Qüestiió - V. 8, n.º 4 (desembre 1984) pp. 207-210

UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE DUBOVICKII Y MILJUTIN A LA PROGRAMACIÓN SEMI-INFINITA CONVEXA

MARCO A. LÓPEZ, ENRIQUETA VERCHER
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

En este trabajo aplicamos la Teoría de Dubovickii y Miljutin para deducir una condición necesaria de optimalidad relativa al problema de Programación Semi-Infinita convexa no diferenciable, asumiendo la cualificación de Slater. Se introduce, así, un nuevo procedimiento para verificar la validez de esta cualificación.

Keywords: SEMI-INFINITE PROGRAMMING, SLATER'S QUALIFICATION, OPTIMALITY CONDITIONS.

NOTACION.

Sea $\{f_t,\ t\in T\}$ una familia de funciones convexas definidas sobre R^n, siendo T un conjunto infinito de índices. Consideraremos el sistema de desigualdades convexas en R^n
$\{f_t(x)\leqq 0,\ t\in T\}$.

Sea S el conjunto de soluciones del sistema. El sistema es consistente si $S\neq\emptyset$. Diremos que dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Denotaremos por $\partial h(x)$ el subdiferencial de la función convexa h en x.

Consideraremos elementos del conjunto $R_+^{(T)}$, definido como:

$$R_+^{(T)} = \{\lambda : T\to R_+ / \lambda_t = 0,\ \forall t \text{ salvo un número finito de índices}\} \quad (1)$$

Dado un conjunto $C\subset R^p$, no vacio, $<C>$ denota la envoltura convexa de C; $K(C)$ el cono convexo generado por C; $c\ell C$ la clausura de C; $int C$ su interior; y C^* el cono dual de C. La función indicatriz de C se denotará por $\delta_C(.)$.

El vector nulo de R^n será denotado por 0_n.

1. INTRODUCCION.

El problema genérico de Programación Semi-Infinita (PSI) es:

$$\begin{array}{l} \text{Min. } \psi(x) \\ \text{s.a. } f_t(x)\leqq 0,\ t\in T \end{array}$$

donde $x\in R^n$ y T es un conjunto infinito.

La característica esencial del PSI es que, tratándose de un problema de optimización con un número finito n de variables, existen infinitas restricciones.

Cuando se trata de caracterizar las soluciones óptimas de un problema de PSI convexa no diferenciable aparece necesariamente la noción de puntos de silla de la Lagrangiana (tal como ocurre, en general, en la Programación no Lineal). Al mismo tiempo hay que establecer cualificaciones sobre el conjunto de restricciones para obtener una condición necesaria de optimalidad.

En /6/ se han establecido dos cualificaciones de restricciones basadas en la propiedad de Farkas-Minkowski, probándose que la generalización de la cualificación de Slater para el PSI convexo implica ambas cualificaciones. Nuestro propósito, en este trabajo, es

- Marco Antonio López Cerdá y Enriqueta Vercher González - Departamento de Estadística e Investigación Operativa Facultad de Ciencias Matemáticas - Universidad de Valencia - C/. Dr. Moliner, 50 - BURJASOT - Valencia
- Article rebut el juny de 1984.

verificar directamente la validez de la cualificación de Slater, lo que se consigue haciendo uso de la Teoría de Dubovickii y Miljutin.

En la Sección 2 se introducen las nociones de conos de desplazamientos admisibles y se enuncian algunos resultados (que pueden encontrarse en Laurent /5/) relacionando ambos conos con la noción de subdiferencial de una función convexa.

En la Sección 3 se establece una condición necesaria de optimalidad, asumiendo la cualificación de Slater y haciendo uso de una caracterización de los puntos de silla de la Lagrangiana establecida en /6/.

2. CONOS DE DESPLAZAMIENTOS ADMISIBLES.

Revisemos las nociones de conos de desplazamientos admisibles (debidas a Dubovickii y Miljutin, /2/ y /3/), que permiten caracterizar el mínimo de una función convexa sobre un dominio construido como intersección finita de subconjuntos de R^n.

