es construir una familia, sino que ésta cumpla con ciertas condiciones razonables, relativas a asociación estocástica, distribuciones singulares, manejo operativo, interpretación de los parámetros, etc.

2. CLASE BIVARIANTE DE FRECHET.

Antes de exponer el caso general, es necesaria una breve exposición del caso bivariante n=2.

Fréchet /5/ estudió acotaciones para las probabilidades de la unión y la intersección de sistemas finitos de sucesos, que mejorarán las clásicas desigualdades de Boole y Bonferroni. Obtuvo la desigualdad

$$\max\{P(A)+P(B)-1,\ 0\} \le P(A\cap B) \le \min\{P(A),P(B)\} \quad (1)$$

Independientemente, Hoeffding /6/ se planteó hallar la distribución bivariante H(x,y) que daba correlación máxima (o mínima) entre las variables aleatorias X, Y, fijadas sus distribuciones marginales F(x), G(y). Obtuvo que la correlación máxima se alcanzaba para

$$H^+(x,y)=\min\{F(x),\ G(y)\} \quad (2)$$

y la correlación mínima para

$$H^-(x,y)=\max\{F(x)+G(y)-1,\ 0\} \quad (3)$$

Relacionando (1), (2) y (3), vemos que toda distribución bivariante H(x,y), con marginales F(x), G(y), verifica

$$H^-(x,y) \le H(x,y) \le H^+(x,y) \quad (4)$$

A la clase $\mathcal{F}$ de tales distribuciones H se llama clase de Fréchet, y a las distribuciones extremales H^-, H^+ se les llama cotas de Fréchet.

Cuando se verifica $H=H^+$ se cumple la relación funcional

$$F(X) = G(Y) \text{ (c.s.)} \tag{5}$$

que implica que la distribución está concentrada en la curva creciente de ecuación implícita $F(x)=G(y)$. Análogamente, si $H=H^-$ se cumple

$$F(X)+G(Y)-1 = 0 \quad \text{(c.s.)} \tag{6}$$

y la distribución está concentrada en la curva decreciente $F(x)+G(y) = 1$ (véase /7/).

Desde luego, H^-, H^+, son distribuciones bivariantes, aunque degeneradas, y pertenecen a $\mathcal{F}$. Otro elemento destacado de $\mathcal{F}$ es

$$H^O(x,y) = F(x).G(y) \tag{7}$$

que recoge el caso de independencia estocástica entre X, Y.

Fréchet sugirió que cualquier familia de distribuciones debía contener H^-, H^+, H^O y propuso el sistema

$$H(x,y)=(1-\alpha-\beta)H^O(x,y)+\alpha H^+(x,y)+\beta H^-(x,y) \tag{8}$$
$$\alpha,\beta\geq 0 \qquad \alpha+\beta\leq 1$$

Posteriormente, otros autores (Plackett, -- Farlie, Gumbell, Mardia, Ruiz-Rivas, etc.) propusieron otros sistemas bivariantes uniparamétricos, con diversas propiedades, y cuyas versiones multivariantes, que sólo existen en algunos casos, estudiaremos en este mismo trabajo.

Kimeldorf & Sampson /8/ establecen que todo sistema bivariante

$$\{H_\alpha(x,y) \ / \ -1\leq\alpha\leq 1\} \tag{9}$$

dependiendo de un parámetro α (que mide asociación estocástica) debe verificar las siguientes cinco condiciones:

1) $H_1(x,y) = H^+(x,y)$
2) $H_o(x,y) = H^O(x,y)$
3) $H_{-1}(x,y) = H^-(x,y)$
4) Fijado (x,y), H_α debe ser contínua en $|\alpha|\leq 1$
5) Fijado $\alpha\epsilon(-1,1)$, H_α debe ser una distribución absolutamente contínua cuando F,G lo son.

Las condiciones de Kimeldorf y Sampson son bastante razonables. Las tres primeras concuerdan con las recomendaciones de Fréchet. La condición 4) impide añadir arbitrariamente H^+, H^-, H^O a una familia que no contenga tales elementos. Para $|\alpha| = 1$, H_α es singular, pero para $|\alpha|<1$ la condición 5) elimina combinaciones convexas que contengan H^+, H^-.

Un primer ejemplo de familia uniparamétrica /9/ es

$$H_\theta(x,y)=F(x)G(y)\{1+\theta[1-F(x)].[1-G(y)]\}$$
$$-1\leq\theta\leq 1 \tag{10}$$

que sólo verifica las condiciones 2), 4),5).

Verifican las cinco condiciones los sistemas de Plackett /10/, la traslación de la normal de Mardia /11/, y los sistemas de Kimeldorf y Sampson /8/ y Ruiz-Rivas /12/.

3. CLASE MULTIVARIANTE DE FRECHET.

Sea $\mathcal{F}$ la clase de distribuciones multivariantes cuyas marginales son $F_1,\ldots,F_n$. La generalización de (1) al caso de n sucesos es

$$\max\{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-n+1,\ 0\} \ P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leq$$
$$\leq \min\{P(A_1),\ldots,P(A_n)\} \tag{11}$$

(11) sugiere que la generalización de las cotas de Fréchet para $n>2$ consiste en definir

$$H^+(x_1,\ldots,x_n)=\min\{F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)\}$$
$$S^-(x_1,\ldots,x_n)=\max\{\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i)-n+1,\ 0\} \tag{12}$$

Entonces se verifica, para toda $F\epsilon\mathcal{F}$,

$$S^-(x_1,\ldots,x_n)\leq F(x_1,\ldots,x_n)\leq H^+(x_1,\ldots,x_n) \tag{13}$$

Sin embargo, S^- es tan sólo una pseudo-distribución de probabilidad (por tal motivo no hemos utilizado la notación H^-, aunque para $n=2$ es $S^-=H^-$).

