Qüestiió - V. 7, n.º 3 (setembre 1983) pp. 479-490

Problemas de Rutas por Arcos

ENRIQUE BENAVENT, VICENTE CAMPOS, ÁNGEL CORBERÁN, ENRIQUE MOTA
UNIVERSIDAD DE VALENCIA

El objetivo de este artículo es ofrecer una visión general de la situación actual de la investigación en Problemas de Rutas por Arcos, que consisten, básicamente, en encontrar rutas óptimas que atraviesen las aristas o/y arcos de un grafo dado. Se analizan, entre otros el Problema del Cartero Chino (definido sobre grafos dirigidos, no dirigidos o mixtos), el Problema del Cartero Rural (dirigido y no dirigido), así como el Problema de los m-Carteros con alguna de sus variantes. En todos los casos se ha intentado ofrecer los resultados existentes relativos a: complejidad de los problemas, algoritmos exactos desarrollados, así como métodos heurísticos con el correspondiente análisis del peor caso.

ON ARC ROUTING PROBLEMS

Keywords: EULERIAN CIRCUITS, POSTMAN PROBLEMS, ROUTING.

1. INTRODUCCION.

El objetivo de este artículo es ofrecer una visión general de la situación actual de la investigación en el área que llamaremos genéricamente de los Problemas de Rutas por Arcos, (Arc Routing Problems). Estos problemas consisten, en una primera aproximación, en encontrar rutas óptimas que atraviesen, parcialmente o en su totalidad, las aristas o/y arcos de un grafo dado. El primer problema de este tipo fué propuesto por Euler /14/ y es conocido como el Problema de los Puentes de Konigsberg.

Los Problemas de Rutas por Arcos tienen aplicación en problemas tales como la recogida de basura, reparto de leche o correo, inspección de sistemas de distribución (redes eléctricas, de teléfono o de ferrocarril), limpieza de calles, etc.

En la Sección 2 discutimos el problema de encontrar un circuito de coste mínimo que atraviese cada arista (y/o arco) de un grafo que puede ser no dirigido (CPP), dirigido (DCPP) o mixto (MCPP). La Sección 3 está dedicada al Problema del Cartero Rural definido tanto en un grafo no dirigido como en un grafo dirigido (RPP y DRPP) donde solamente un subconjunto de aristas (o arcos) debe ser atravesado por el circuito solución. Finalmente la Sección 4 trata el problema de encontrar no uno sino cierto número de circuitos que conjuntamente atraviesen todas las aristas del grafo (CCPP considerando restricciones de capacidad y m-CPP sin ellas).

En todos los casos, presentamos, hasta donde conocemos, los resultados existentes sobre la complejidad de los problemas, los algoritmos exactos desarrollados, así como los métodos heurísticos con sus correspondientes análisis del peor caso.

A continuación, definimos algunos conceptos básicos que serán utilizados en este artículo.

- Enrique Benavent López - Vicente Campos Aucejo - Angel Corberán Salvador - Enrique Mota Vidal
- Departament d'Estadística i Investigació Operativa de la Facultat de Matemàtiques de Valencia
  Av. Dr. Moliner, 50 - Burjasot - VALENCIA

- Article rebut el Juliol del 1983.

Definiciones.

Sea G=(V,E) un grafo no dirigido, donde V es un conjunto de n vértices y E es un conjunto de aristas con costes c_e no negativos asociados. El grado de un vértice es el número de aristas incidentes con él. Un vértice es par si su grado es un número par. Un grafo no dirigido es par si todos sus vértices son pares.

Sea G=(V,A) un grafo dirigido con costes c_a no negativos asociados a sus arcos. El grado de entrada de un vértice es el número de arcos que le entran y el grado de salida es el número de arcos que salen de él. Un vértice es simétrico si tiene el mismo grado de entrada y de salida. Un grafo dirigido es simétrico si todos sus vértices son simétricos.