Sea $C\subset R^n$ un conjunto convexo y $\bar{x}\in c\ell C$, el cono de los desplazamientos interiores relativos a C a partir de $\bar{x}$, viene definido por:

$$\Gamma(C;\bar{x}) = \{x\in R^n/\text{existe } \eta>0:\ \bar{x}+\eta x\in int C\} \quad (2)$$

y el cono de los desplazamientos adherentes a C a partir de $\bar{x}$, es:

$$\Delta(C;\bar{x}) = c\ell\{x\in R^n/\text{ existe } \eta>0:\ \bar{x}+\eta x\in c\ell C\} \quad (3)$$

Si $int C \neq \emptyset$, se puede probar fácilmente que:

$$\Delta(C;\bar{x}) = c\ell\Gamma(C;\bar{x}) \quad (4)$$

Utilizaremos diferentes resultados de Laurent (/5/), que ponen en evidencia las relaciones existentes entre estos conos de desplazamientos admisibles y el subdiferencial de una función convexa.

Sea g una función convexa definida sobre R^n y sea $\bar{x}\in R^n$. Definimos el conjunto $C_o = \{x\in R^n/g(x)<g(\bar{x})\}$. El conjunto C_o es abierto y convexo. Para $\bar{x}\in c\ell C_o$, resulta evidente que:

$$\Gamma(C_o;\bar{x}) = \{x\in R^n/\text{ existe } \eta>0:\ \bar{x}+\eta x\in C_o\} \quad (15)$$

<u>*Proposición 2.1*</u> (/5/)

Sea g una función convexa definida sobre R^n. Si $C_o\neq\emptyset$ y $\bar{x}\in c\ell C_o$ se tiene que:

$$\Gamma(C_o;\bar{x}) = \{x\in R^n/\ u'x<0,\ \forall u\in\partial g(\bar{x})\} \quad (6)$$

La demostración se sigue de la identidad $g'(\bar{x};x) = \max_{u\in\partial g(\bar{x})} u'x$, siendo $g'(\bar{x};x)$ la derivada direccional de la función g.

<u>*Proposición 2.2*</u> (/5/)

Sea g una función convexa definida sobre R^n. Supongamos que $C_o\neq\emptyset$ y sea $\bar{x}\in c\ell C_o$. Existirá $u_o\in R^n (u_o\neq 0_n)$ tal que $u_o' x\leq 0$, $\forall x\in\Gamma(C_o;\bar{x})$ si, y solo si, $u_o=\lambda u$, $\lambda>0$ y $u\in\partial g(\bar{x})$.

A partir de la Proposición 2.1 se llega de forma inmediata a la identidad $\{\Gamma(C_o;\bar{x})\}^*=\{\partial g(\bar{x})\}^{**}$. Dado que $\bar{x}$ no es mínimo de g, $0_n\notin\partial g(\bar{x})$, y $\{\partial g(\bar{x})\}^{**}=K\{\partial g(\bar{x})\}$ (ver /8/, p. 79).

<u>*Proposición 2.3*</u> (/5/)

Sea C un conjunto convexo y cerrado de R^n, y sea $\bar{x}\in C$. Entonces:

$$\partial\delta_C(\bar{x}) = \{u\in R^n/\ u'\bar{x} = \max_{x\in C} u'x\} \quad (7)$$

Además, $\Delta(C;\bar{x}) = \{\partial\delta_C(\bar{x})\}^*$. (8)