Si indicamos por $\mathcal{S}$ el conjunto de las pseudo-distribuciones, es decir, las funciones

$S: R^n \to R$ tales que

a) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} S(x_1,\ldots,x_n) = 0 \qquad i = 1,\ldots,n$

b) S es creciente en cada variable,

c) $F_i(x_i) = \lim\limits_{\substack{x_j \to \infty \\ \forall j \neq i}} S(x_1,\ldots,x_n)$,

entonces, con la relación de orden parcial

$$S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow S_1(x_1,\ldots,x_n) \leq S_2(x_1,\ldots x_n)$$

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in R^n \qquad (14)$$

se cumple que $(\mathcal{S},\leq)$ tiene estructura de retículo distributivo no completo /13/.

Como (13) se cumple también para las pseudo-distribuciones (las cuales no definen una distribución de probabilidad en R^n), tenemos que S^- y H^+ son los elementos mínimo y máximo del retículo $(\mathcal{S},\leq)$.

Consideremos ahora la clase de Fréchet $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ Excepto el caso n=1, $\mathcal{F}$ no tiene estructura de retículo. Sin embargo, para la relación de orden (14), el elemento máximo de $\mathcal{F}$ es la distribución

$$H^+(x_1,\ldots,x_n) = \min\{F_1(x_1),\ldots,F_n(x_n)\} \qquad (15)$$

Cuando una distribución alcanza H^+, se verifica la relación funcional

$$F_1(X_1) = F_2(X_2) = \ldots = F_n(X_n) \quad \text{c.s.} \qquad (16)$$

Entonces hay dependencia positiva total entre cada par de variables X_i, X_j, y la masa de la distribución está totalmente concentrada en la curva de ecuación implícita $F_1(x_1) = \ldots = F_n(x_n)$.

Sin embargo, no existe un elemento mínimo, salvo el caso n=2, sino que existen diversos elementos minimales. Podemos entender esto desde el punto de vista de la dependencia estocástica. Simbolicemos por $-1 \leq \theta_{ij} = \theta(X_i,X_j) \leq +1$ un índice de asociación estocástica cuyos valores extremos correspondan a dependencia funcional negativa y positiva respectivamente. Supongamos n=3. Entonces la cota máxima de Fréchet H^+ se alcanza en el caso

$$\theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{23} = 1 \qquad (17)$$

Sin embargo, los casos de dependencia negativa son

$$\begin{array}{ll} \theta_{12} = \theta_{13} = -1 & \theta_{23} = +1 \\ \theta_{12} = \theta_{23} = -1 & \theta_{13} = +1 \\ \theta_{13} = \theta_{23} = -1 & \theta_{12} = +1 \end{array} \qquad (18)$$

Obsérvese que $\theta_{12} = \theta_{13} = 1$ implica $\theta_{23} = 1$, y que es imposible que $\theta_{12} = \theta_{13} = \theta_{23} = -1$.

(18) sugiere que existen tres cotas minimales de Fréchet. Veamos como pueden encontrarse, analizando el caso

$$\theta_{12} = \theta_{13} = -1 \qquad \theta_{23} = +1 \qquad (19)$$

que implica asociación positiva absoluta entre X_2, X_3, de modo que su distribución conjunta es la correspondiente cota bivariante de Fréchet

$$F_{23}(x_2,x_3) = \min\{F_2(x_2),\ F_3(x_3)\}$$

Utilicemos ahora de nuevo la desigualdad (1) para definir una distribución trivariante conjunta a partir de F_1 y F_{23}

$$H_1^-(x_1,x_2,x_3) = \max\{F_1(x_1) + F_{23}(x_2,x_3) - 1,\ 0\} \quad (20)$$

Entonces X_1 está asociada negativamente con X_2 y X_3.

Este razonamiento nos lleva a que las cotas minimales trivariantes de Fréchet son /13/

$$H_1^-(x_1,x_2,x_3) = \\ = \max\{F_1(x_1) + \min[F_2(x_2),F_3(x_3)] - 1,\ 0\}$$

$$H_2^-(x_1,x_2,x_3) = \\ = \max\{F_2(x_2) + \min[F_1(x_1),F_3(x_3)] - 1,\ 0\} \qquad (21)$$

$$H_3^-(x_1,x_2,x_3) = \\ = \max\{F_3(x_3) + \min[F_1(x_1),F_2(x_2)] - 1,\ 0\}$$

La propiedad minimal de H_i queda reflejada en la siguiente implicación, donde $F \in \mathcal{F}$:

$$F(x_1,x_2,x_3) \leq H_i^-(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow F(x_1,x_2,x_3) = \\ = H_i^-(x_1,x_2,x_3) \qquad (22)$$

Además, si las cotas (21) son alcanzadas, se verifican las relaciones funcionales /13/

$$1 - F_1(X_1) = F_2(X_2) = F_3(X_3)$$

$$1 - F_2(X_2) = F_1(X_1) = F_3(X_3) \qquad (23)$$

$$1 - F_3(X_3) = F_1(X_1) = F_2(X_2) \qquad \text{(c.s)}$$

Las relaciones (23) no son necesariamente lineales, indicando cómo deben ser las curvas para plantear regresión entre las variables X_1, X_2, X_3.