Un camino, de v_0 (vértice inicial) a v_k (vértice final) en un grafo no dirigido, es una sucesión de vértices y aristas $P = (v_0, l_1, v_1, \ldots, l_k, v_k)$ (los vértices y/o las aristas pueden repetirse) donde la arista l_i es incidente con los vértices v_{i-1} y v_i, $1 \leq i \leq k$. En un grafo dirigido, los arcos l_i están dirigidos desde v_{i-1} a v_i. Diremos que las aristas (o arcos) son atravesadas por el camino P. Un circuito es un camino cuyos vértices inicial y final coinciden. Un tour en G es un circuito que atraviesa cada arista (arco) de G al menos una vez. El coste de un camino, circuito o tour, es la suma de los costes de las aristas (arcos) que contiene.

Un grafo no dirigido es conexo si cada par de vértices está unido por un camino. Un grafo dirigido es (débilmente) conexo si el grafo no dirigido subyacente (considerando los arcos como aristas) es conexo. Un grafo dirigido es fuertemente conexo si para cada par de vértices u y v, existe un camino de u a v y un camino de v a u.

2. EL PROBLEMA DEL CARTERO CHINO.

2.1 EL PROBLEMA DEL CARTERO CHINO EN UN GRAFO NO DIRIGIDO (CPP)

Sea G=(V,E) un grafo conexo no dirigido con costes no negativos asociados a sus aristas. El CPP consiste en encontrar un tour de coste mínimo en G.

Este problema fué inicialmente planteado por el matemático chino Mei-Ko /22/.

En el caso en que el grafo sea par, este problema puede ser resuelto fácilmente teniendo en cuenta el siguiente teorema:

Teorema: Un grafo G, conexo y no dirigido, contiene un tour que atraviesa cada arista exactamente una vez (tour euleriano) sii el número de vértices de grado impar es cero. Ver /6/ para una demostración.

Por lo tanto, éste sería el tour de coste mínimo.

Si un grafo G contiene un tour euleriano, éste puede ser construido utilizando la siguiente regla debida a Fleury /21/: Partiendo de cualquier vértice, ir recorriendo aristas, eliminándolas al mismo tiempo. No atravesar una arista si al eliminarla el grafo quedara dividido en dos componentes conexas (excluyendo vértices aislados).

Cuando G contiene algún vértice de grado impar, cualquier tour en G contendrá alguna arista más de una vez. Podemos representar cada repetición por medio de una arista artificial (una copia añadida al grafo original). Entonces podemos considerar el CPP como el problema de encontrar un conjunto de aristas artificiales, con coste total mínimo, que al ser añadido al grafo original, hagan éste par.

Este problema fué formulado y resuelto, como un problema de acoplamiento de mínimo coste, por Edmonds /12/, Busacker y Saaty /4/, Christofides /5/ y Edmonds y Johnson /13/.

El procedimiento de solución, que es $0(n^3)$, puede resumirse como sigue.
Sea $V' \subseteq V$, $V' = \{v_1, \ldots, v_t\}$ el conjunto de vértices de G de grado impar, cuyo número es siempre par; construir el grafo completo $G'=(V',E')$ donde $v_i, v_j \in V'$, $(v_i, v_j) \in E'$, y donde el coste $s(v_i, v_j)$ asociado a cada arista $(v_i, v_j) \in E'$ es igual al coste del camino más corto entre v_i y v_j en G. Resolver en G' el problema de acoplamiento de coste mínimo; sea M el conjunto de aristas de la solución óptima. Entonces, añadiendo a G las aristas artificiales correspondientes a las aristas de G en los caminos más cortos identificados con aristas de M, obtenemos un grafo par. Es fácil demostrar que

cada arista aparece como máximo dos veces en cualquier solución óptima al CPP.