La caracterización del subdiferencial de la función indicatriz de C en $\bar{x}$ es inmediata de la definición de subgradiente. Y dado que el subdiferencial es un conjunto cerrado y convexo la otra identidad es consecuencia de:

$$\{\partial\delta_C(\bar{x})\}^* = c\ell K\{C-\bar{x}\} \quad (9)$$

Vamos a enunciar dos teoremas equivalentes que caracterizan el mínimo de una función convexa. Sean $C_1,\ldots,C_p$ conjuntos cerrados y convexos de R^n con $int C_i\neq\emptyset$, i=1,..., p-1 y $C_p\neq\emptyset$. Supongamos que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{p-1} int C_i\right)\cap C_p\neq\emptyset \quad (10)$$

$$\text{Definimos } D:=\bigcap_{i=1}^{p} C_i \quad (11)$$

Sea g una función convexa en R^n y supongamos que g no alcanza su mínimo sobre D. Sea $\bar{x}\varepsilon D$, entonces $C_o \neq \emptyset$.

Vamos a caracterizar el mínimo de g sobre el conjunto D.

Teorema 2.4 (/5/)

Si se cumple la hipótesis (10), $\bar{x}\varepsilon D$ verifica $g(\bar{x})=\min_{x\varepsilon D} g(x)$ si, y solo si, existen u_0 $u_0, u_1,\ldots,u_p \varepsilon R^n$ tales que:

$$u_0 \varepsilon \partial g(\bar{x}),\ u_i \varepsilon \partial\delta_{C_i}(\bar{x}),\ i=1,..,p \ y \ \sum_{i=1}^{p} u_i = 0_n \quad (12)$$

Este es el resultado crucial de la Teoría de Dubovickii y Miljutin, cuya principal virtualidad estriba en que es aplicable a problemas de optimización en espacios de dimensión infinita.

Sabemos que $\bar{x}\varepsilon R^n$ será un mínimo de la función convexa $g + \sum_{i=1}^{p} \delta_{C_i}$ si, y solo si

$$0_n \varepsilon \partial(g + \sum_{i=1}^{p} \delta_{C_i})(\bar{x}) = \partial g(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p}\partial\delta_{C_i}(\bar{x}) \quad (13)$$

La última identidad se sigue de (10). Nótese que $u_o \neq 0_n$, dado que hemos supuesto que g no alcanza su mínimo global sobre D.

Teorema 2.5 (/5/)

Si se cumple la hipótesis (10), $\bar{x}\varepsilon D$ verifica $g(\bar{x})=\min_{x\varepsilon D} g(x)$ si, y solo si, existen $u_0, u_1,\ldots,u_p \varepsilon R^n$ tales que:

$$u_i' x \leq 0,\ \forall x \varepsilon \Delta(C_i;\bar{x}),\ i=0,..,p \ y \ \sum_{i=1}^{p} u_i = 0_n \quad (14)$$

La equivalencia entre estos dos teoremas se sigue de las Proposiciones 2.2, 2.3 y de que:

$$\{\Gamma(C_o;\bar{x})\}^* = \{cl\Gamma(C_o;\bar{x})\}^* = \{\Delta(C_o;\bar{x})\}^* = K\{\partial g(\bar{x})\} \quad (15)$$

3. CONDICION NECESARIA DE OPTIMALIDAD PARA EL PSI CONVEXO.

Consideremos el problema de PSI convexa:

$$\text{(P) Min.}_{x\varepsilon S}\ \psi(x) \quad (16)$$

donde $S:=\{x\varepsilon R^n/f_t(x)\leq 0,\ t\varepsilon T\}$. Siendo ψ y f_t, $t\varepsilon T$, funciones convexas definidas en R^n, no necesariamente diferenciables.

La función Lagrangiana standard asociada a (P) es:

$$\Psi(x,\lambda) = \psi(x) + \sum_{t\varepsilon T} \lambda_t f_t(x)$$

$$x\varepsilon R^n,\ \lambda= (\lambda_t)_{t\varepsilon T} \varepsilon R_+^{(T)} \quad (17)$$

(ver, p.e. /1/).