Pasemos ahora al caso general $n>2$. Sea $i_1,\dots,i_k,i_{k+1},\dots,i_n$ una permutación de $(1,2,\dots n)$. Teniendo en cuenta que la cota superior, tomando $F_{i_1},\dots,F_{i_n}$, es

$$\min\{F_{i_1}(x_{i_1}),\dots,F_{i_k}(x_{i_k})\}$$

aplicando de nuevo la desigualdad (1), llegamos análogamente a las cotas minimales de $\mathcal{F}$

$$H^-_{i\dots i_k}(x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \max\{\min[F_{i_1}(x_{i_1}),\dots,F_{i_k}(x_{i_k})] +$$

$$+ \min[F_{i_{k+1}}(x_{i_{k+1}}),\dots,F_{i_n}(x_{i_n})]-1,\ 0\} \quad (24)$$

Existen entonces $2^{n-1}-1$ distribuciones minimales distintas tales que, si F es una distribución

$$F(x_1,\dots,x_n) \le H^-_{i_1\dots i_k}(x_1,\dots,x_n)$$

$$\Rightarrow F(x_1,\dots,x_n) = H^-_{i_1\dots i_k}(x_1,\dots,x_n) \qquad (25)$$

donde $(i_1,\dots,i_k)$ es una permutación de $k<n$ elementos de $(1,\dots,n)$.

La cota minimal $H^-_{i_1\dots i_k}$ se alcanza si y sólo si se verifica la relación funcional /13/.

$$F_{i_1}(X_{i_1})=\dots=F_{i_k}(X_{i_k})=1-F(X_{i_{k+1}})=\dots=$$

$$= 1-F(X_{i_n}) \qquad (26)$$

(15), (24) y (25) nos da la solución definitiva para las cotas de la clase $\mathcal{F}$ de Fréchet de distribuciones multivariantes dadas las marginales $F_1,\dots,F_n$.

Dall'Aglio /14/ estudia una generalización de la clase $\mathcal{F}$. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $N=(1,2,\dots n)$. Consideremos el conjunto de distribuciones dadas

$$\{F_A(X_A),\ A\in\mathcal{A} \ \text{ y } \cup A = N\}$$

Definimos la clase de Fréchet $\mathcal{F}(\mathcal{A})$ como la clase de todas las distribuciones cuyas marginales son las distribuciones fijadas previamente F_A. La clase $\mathcal{F}$ correspondería al caso $|A| = 1$.

Un aspecto importante es el de la compatibilidad. Se dice que $F_A(X_A)$, $A\in\mathcal{A}$ son compatibles si $\mathcal{F}$ (A) es no vacía. Dall'Aglio /14/ estudia el caso n=3, Pagani /15/ da algunos resultados para n=4, y Kellerer /16/ da ciertas condiciones de compatibilidad. También se ha estudiado (/13/,/14/) el caso siguiente: dadas $F_1,\dots,F_n$, en qué condiciones las $\binom{n}{2}$ cotas de Fréchet $\max\{F_i(x_i)+F_j(x_j)-1,\ 0\}$ son compatibles. Véase también /17/.

Otro elemento destacado de la clase $\mathcal{F}$ que se construye sólo con las distribuciones marginales es

$$H^o(x_1,\dots,x_n) = F_1(x_1)\cdot\ \dots\ \cdot F_n(x_n) \qquad (27)$$

que corresponde al caso de independencia estocástica entre las n variables.

Finalmente (/13/, /14/) combinando convenientemente H^+, H^- y H^o podemos construir pseudodistribuciones y distribuciones partiendo exclusivamente de las marginales $F_1,\dots,F_n$. Indicando $Z_i = F_i(X_i)$, son pseudodistribuciones

$$\tilde{S}_k(x_1,\dots,x_n) =$$

$$=\min\{\text{máx}[Z_1+\dots+Z_k-(k-1),0],Z_{k+1},\dots,Z_n\}$$

$$S^*_k(x_1,\dots,x_n) =$$

$$=\text{máx}\{\min[Z_1,\dots,Z_k]+Z_{k+1}+\dots+Z_n-(n-k),\ 0\}$$

verificándose

$$S=S^*_1\le\dots\le S^*_n=H^+ \qquad S=\tilde{S}_n\le\dots\le\tilde{S}_1=H^+$$

Análogamente, son distribuciones

$\tilde{F}_k(x_1,\ldots,x_n) =$

$Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_k \text{ máx}\{\min[Z_{k+1},\ldots,Z_j] +$

$+ \min[Z_{j+1},\ldots,Z_n] - 1, 0\}$

$F^*_k(x_1,\ldots,x_n) =$

$= Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_k \min\{Z_{k+1},\ldots,Z_n\}$

siendo

$F^*_{n-1} = \tilde{F}_{n-1} = H^O$. En general

$F_k(x_1,\ldots,x_n) = Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_k\, G(X_{k+1},\ldots,X_n)$,

$G \in \mathcal{F}\ (F_{k+1},\ldots,F_n)$

es también una función de distribución que cumple que las variables $X_1,\ldots X_k$ son mutuamente independientes y cada $X_i (i \le k)$ es independiente de $(X_{k+1},\ldots,X_n)$.

Se pueden obtener funciones análogas para cualquier permutación $(i_1,\ldots,i_k)$ de orden k obtenida de $(1,2,\ldots,n)$.

4. SISTEMA FGM

Pasemos a estudiar ciertas familias paramétricas $\mathcal{F}_\theta \subset \mathcal{F}$ que concrete más el problema de encontrar distribuciones multivariantes cuyas distribuciones marginales -- $F_1,\ldots,F_n$ sean dadas. Como veremos, en realidad sólo se conocen tres familias distintas.