2.2. EL PROBLEMA DEL CARTERO CHINO EN UN GRAFO DIRIGIDO (DCPP)

Consideremos ahora el problema de encontrar un tour de coste mínimo en un grafo dirigido. Sea G=(V,A) un grafo dirigido con costes no negativos asociados a los arcos de A. El grafo debe ser fuertemente conexo para asegurar la existencia de soluciones al problema.

En el caso en que el grafo G sea simétrico, el problema es trivial, puesto que:

Teorema: Un grafo G fuertemente conexo y dirigido, contiene un tour euleriano sii los grados de entrada, $d_t(v)$, y los grados de salida, $d_0(v)$, son iguales $\forall$ $v \epsilon V$.

La regla de Fleury mencionada en el apartado 2.1, puede extenderse fácilmente al caso dirigido para construir un tour euleriano si éste existe.

Si el grafo G es no simétrico, el problema consiste, como en el caso no dirigido, en encontrar un conjunto de arcos artificiales, con coste total mínimo, tales que al añadirlos a G, hacen éste simétrico. Esto puede hacerse resolviendo un problema de flujo de coste mínimo (/13/ y /26/) en el que:

(a) Los vértices $v \epsilon V$ con $D(v)=d_t(v)-d_0(v)>0$, son considerados fuentes con ofertas $D(v)$.

(b) Los vértices $v \epsilon V$ con $D(v)<0$, son considerados sumideros con demanda $-D(v)$.

Añadir una superfuente conectada a todas las fuentes y un supersumidero conectado a todos los sumideros. La capacidad de cada arco que entra en el supersumidero se define como la demanda de su vértice inicial; la capacidad de cada arco que sale de la superfuente es igual a la oferta del vértice final. Las restantes capacidades de los arcos son infinito. Entonces, resolvemos un problema de flujo de coste mínimo que satisfaga todos los requerimientos de las fuentes y sumideros.

A partir del grafo G, construimos el grafo G^* añadiendo a cada arco de G tantos arcos artificiales como unidades de flujo lo hayan atravesado en la solución al problema de flujo anterior. El grafo G^* resultante es simétrico.

2.3. EL PROBLEMA DEL CARTERO CHINO EN UN GRAFO MIXTO (MCPP)

Sea G=(V,A,E) un grafo mixto, donde V es un conjunto de vértices, A un conjunto de arcos y E un conjunto de aristas; supondremos costes no negativos asociados a los arcos y aristas del grafo; denotaremos por $(i,j) \epsilon A$ el arco de i a j y por $\langle i,j \rangle \epsilon E$ la arista que une i y j.

El MCPP es el problema de encontrar un tour de coste mínimo en G, donde las aristas pueden ser atravesadas en una o en ambas direcciones. Una condición necesaria y suficiente para que exista solución es que G sea fuertemente conexo.

Diremos que el grafo G es par cuando cada vértice tiene grado par (número de arcos y aristas incidentes con él).

A diferencia con los casos dirigido y no dirigido, el MCPP es un problema NP-completo como demostró Papadimitriou /29/, incluso siendo el grafo planar, el grado de los vértices menor o igual que tres y todos los costes iguales entre sí.

Sin embargo, en el caso particular en que el grafo es par, existen algoritmos polinomiales para resolver el MCPP.

a) El grafo G es par y simétrico. Este caso es trivial puesto que existe en G un tour euleriano. (ver Ford y Fulkerson /15/).

b) El grafo G es par pero no simétrico. En este caso, el MCPP puede ser resuelto óptimamente en tiempo polinomial utilizando un flujo de coste mínimo que haga el grafo simétrico. El procedimiento, debido a Edmonds y Johnson /13/, consiste en:

Sea $G'=(V,A \cup U_1 \cup U_2)$ un grafo dirigido donde los arcos de A tienen costes originales y capacidad infinita, U_1 contiene dos arcos (de direcciones opuestas) por cada arista de E, con costes iguales al coste de la arista y capacidad infinita y U_2 contiene dos arcos (de direcciones opuestas) por cada arista de E, de coste cero y capacidad uno. Resolver el problema de flujo de coste mínimo que satisfaga todos los requerimientos de las fuentes y sumideros de G'.