Recordemos que $(\bar{x},\bar{\lambda})\varepsilon R^n \times R_+^{(T)}$ es un punto de silla de la Lagrangiana $\Psi(x,\lambda)$ si se verifica

$$\Psi(\bar{x},\lambda) \leq \Psi(\bar{x},\bar{\lambda}) \leq \Psi(x,\bar{\lambda})$$
$$\forall\lambda\varepsilon R_+^{(T)} \qquad \forall x \varepsilon R^n \quad (18)$$

Se prueba fácilmente que si $(\bar{x},\bar{\lambda})$ es un -- punto de silla de Ψ, entonces $\bar{x}$ es una solución óptima de (P). Para conseguir un punto de silla a partir de una solución óptima, - necesitamos suponer que las restricciones - satisfacen algunas condiciones adicionales.

Sea $T(\bar{x}):= \{t\varepsilon T/f_t(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de restricciones activas. Cuando $T(\bar{x}) \neq \emptyset$ definimos:

$$B(\bar{x}) := \{u_t \ / \ u_t \varepsilon \partial f_t(\bar{x}),\ t\varepsilon T(\bar{x})\} = \bigcup_{t\varepsilon T(\bar{x})} \partial f_t(\bar{x}) \quad (19)$$

La siguiente proposición generaliza el Teorema 28.3 de /8/, permitiendo caracterizar la existencia de puntos de silla que involucran a un $\bar{x}$ dado, y ha sido demostrada en /6/.

Lema 3.1

Dado $\bar{x}\varepsilon R^n$, existirá un punto de silla de la Lagrangiana asociado con $\bar{x}$ si, y solo si $\bar{x}\varepsilon S$ y existe $(\bar{\lambda}_t)_{t\varepsilon T(\bar{x})} \varepsilon R_+^{(T(\bar{x}))}$ tal que

$$0_n \varepsilon \partial\psi(\bar{x}) + \sum_{t\varepsilon T(\bar{x})} \bar{\lambda}_t\, \partial\delta_t(\bar{x}) \quad (20)$$

Cuando $T(\bar{x}) \neq \emptyset$, y por la convexidad del conjunto subdiferencial, puede probarse fácilmente que la condición:

$$0_n \varepsilon \partial\psi(\bar{x}) + \sum_{t\varepsilon T(\bar{x})} \bar{\lambda}_t\, \partial f_t(\bar{x})$$
$$(\bar{\lambda}_t)_{t\varepsilon T(\bar{x})} \varepsilon R_+^{(T(\bar{x}))} \quad (21)$$

es equivalente a la existencia de:

$$\bar{u} \varepsilon \partial\psi(\bar{x}) \text{ tal que } -\bar{u} \varepsilon K\{B(\bar{x})\}. \quad (22)$$

Definición 3.2. La cualificación de Slater para el PSI convexo es:

(i) $T \subset R^m$ es un conjunto compacto,

(ii) $f_t(x)$ es una función continua de (t,x) en TxR^n, y

(iii) existe un $x°$ tal que $f_t(x°) < 0$, para todo $t \in T$.

Llegamos así al resultado fundamental propuesto en este trabajo, que constituye una condición necesaria de optimalidad para el PSI convexo.

Teorema 3.3

Sea $\bar{x}$ una solución óptima del PSI convexo (P), que satisface la cualificación de Slater. Entonces existe un punto de silla asociado con $\bar{x}$.

Demostración. Consideremos el problema finito equivalente a (P):

$$(\hat{P}) \quad \underset{x \in S}{\text{Min}} \; \psi(x) \tag{23}$$

donde $S := \{x \in R^n / f(x) \leq 0\}$ con $f(x) := \max_{t \in T} f_t(x)$

Si $f(\bar{x}) < 0$, entonces $x \in \mathit{int} S$ (ver Lema 3.5 en /6/), y $K(S-\bar{x}) = R^n$. Dado que $\bar{x}$ es una solución óptima y por la condición de Psehnichnyi (/7/) existirá un subgradiente $\bar{u} \varepsilon \partial\psi(\bar{x})$, tal que $-\bar{u} \varepsilon \{K(S-\bar{x})\}^*$. Luego $\bar{u} = 0_n \varepsilon \partial\psi(x)$, y tomando $\bar{\lambda}_t = 0$, para todo $t \varepsilon T$, por Lema 3.1 tenemos que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ es un punto de silla de la Lagrangiana.