El llamado sistema de Farlie-Gumbel-Morgenstern es el más estudiado. Su historia comienza con un trabajo de Eyraud /18/, que da una versión para marginales uniformes de la familia de Morgenstern /9/ (véase (10)). Gumbel /19/ introduce la primera generalización multivariante

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)\right) \cdot \left(1+\alpha \prod_{i=1}^{n} G_i(x_i)\right) \qquad (28)$$

siendo $G_i(x_i) = 1 - F_i(x_i)$

Farlie /20/, considera, para el caso bivariante, la siguiente generalización

$$F(x_1,x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot [1+G^*_1(x_1) \cdot G^*_2(x_2)] \qquad (29)$$

siendo $G^*_i(x_i) = 1 - F^*_i(x_i)$, donde $F^*_i(x_i)$ es una distribución que puede ser distinta de $F_i(x_i)$.

Johnson y Kotz (/21/, /22/) generalizan (28), introduciendo y estudiando el sistema

$$F(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i) \cdot [1+ \sum^{n-1}_{i_1<i_2} \sum^{n} \alpha_{i_1 i_2} G_{i_1}(x_{i_1}) G_{i_2}(x_{i_2}) +$$

$$+ \sum^{n-2}_{i_1<} \sum^{n-1}_{i_2<i_3} \sum^{n} \alpha_{i_1 i_2 i_3} G_{i_1}(x_{i_1}) G_{i_2}(x_{i_2}) G_{i_3}(x_{i_3}) + \ldots$$

$$+ \alpha_{12\ldots n} \prod_{i=1}^{n} G_i(x_i)] \qquad (30)$$

donde los coeficientes α son números reales. (30) (30) se reduce a (28) haciendo todos los iguales a cero excepto $\alpha_{12\ldots n}$.

El sistema FGM tiene diversas propiedades y características que describimos a continuación.

1) La función de densidad, en el supuesto de que las variables X_i tengan distribuciones absolutamente contínuas, es:

$$f(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)[1+ \sum^{n-1}_{i_1<i_2} \sum^{n} \alpha_{i_1 i_2} (1-2F_{i_1}(x_{i_1}))(1-2F_{i_1}(x_{i_2})) + \ldots$$

$$+ \alpha_{12\ldots n} \prod_{i=1}^{n} (1-2F_i(x_i))] \qquad (31)$$

2) La distribución marginal k-variante tomando k variables de $X_1,\ldots,X_m$, pertenece también al sistema FGM.

3) La definición (30) puede expresarse en términos de las funciones de supervivencia

$$G(x_1,\ldots,x_n) = P[\bigcap_{i=1}^{n} (X_i > x_i)]$$

$$G_i(x_i) = P[X_i > x_i] = 1 - F_i(x_i)$$

Lo mismo ocurre con las distribuciones marginales.

4) Las restricciones sobre los parámetros α

resultan de imponer que (30) sea no negativa para todo $(x_1,...,x_n)$. Para n=2 es

$$|\alpha_{12}|\leq 1$$

En general, las condiciones son

$$1+\sum_{i_1<i_2}^{n-1}\sum^{n} c_{i_1}c_{i_2}\alpha_{i_1i_2}+$$

$$+\sum_{i_1<i_2}^{n-2}\sum^{n-1}_{<i_3}\sum^{n} c_{i_1}c_{i_2}c_{i_3}\alpha_{i_1i_2i_3}+\ldots+$$

$$+\left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)\alpha_{12\ldots n}\geq 0 \qquad (32)$$

donde $c_i = \pm 1$.

5) El sistema FGM es F-ortante dependiente positivamente, es decir,

$$F(x_1,...,x_n) \geq \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$

para valores de los parámetros α verificando ciertas restricciones. En tales casos, ciertas medidas de dependencia (correlación de Pearson, correlación de Kendall, grado de correlación) son positivas y la independencia queda caracterizada por la incorrelación. Análogamente se estudia el caso negativo.

6) Mixturas de distribuciones FGM con $F_i(x_i)$ comunes pero diferentes α, tienen también una distribución FGM, con los mismos $F_i(x_i)$ y como valores de α los promedios correspondientes.

7) Si los parámetros α en (30) valen 0, vemos que el sistema FGM contiene el caso de independencia estocástica

$$H^{o}(x_1,...,x_n) = F_1(x_1)\cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$$

Sin embargo, no contiene ninguna de las cotas de Fréchet H^-, ni tampoco H^+. De hecho (30) es un sistema útil en el caso de dependencia débil entre las variables.

8) El coeficiente de correlación entre X_i, X_j tiene el mismo signo que α_{ij} y es proporcional a α_{ij}. Nótese que la distribución de (X_i,X_j) es FGM con parámetro α_{ij}. No existe una interpretación análoga para los demás parámetros.

Por último, Johnson y Kotz /22/ estudian otras propiedades relativas a momentos, regresión, distribuciones condicionadas, y partiendo de una idea de Farlie /20/ proponen generalizaciones bivariantes y multivariantes del sistema FGM. En otro trabajo posterior /23/, estudian ciertas modificaciones del caso bivariante a fin de conseguir aumentar el grado de dependencia máxima entre las variables, considerando distribuciones del tipo

$$F(x_1,x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)[1+\alpha S(x_1,x_2)] \qquad (33)$$

donde S es también FGM con marginales $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$, que se sustituye iterativamente en (33). Consideran también la distribución

$$F(x_1,x_2) =$$

$$= F_1(x_1)F_2(x_2)[1+\alpha \min\{G_1(x_1),G_2(x_2)\}]$$

siendo $G_i(x_i)=1-F_i(x_i)$ y obtienen también cierto aumento del grado de dependencia.