Si en la solución óptima al problema de flujo anterior, una unidad de flujo atraviesa un arco de U_2, dirigir la correspondiente arista en G en la misma dirección. Añadir al grafo original tantas copias de arcos en A y U_1 como unidades de flujo los hayan atravesado. El resultado será un grafo simétrico en el que algunas aristas pueden permanecer sin dirección asignada.

En el citado artículo de Edmonds y Johnson se demuestra la existencia de un flujo óptimo que conserva la paridad de todos los vértices; sin embargo, no toda solución óptima al problema de flujo definido sobre G' cumple esta propiedad, como señaló Frederickson /17/, quien proporciona un algoritmo para hacer el grafo par, sin coste adicional, a partir de cualquier solución óptima del problema de flujo.

Otro algoritmo equivalente al de Edmonds y Johnson fue propuesto por Minieka en /26/.

Si el grafo G no es par, como se mencionó anteriormente, el problema es NP-completo y por lo tanto, es importante el desarrollo de algoritmos heurísticos que en tiempo polinomial produzcan "buenas" soluciones posibles para este caso general.

2.3.1. ALGORITMOS HEURISTICOS PARA EL MCPP

Los dos procedimientos heurísticos más conocidos han sido estudiados por Frederickson /17/. Estos dos algoritmos, llamados MIXED1 y MIXED2, transforman el grafo original en un grafo par y simétrico en dos etapas, ambas óptimas por separado pero que pueden producir una solución no óptima al MCPP cuando se aplican conjuntamente.

MIXED1

(a) Transformar el grafo original en un grafo par resolviendo un problema de acoplamiento mínimo, donde los caminos más cortos entre cualquier par de vértices de grado impar se han calculado ignorando las direcciones de los arcos.

(b) Hacer el grafo resultante simétrico, utilizando el procedimiento de Edmonds y Johnson descrito en el apartado (b) de la Sección 2.3.

MIXED2

(a) Transformar el grafo original en un grafo simétrico, utilizando el procedimiento de Edmonds y Johnson descrito en el apartado (b) de la Sección 2.3.

(b) Sea U, $U \subseteq E$, el conjunto de aristas sin una dirección asignada en la etapa anterior. Hacer par el grafo inducido por U, resolviendo un problema de acoplamiento de coste mínimo, donde las distancias entre cada par de vértices impares se calculan considerando únicamente las aristas de U. Añadiendo al grafo resultante del apartado (a) una copia de cada arista duplicada por el acoplamiento, se obtiene un grafo par y simétrico.

En el mencionado artículo, Frederickson demuestra que el ratio del peor caso de ambos algoritmos es 2 y además que esta cota es alcanzable. Sin embargo, utilizando la mejor solución de entre las producidas por MIXED1 y MIXED2, el ratio del peor caso es, como máximo, 5/3, aunque hasta el momento sólo se han encontrado ejemplos donde se alcanza la cota de 3/2. En el caso de grafos planares, Frederickson presenta un algoritmo cuyo ratio en el peor caso es 3/2.

2.3.3. ALGORITMOS EXACTOS PARA EL MCPP

Hasta el momento, sólo existe un método exacto para el MCPP que haya sido detallado completamente y aplicado a una colección de problemas test. El método, debido a Christofides et al./10/, será discutido brevemente a continuación.