Si $f(\bar{x}) = 0$, definimos el conjunto $C_o = \{x \varepsilon R^n / \psi(x) < \psi(\bar{x})\}$. Si $C_o = \emptyset$, $\bar{x}$ sería un óptimo irrestringido de ψ y de nuevo $0_n \varepsilon \partial\psi(\bar{x})$. Asumiremos, pues, $C_o \neq \emptyset$.

Por Teorema 2.5, $\bar{x}$ es mínimo de $\psi(x)$ sobre S si, y solo si, existen $u, v \varepsilon R^n$ tales que $u \varepsilon \partial\psi(\bar{x})$, $v \varepsilon \{\Delta(S;\bar{x})\}^*$ y $u+v = 0_n$. Sabemos que $u \neq 0_n$, pues $C_o \neq \emptyset$. Por otra parte, $x^0 \varepsilon \mathit{int} S$, siendo

$$\mathit{int}\, S = \{x \varepsilon R^n / f(x) < f(\bar{x}) = 0\} \tag{24}$$

(por (iii) de Slater). Entonces, por (4) y la Proposición 2.2:

$$v \varepsilon \{\Gamma(S;\bar{x})\}^* = \{\Gamma(\mathit{int} S;\bar{x})\}^* = K\{\partial f(\bar{x})\} \tag{25}$$

Bajo las hipótesis (i) e (ii) de Slater, sabemos que $B(\bar{x})$ es un conjunto compacto y $\langle B(\bar{x}) \rangle = \partial f(\bar{x})$ (ver /14/, p. 201-204). Como $0_n \notin \partial f(\bar{x})$, pues $\bar{x}$ no es mínimo global de f, tenemos que:

$$K\{B(\bar{x})\} = K\{\langle B(\bar{x}) \rangle\} = K\{\partial f(\bar{x})\} \tag{26}$$

(ver /8/, p. 79).

Luego, existe $u \varepsilon \partial\psi(\bar{x})$, tal que $-u = v \varepsilon K\{B(\bar{x})\}$, lo que equivale a (21). Concluimos el teorema aplicando el Lema 3.1.

4. BIBLIOGRAFIA

/1/ A. CHARNES, W.W. COOPER y K.O. KORTANEK,: "On the Theory of Semi-Infinite Programming and a generalization of the Kuhn-Tucker saddle point theorem for arbitrary convex functions", Naval Research Logistics Quarterly 16, 41-51 (1969).

/2/ A.J. DUBOVICKII y A.A. MILJUTIN,: "Extremum problems with constraints", Soviet Math. 4, 452-455 (1963).

/3/ A.J. DUBOVICKII y A.A. MILJUTIN,: "Extremum problems in the presence of restrictions", Zh. Vychisl. Mat. mat. Fiz.5 (3) 395-453 (1965). USSR Comp. Math. and Math. Physics 5 (3) 1-80, (1965).

/4/ A.D. IOFFE y V.M. TIHOMIROV,: "Theory of Extremal Problems", North Holland, Amsterdam (1979).

/5/ J.P. LAURENT,: "Optimization et Approximation", Hermann, Paris (1972).

/6/ M.A. LOPEZ y E. VERCHER,: "Optimality Conditions for nondifferentiable Convex Semi-Infinite Programming", Mathematical Programming 27, 307-319 (1983).

/7/ B.N. PSHENICHNYI : "Necessary Conditions for an Extremum", Dekker, New York (1971).

/8/ R.T. ROCKAFELLAR : "Convex Analysis", Princeton University Press, N.J. (1970).