<u>Otras contribuciones al sistema FGM.</u>

Shaked /24/ define las distribuciones PDM (positivamente dependientes en mixtura) como aquellas que admiten la representación

$$F(x_1,...,x_n) = \int_{\Omega}\prod_{i=1}^{n} F^{(w)}(x_i)\,dH(w) \qquad (34)$$

donde $\{F^{(w)};\ w\in\Omega\}$ es una familia de distribuciones univariantes y H es una medida sobre $\Omega\subset R^n$. Las distribuciones PDM tienen aplicaciones en teoría bayesiana de inspección por muestreo y en teoría de la fiabilidad. Por otra parte, una distribución se llama intercambiable si

$$F(x_1,...,x_n) = F(x_{i_1},...,x_{i_n})$$

para toda permutación $(i_1,...,i_n)$. Esta condición implica que todas las marginales sean iguales. Luego, esta condición aplicada al sistema FGM nos da

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_n$$

$$\alpha_{12} = \ldots = \alpha_{n-1,n} = \beta_2$$

$$\alpha_{123} = \ldots = \alpha_{n-2,n-1,n} = \beta_3$$

$$\ldots\ldots$$

$$\alpha_{12\ldots n} = \beta_n$$

Shaked /24/ da entonces condiciones necesarias y suficientes para que distribuciones FGM intercambiables sean PDM, y analiza ciertas aplicaciones, especialmente en teoría de la fiabilidad cuando la distribución multivariante es desconocida.

Cambanis/25/ encuentra el intervalo $(\alpha_{min}, \alpha_{máx})$ que contiene a α para que el sistema FGM bivariante sea una distribución. Halla también condiciones necesarias y suficientes para los parámetros α en el caso multivariante y la forma general de las distribuciones condicionadas, que no resultan ser FGM. Introduce entonces una extensión del -- sistema FGM introduciendo el término

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i G_i(x_i)$$

en la expresión (30). Sin embargo, las marginales ya no son F_i (salvo que $\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0$), sino

$$S_i(x_i) = F_i(x_i)[1+\alpha_i(1-F_i(x_i))]$$

Esta extensión se justifica por el hecho de que contiene todas las distribuciones condicionadas del sistema FGM.

Finalmente, Cohen /26/ introduce una densidad de probabilidad $f(x_1,\ldots,x_{n_1},x_{n_{1+1}},\ldots,x_n)$, siendo $n=n_1+n_2$, conocidas las densidades $f_1(x_1,\ldots,x_{n_1})$, $f_2(x_{n_{1+1}}),\ldots,x_n)$, que puede considerarse -- una extensión del sistema FGM. Sea h una densidad cualquiera sobre el cubo unidad n-dimensional, con marginales $h_1(u_1,\ldots,u_{n_1})$, $h_2(u_{n_{1+1}},\ldots,u_n)$. Sea

$$\rho(u_1,\ldots,u_n) = h-h_1-h_2+1$$

La clase de densidades con marginales f_1, f_2 es

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_1 f_2[1+c\rho(u_1,\ldots,u_n)] \qquad (35)$$

donde

$$u_i = u_i(x_1,\ldots,x_{n_1}) \qquad i=1,\ldots,n_1$$
$$u_j = u_j(x_{n_1+1},\ldots,x_n) \qquad j=n_1+1,\ldots,n$$

son transformaciones de las variables x tales que los jacobianos verifiquen $J_1 = f_1$, $J_2 = f_2$. La constante c se halla imponiendo la condición de que f sea positiva. La distribución (35) se utiliza en mecánica cuántica, especialmente en el caso bivariante $n_1 = n_2 = 1$, para hallar densidades de espacio-fase, con distribuciones marginales cuánticas de posición y momento (/3/, /4/).

5. FAMILIA TRASLADADA DE LA NORMAL MULTIVARIANTE.

Kimeldorf y Sampson /8/ introducen el concepto de traslación de una familia con marginales F_1, G_1, a otra familia bivariante con marginales F_2, G_2. Sea $\{H_\alpha, -1\le\alpha\le+1\}$ una familia bivariante uniparamétrica con marginales F_1, G_1. Entonces la familia trasladada

$$J_\alpha(x,y) = H_\alpha(F_1^{-1} F_2(x), G_1^{-1} G_2(x)) \qquad (36)$$

es una familia bivariante con marginales F_2, G_2. Además, si H_α verifica las cinco condiciones de Kimeldorf y Sampson, entonces J_α también las verifica. Tiene especial interés la traslación uniforme de H_α en U_H tal que sus marginales son uniformes en (0,1), pues ciertas propiedades de dependencia quedan invariantes /27/.

(36) sugiere un método para construir sistemas bivariantes. En efecto, si conocemos H_α (que determinan F_1, G_1 y F_2, G_2), entonces basta aplicar (36). Si H_α es la normal bivariante, entonces se llama método de traslación normal de Mardia /11/.

La generalización multivariante de la traslación normal consiste en definir

$$F_C(x_1,\ldots,x_n)=N_C(\Phi^{-1}F_1)x_1),\ldots,\Phi^{-1}F_n(x_n)) \quad (37)$$

donde C es una matriz de correlaciones semidefinida positiva, N_C es la función de distribución normal multivariante N(O,C) y Φ es la función de distribución N(0,1). F_C es la función de distribución de las variables

$$X_1 = F_1^{-1}\Phi(Y_1),\ldots,X_n = F_n^{-1}\Phi(Y_n)$$

donde cada Y_i es N(0,1), y por tanto tiene como distribuciones marginales $F_1,\ldots,F_n$. La familia (37) tiene una expresión funcional complicada debido a que no se conocen las expresiones explícitas de N_C y Φ , pero tiene interesantes propiedades, que han sido estudiadas por Ruiz-Rivas /13/ .