El MCPP puede formularse, en forma parecida a la presentada por Kappauf y Koehles /20/, como el siguiente problema de programación lineal entera:

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} + \sum_{<i,j>\in E} c_{ij}(y_{ij}+y_{ji}) + \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}$$

s.a:

$$\sum_{j\in\Gamma_A(i)} (1+x_{ij}) + \sum_{j\in\Gamma_E(i)} y_{ij} = \sum_{j\in\Gamma_A^{-1}} (1+x_{ji}) + \sum_{j\in\Gamma_E(i)} y_{ji} \quad \forall i\in V \qquad (1)$$

$$y_{ij} + y_{ji} \geq 1 \qquad \forall <i,j>\in E \qquad (2)$$

$$x_{ij},\ y_{ij},\ y_{ji} \geq 0, \text{ enteras } \quad \forall (i,j)\in A,\ \forall <i,j>\in E \qquad (3)$$

donde x_{ij} representa el número de veces que cada arco $(i,j)\in A$ se repite en la solución optima, y_{ij} el número de veces que la arista $<i,j>\in E$ aparece dirigida de i a j en la solución óptima y

$\Gamma_A(i) = \{j\in V: (i,j)\in A\}$, $\Gamma_E(i) = \{j\in V: <i,j>\in E\}$, $\Gamma_A^{-1}(i) = \{j\in V: (j,i)\in A\}$.

El algoritmo descrito en el artículo antes mencionado es un procedimiento Branch and Bound, en el que las ramificaciones se realizan sobre las variables y_{ij}, en la forma siguiente: una rama impone la restricción $y_{ij}\geq 1$ y la otra $y_{ij}=0$. Las cotas inferiores utilizadas en el algoritmo están basadas en la relajación lagrangiana de algunas de las restricciones del problema. Una de ellas se reduce a la resolución de un problema de flujo de coste mínimo, resultante de la relajación lagrangiana de las restricciones (2). La otra cota se obtiene añadiendo las restricciones de paridad sobre los grados de los vértices (redundantes en presencia de las restantes restricciones) y relajando lagrangianamente las restricciones (1), con lo que su cálculo se basa en la resolución de un problema de acoplamiento de mínimo coste.

En dicho trabajo, se proporcionan resultados computacionales de este algoritmo con problemas de hasta 50 vértices, 66 arcos y 39 aristas.

Otros métodos exactos han sido sugeridos por Kappauf y Koehler y Minieka:

Kappauf y Koehler /20/ presentan una formulación similar a la anterior y demuestran que los puntos extremos del poliedro de soluciones posibles del problema lineal asociado al MCPP tienen coordenadas enteras excepto para las variables y_{ij}, que pueden tomar el valor 1/2 y que, además, si una variable y_{ij} toma el valor 1/2, también lo hace la variable y_{ji}. Entonces, como puede demostrarse fácilmente, podemos obtener soluciones posibles para el MCPP haciendo 1 todas las variables con valor 1/2. Se demuestra también que la solución óptima al MCPP se encuentra entre las soluciones posibles así obtenidas. Así pues, un método para resolver el problema sería estudiar todos los puntos extremos de este poliedro. Sin embargo, como ellos mismos señalan, el MCPP es bastante degenerado y normalmente muchas bases corresponden a un mismo punto extremo.

Minieka /27/ formula el MCPP como un problema de flujos con ganancias, de coste mínimo, y con valores enteros, definido sobre un grafo transformado del original en el que por cada arista hay que añadir dos nuevos vértices y cinco nuevos arcos. Puesto que cualquier problema de flujos con ganancias es un problema de programación lineal, Minieka sugiere imponer las restricciones de integralidad utilizando técnicas de planos de corte.

3. EL PROBLEMA DEL CARTERO RURAL.

En esta sección consideraremos una generalización del Problema del Cartero Chino en el sentido de que solamente un subconjunto de las aristas (o arcos) del grafo deben ser atravesados por un circuito solución. Consideraremos el caso en el que el grafo inducido en G por este subconjunto de aristas (o arcos) "requeridos" no es conexo, puesto que, en otro caso, el problema puede resolverse de una forma similar a la del CPP. Este problema es una generalización del problema del Agente Viajero (TSP) en el sentido de que cada TSP puede convertirse en un RPP. Discutiremos este problema, conocido como el Problema del Cartero Rural, definido tanto en un grafo dirigido como no dirigido.