1) La función de densidad, en el caso rang (C) = n, X_i es absolutamente contínua con densidad f_i, es la siguiente

$$f_C(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$|C|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)\exp[-\tfrac{1}{2}P'(C^{-1}-I)P] \qquad (38)$$

donde

$$P' = (\Phi^{-1}F_1(x_1),\ldots,\Phi^{-1}F_n(x_n))$$

2) Sea $C = (\theta_{ij})$, $-1\le\theta_{ij}\le+1$. Entonces

$$F_C = H^+ \text{ si } \theta_{ij} = 1 \quad \forall\, i,j = 1,2,\ldots,n$$

es decir, F_C contiene la cota máxima de Fréchet, y se verifica (16).

3) Sea rang(C) = 1 y consideremos cualquier otro caso distinto de $\theta_{ij} = 1$, $\forall i,j$. Entonces $F_C = H^-$, es decir, F_C contiene las $2^{n-1}-1$ cotas minimales de Fréchet y se verifica (26).

4) Si $C = I_n$ (matriz identidad), entonces -- $F_C = H^0$ y las n variables son estocásticamente independientes.

5) $|\mathrm{corr}(X_i,X_j)|\le|\mathrm{corr}(Y_i,Y_j)| = |\theta_{ij}|$

verificándose la igualdad sólo en el caso de que la distribución de x_i,x_j sea normal bivariante.

6) Las marginales k-variantes de F_C constituyen también una distribución trasladada - de la normal multivariante de orden k.

Ruiz-Rivas /13/ estudia los casos degenerados en que rang(C)=k<n, analizando ampliamente el caso n=3.

El método de traslación a la normal multivariante se puede generalizar contando con el apoyo de cualquier otra distribución. Supongamos que H es una distribución multivariante conocida, con marginales $G_1,\ldots,G_n$. Entonces

$$F(x_1,\ldots,x_n) =$$
$$= H(G_1^{-1}F_1(x_1),\ldots,G_n^{-1}F_n(x_n)) \qquad (39)$$

define otra distribución multivariante con marginales $F_1,\ldots,F_n$.

6. SISTEMA DE CUADRAS-AUGE.

En esta sección expondremos el tercero y más reciente método de construcción de familias multivariantes con marginales dadas.

Cuadras y Augé /28/ introducen la siguiente familia bivariante

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2) &= F_1(x_1)F_2(x_2)^{(1-\theta)} \quad \text{si} \quad F_1(x_1)<F_2(x_2) \\ &= F_1(x_1)^{(1-\theta)}F_2(x_2) \quad \text{si} \quad F_1(x_1)\ge F_2(x_2) \end{aligned} \qquad (40)$$

donde $0\le\theta\le1$ es un parámetro que mide dependencia estocástica. El sistema (40) se extiende al caso de dependencia negativa definiendo

$$G(x_1,x_2) =$$

$$= F_1(x_1)-[\min\{F_1(x_1),1-F_2(x_2)\}]^{-\theta}[F_1(x_1).(1-F_2(x_2))]^{1+\theta} \qquad (41)$$

donde $-1\le\theta\le0$.

F y G, que coinciden para $\theta=0$, definen un sistema bivariante $\{H_\theta,\ -1\le\theta\le1\}$, con marginales F_1, F_2. Se verifica

$$H_{-1} = H^- \qquad H_0 = H^0 \qquad H_1 = H^+$$

De hecho, H_θ verifica cuatro de las cinco condiciones de Kimeldorf y Sampson /8/. La distribución H_θ no es absolutamente contínua, pero puede estudiarse sin problemas utilizando una densidad generalizada utilizando la teoría de distribuciones de Schwartz. La densidad generalizada para F(x,y) es

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial\ \partial y} = \begin{cases} (1-\theta) f_1(x_1) f_2(x_2) F_1(x_1)^{-\theta} & \text{si } F_1(x_1) \geq F_2(x_2) \\ (1-\theta) f_1(x_1) f_2(x_2) F_2(x_2)^{-\theta} & \text{si } F_1(x_1) < F_2(x_2) \end{cases}$$
$$+\theta f_1(x_1) F_1(x_1)^{1-\theta} \delta_{\{F_1(x_1) = F_2(x_2)\}} \quad (42)$$

siendo $\delta_{\{F_1(x_1)=F_2(x_2)\}}$ la distribución de Dirac de dimensión uno sobre la curva creciente $F_1(x_1) = F_2(x_2)$. Análogamente se obtiene la densidad generalizada para $G(x,y)$.

Ruiz Rivas et al. /29/ prueban que en el sistema H_θ, el parámetro θ es una función creciente del coeficiente de correlación.

Cuadras /30/ encuentra dos interpretaciones probabilísticas de θ. La primera es

$$\theta = 2 - \{P[X_1-X_1')(X_2-X_2')>0]\}^{-1}$$

donde (X_1,X_2) es independiente de (X_1',X_2'), ambos con distribución H_θ. La segunda es

$$\theta = 4 - 2\{P[(X_1-X_1')(X_2-X_2'')]\}^{-1}$$

donde (X_1,X_2), (X_1',X_2'), (X_1'',X_2'') son independientes con distribución H_θ. Se prueba entonces que θ es una medida de asociación estocástica invariante por transformaciones monótonas de las variables, que se relaciona con la correlación τ de Kendall y con el grado de correlación ρ_g a través de

$$\tau = \frac{\theta}{2-|\theta|} \qquad \rho_g = \frac{3\theta}{4-|\theta|} \qquad -1\leq\theta\leq 1$$

La versión multivariante de H_θ, utiliza una matriz simétrica (θ_{ij}) tal que $\theta_{ii}=1$, y las marginales $F_1,\ldots,F_n$. La función de distribución multivariante de Cuadras y Augé /28/, con marginales $F_1,\ldots,F_n$, y matriz de asociación (θ_{ij}), para el caso positivo $1\geq\theta_{ij} = \theta_{ji}\geq 0$ es

$$F(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{h=1}^{n} F_{i_h}(x_{i_h})^{\prod_{j=1}^{n-h}(1-\theta_{i_h i_{h+j}})} \quad (43)$$

si $F_{i_1}(x_{i_1}) \gtrapprox \ldots \gtrapprox F_{i_n}(x_{i_n})$

Con los siguientes convenios:

a) $\prod_{j=1}^{n-n} (1-\theta_{i_n i_{n+j}}) = 1$

b) $\gtrapprox$ representa el signo $\geq$ o el signo $>$ según el criterio

$F_{i_j}(x_{i_j}) > F_{i_k}(x_{i_k})$ si $i_j > i_k$ ($\gtrapprox$ es $>$)

$F_{i_j}(x_{i_j}) \geq F_{i_k}(x_{i_k})$ si $i_j < i_k$ ($\gtrapprox$ es $\geq$)

El sistema se extiende al caso negativo mediante traslación, que implica sustituciones adecuadas de $1-\theta_{ij}$ por $1+\theta_{ij}$ y $F_i(x_i)$, en (43), siendo ahora $-1\leq\theta_{ij}\leq 0$.

El sistema multivariante de Cuadras y Augé verifica:

1) Cualquier distribución marginal k-variante pertenece también al sistema.

2) Si $\theta_{ij} = 0$ las variables X_i, X_j son independientes. En particular, si $(\theta_{ij}) = I_n$, el sistema contiene $H^0(x_1,\ldots,x_n)$.

3) Si $\theta_{ij} = 1$, $\forall i, j$, el sistema contiene la cota superior $H^+(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

4) El sistema contiene también las $2^{n-1}-1$ cotas minimales H^- expresadas en (24).

5) El sistema es contínuo para cada parámetro θ_{ij}. Sin embargo, la distribución no es absolutamente contínua.

Finalmente, Ruiz-Rivas /13/ prueba que una condición necesaria y suficiente para que (43) sea intercambiable es

$$F_1 = F_2 = \ldots - F_n$$
$$\theta_{ij} = \theta\in[0,1] \qquad \forall\ i \neq j = 1,\ldots,n$$

y demuestra también que (43) no es PDM (positivamente dependiente en mixtura). Sin embargo, es fácil ver que (43) es F -ortante dependiente positivamente.

7. CONDICIONES DE REGULARIDAD PARA UN SISTEMA MULTIVARIANTE.

Sea $\mathcal{F}_\theta$ un sistema multivariante dependiente de θ, que usualmente es una matriz que informa sobre la dependencia estocástica entre las variables. Supongamos $\theta = (\theta_{ij})$, $-1\leq\theta_{ij}\leq 1$. Cuadras y Ruiz-Rivas /31/ proponen seis condiciones deseables que deberían veri ficar una familia $\mathcal{F}_\theta$. Sea F_θ la distribución multivariante con marginales $F_1,\ldots,F_n$. Las condiciones son:

1) $F_\theta = H^+$ si $\theta_{ij} = 1, \quad \forall\ i,j = 1,\ldots,n$

2) $F_\theta = H^-$ para los demás casos, tales que $\text{rang}(\theta) = 1$, es decir, F_θ debe contener las $2^{n-1}-1$ cotas minimales.

3) $F_\theta = H^O$ si $\theta = I_n$.

4) F_θ es absolutamente contínua si $\text{rang}(\theta) = n$ y $F_1,\ldots,F_n$ también lo son.

5) Fijado $(x_1,\ldots,x_n)$, F_θ debe ser contínua para cada parámetro θ_{ij}.

6) Las marginales k-variantes deben pertenecer al mismo sistema. En particular, la distribución de (X_i,X_j) constituyen una familia bivariante del mismo tipo, en el que θ_{ij} es una medida de dependencia estocástica.

Estas seis condiciones son difíciles de verificar simultáneamente. En realidad, deben entenderse como un modelo ideal que sirva de marco para construir distribuciones multivariantes con marginales dadas.

Solamente la familia trasladada de la normal multivariante verifica todas las condiciones El sistema FGM verifica 3), 4), 5), 6) si -- consideramos sólo los parámetros α_{ij} y prescindimos de todos los demás.

El sistema de Cuadras-Augé verifica 1), 2), 3), 5), 6).

8. ALGUNAS GENERALIZACIONES.

Sánchez /32/ estudia ciertas extensiones de los sistemas FGM y Cuadras-Augé. Sean

$$X = (X_1,\ldots,X_m) \qquad Y = (Y_1,\ldots,Y_n)$$

dos vectores aleatorios, con distribuciones $F(x_1,\ldots,x_m)$, $G(y_1,\ldots,y_n)$.

Definamos la distribución m+n-variante

$$H(x_1,\ldots x_m,y_1,y_1,\ldots y_n) = FG[1+\alpha(1-F)(1-G)]$$

que tiene como marginales F y G, en absolutamente contínua si F y G lo son, y X es estocásticamente independiente de Y si $\alpha = 0$.

Definamos también la distribución

$$J(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) = F^{(1-\theta)}G \quad \text{si } F\geq G$$
$$= F\,G^{(1-\theta)} \quad \text{si } F<G \quad 0\leq \theta \leq 1$$

cuyas marginales son también F y G. Si $\theta = 0$, X, Y son estocásticamente independientes.

Sin embargo, H y G no son, en general, distribuciones, sino tan solo pseudodistribuciones. En efecto, en ciertos casos, las funciones de densidad pueden ser negativas.

En /32/ proponemos entonces un nuevo sistema m + n -variante que da lugar a una verdadera familia de distribuciones de probabilidad.