3.1. EL PROBLEMA DEL CARTERO RURAL EN UN GRAFO NO DIRIGIDO (RPP)

Sea G=(V,E) un grafo conexo y no dirigido, con costes no negativos asociados a sus aristas. Dado $E_R \subseteq E(E_R \neq \phi)$, el Problema del Cartero Rural consiste en encontrar un circuito de coste mínimo que atraviese cada arista de E_R al menos una vez.

Este problema fué considerado por primera vez por Orloff /28/ y Lenstra y Rinnoy-Kan /23/ han demostrado que es NP-Completo. Christofides et al. /8/ proporcionan un algoritmo para resolver el RPP que resumimos a continuación.

Sea V_R el conjunto de vértices incidentes con alguna arista de E_R. El RPP definido sobre G es equivalente al definido sobre el grafo $G_C' = (V_R, E_R \cup E_S')$ donde las aristas de E_S' unen cada par de vértices de V_R y tienen un coste igual al del camino más corto en G entre dichos vértices. Es posible simplificar el grafo G_C', obteniendo un nuevo grafo $G_C = (V_R, E_R \cup E_S), E_S \subseteq E_S'$, con las mismas soluciones al RPP, eliminando:

a) todas las aristas $(i,j) \in E_S'$ para las que $c_{ij} = c_{ik} + c_{kj}$ para algún k, y

b) una de las dos aristas en paralelo, si ambas tienen el mismo coste.

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_k$ las componentes conexas del grafo inducido por E_R en G_C. Utilizaremos C_i para representar el conjunto de vértices de la componente i. Representaremos por F la familia de las C_i, $i=1,\ldots,k$. Si $V \subset F$ es una subfamilia de F, utilizaremos N(V) como el conjunto de todos los vértices de los elementos de V, o sea $N(V) = \bigcup_{C_i \in V} C_i$.

El problema puede ser formulado entonces como:

$$\text{Min} \sum_{e \in E_R} c_e x_e + \sum_{e \in E_S} c_e y_e + \sum_{e \in E_R} c_e$$

s.a.

$$\sum_{e \in E_R} a_{ie}(1+x_e) + \sum_{e \in E_S} a_{ie} y_e \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \quad \forall i \in V_R \tag{4}$$

$$\sum_{e \in K_t} y_e \geq 1 \qquad \forall K_t = \{(i,j) \in E_S \mid i \in N(V_t),\ j \in N(\bar{V}_t), V_t \subset F\} \tag{5}$$

$$x_e \geq 0 \text{ y entero}, \ \forall e \in E_R \qquad y_e \geq 0 \text{ y entero}, \ \forall e \in E_S \tag{6}$$

Donde x_e representa el número de veces que la arista $e \in E_R$ es repetida por un circuito, y_e representa el número de veces que la arista $e \in E_S$ aparece en el circuito y $[a_{ie}]$ es la matriz de incidencia del grafo G_C.

El método descrito en /8/ es un algoritmo de Branch and Bound en el que las cotas inferiores se calculan considerando la relajación lagrangiana de las restricciones (4) en la anterior formulación. El problema relajado puede resolverse, esencialmente, calculando el Arbol Generador de Mínimo Peso, Shortest Spanning Tree (SST), sobre un grafo "condensado" en el que cada vértice representa una componente conexa. La cota inferior que se obtiene puede ser mejorada añadiendo, en forma lagrangiana, a la función objetivo del problema relajado , las restricciones de 2-conectividad:

$$\sum_{e \in K_t} y_e \geq 2 \qquad \forall K_t$$

que eran redundantes en la formulación original.

La cota superior utilizada fué obtenida con un algoritmo heurístico similar al propuesto por Christofides /7/ para el TSP. Este algoritmo está basado en el cálculo de un Arbol Generador de Mínimo Peso que conecta todas las componentes y un Acoplamiento de Mínimo Coste que haga par el grafo resultante. Este algoritmo fué sugerido por Frederickson /17/ y tiene un ratio del peor caso de 3/2 (ver /2/ para una demostración). En 12 de los 24 problemas probados esta cota fué óptima y está a un 1.3% de la solución óptima en promedio.