9. AGRADECIMIENTO.

Agradezco a C. Ruiz-Rivas y a C.M. Cuadras la bibliografía aportada y sus valiosas sugerencias, las cuales han sido de gran utilidad para la elaboración del trabajo.

10. BIBLIOGRAFIA.

/1/ MARSHALL, A.M., Olkin, I: "A multivariate exponential distribution ". Journal Amer. Statis. Ass., 62, 30-44.(1967).

/2/ FISHMAN, G.S.: "Variance reduction in simulation studies". J. Statist. Comp. Simulation, 1, 173-182. (1972).

/3/ COHEN, L., Zoparovanni, Y.I.: "Positive quantum joint distributions". J. Math. Phys., 21 (4), 794-796. (1980).

/4/ FINCH, P.D., Groblicki, R.: "Bivariate probability densities with given marginals". Foundations of Physics, 14(6), 549-552. (1984).

/5/ FRECHET, M.: "Les Probabilités, associées à un système d'événements compatibles et dépendants". Première Partie. Herman, Paris. (1940).

/6/ HOEFFDING, W.:"Masstabinvariante korrelationstheorie". Schriffen des Mathem. Inst. für Angewandte Mathem der Univ. Berlin,5, 179-233. (1940).

/7/ FRECHET, M.: "Sur les tableaux de correlation dont les marges sont données". Ann Univ. Lyon, Section A, Series 3, 14, 53-77 (1951).

/8/ KIMELDORF, G., Sampson, A.: "One-parameter families of bivariate distributions with fixed marginals". Commun. Statist., 4(3), 293-301. (1975).

/9/ MORGENSTERN, D.: "Einfache beispiele zu eidimensionaler verteilungen". Mitt. für Math. Statistik, 8, 234-235. (1956).

/10/ PLACKETT, R.L.: "A class of bivariate - distributions". J. Amer. Statist. Ass., 60, 516-522. (1965).

/11/ MARDIA, K.V.: "Families of bivariate distributions". Darien , Conn. Hafner Publishing Co. (1970).

/12/ RUIZ-RIVAS, C.: "Un nuevo sistema bivariante y sus propiedades". Estadística Española, 87, 47-54. (1981).

/13/ RUIZ-RIVAS, C.: "Familias de distribuciones multivariantes con marginales dadas". Pub. Bioest. Biomat., nº 3, F. de Biología, U. de Barcelona. (1983).

/14/ DALL'AGLIO, G.:"Fréchet classes and compatibility of distribution functions." Symposia Mathematica. 9, 131-150 Academic Press. (1972).

/15/ PAGAMI, V.: Tesis Doctoral (inédita). (1963)

/16/ KELLERER, H.G.:"Verteilungsfunktionen mit gegebenen Marginalverteilungen". Z. Wahrscheinlickkeitstheorie, 3, 247-270 (1964).

/17/ KWEREL, S.M.: "Fréchet bounds". En: The Enzyclopedia of Statistical Sciences. (S. Kotz, Ed.). J. Wiley, N. York.(1983)

/18/ EYRAUD, H.: "Les principes de la mesure des correlations". Ann. Univ. Lyon, A. - Sci. Mat. Astron. 1, 31-47. (1936).

/19/ GUMBEL, E.: "Distributions a plusieurs variables dont les marges sont données. C.R. Acad. Sci., Paris, 246, 2717-19 (1958).

/20/ FARLIE, D.J.G.: "The performance of some correlation coefficients for a general - bivariate distribution". Biometrika, 47 307-323. (1960).

/21/ JOHNSON, N.L., Kotz, S.: "On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions". Commun. Statis., 4, 415-427. (1975).

/22/ JOHNSON, N.L., KOTZ, S.: "On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions-II. Regression, correlation and further generalizations". Commun. Statist.- Theor. Meth., A6 (6), 485-496. (1977a).

/23/ JOHNSON, N.L., KOTZ, S.: "Propiété de dependance des distributions itérées, generalisées a deux variables Farlie-Gumbel-Morgenstern". C.R. Acad. Sci., Paris, A, 285 (4), 277-280. (1977b).

/24/ SHAKED, M.: "A note on the exchangeable generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions". Commun. Statist., 4(8), 711-721. (1975).

/25/ CAMBANIS, S.: "Some properties and generalizations of multivariate Eyraud-Gumbel-Morgenstern distributions". Journal of Multivariate Aalysis, 7 (4), 551-559. (1977)

/26/ COHEN, L.: "Probability distributions with given multivariate marginals". J. Math. Phys., 25 (8), 2402-2403. (1984).

/27/ KIMELDORF, G., SAMPSON, A.:"Uniform representations of bivariate distributions" Commun. Statist., 4 (7), 617-627 (1975).

/28/ CUADRAS, C.M., AUGE, J.: "A continuous general multivariate distribution and its properties". Commun. Stat. Theor. Meth., A10 (4), 339-353. (1981).

/29/ RUIZ-RIVAS, C., USON, T. CUADRAS, C.M.: "Alguns aspectes i aplicacions de la construcció de distribucions bivariants". QUESTIIO, 3 (3), 121-127. (1979).

/30/ CUADRAS, C.M.: "Sobre medidas de dependencia estocástica invariantes por transformaciones monótonas". Homenatge a F. d'A. Sales. Contribuciones científiques F. de Matemàtiques, U. de Barcelona, 28-47. (1985).

/31/ CUADRAS, C.M., RUIZ-RIVAS, C.: "Sobre las familias de distribuciones con marginales dadas". Rev. de la Univ. de Santander, 2 (II), 975-978 (1979).

/32/ SANCHEZ-ALGARRA, P.: (en preparación). Construcción de distribuciones con marginales multivariantes dadas.