La ramificación en el árbol de Branch and Bound se realiza sobre las aristas con vértices terminales en componentes distintas. Una rama fija la arista a estar en la solución y la otra impide que aparezca. Es, pues, importante la simplificación del grafo G_C' en el grafo G_C.

El algoritmo descrito se probó en 24 problemas de tamaños hasta 84 vértices, 180 aristas, 74 aristas requeridas y 8 componentes conexas.

3.2 EL PROBLEMA DEL CARTERO RURAL EN UN GRAFO DIRIGIDO (DRPP).

Sea G=(V,A) un grafo dirigido y fuertemente conexo con costes no negativos asociados a sus arcos. Dado el subconjunto $A_R \subseteq A$ $(A_R \neq \phi)$ de arcos requeridos, el DRPP consiste en encontrar un circuito de coste mínimo que atraviese cada arco de A_R al menos una vez.

Como en el caso no dirigido, el DRPP es un problema NP-Completo /23/. A diferencia con los casos simétrico y asimétrico del TSP, el RPP y el DRPP no pueden reducirse uno a otro y por lo tanto, deben desarrollarse técnicas de solución diferentes para cada uno de ellos.

Este problema ha sido estudiado por Christofides et.al /9/, que proporcionan un algoritmo exacto para su resolución. Utilizando transformaciones análogas a las realizadas en la sección 3.1, el DRPP puede definirse sobre un grafo $G_c=(V_R, A_R \cup A_S)$, en el que las componentes C_i, inducidas por A_R en G_c no son necesariamente fuertemente conexas.

El DRPP puede formularse, con respecto a cualquier componente C_s, en la forma siguiente:

$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A_R} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j)\in A_S} c_{ij}y_{ij} + \sum_{(i,j)\in A_R} c_{ij}$$

s.a.

$$\sum_j (1+x_{ij})b_{ij} + \sum_j y_{ij}\bar{b}_{ij} = \sum_j (1+x_{ji})b_{ji} + \sum_j y_{ji}\bar{b}_{ji} \quad \forall i\in V_R \quad (7)$$

$$\sum_{(i,j)\in K_t} y_{ij} \geq 1$$

$$K_t=\{(i,j)\in A_S \mid \; i\in N(V_t), \; j\in N(\bar{V}_t), V_t\subset F, C_s\in V_t\} \quad (8.a)$$

$$\sum_{(i,j)\in K_t} y_{ij} \geq 1$$

$$K_t=\{(i,j)\in A_S \mid \; i\in N(V_t), \; j\in N(\bar{V}_t), V_t\subset F, C_s\in \bar{V}_t\} \quad (8.b)$$

$$\begin{array}{lll} x_{ij}\geq 0 & \text{y enteras} & \forall (i,j)\in A_R \\ y_{ij}\geq 0 & \text{y enteras} & \forall (i,j)\in A_S \end{array} \quad (9)$$

donde x_{ij} e y_{ij} representan respectivamente el número de repeticiones del arco $(i,j)\in A_R$ y el número de apariciones del arco $(i,j)\in A_S$ en cualquier circuito solución. Las matrices $B=[b_{ij}]$ y $\bar{B}=[\bar{b}_{ij}]$ se definen como sigue:

$$b_{ij}= \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i,j)\in A_R, \; i,j\in V_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\bar{b}_{ij}= \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i,j)\in A_S, \; i,j\in V_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil demostrar que las restricciones (8.a) o las (8.b) son redundantes en presencia de las restricciones (7).

En el artículo mencionado se presenta un algoritmo de branch and bound para resolver óptimamente el DRPP. Las cotas inferiores se obtienen de la relajación lagrangiana de las restricciones (7) y (8.b). El problema relajado se resuelve calculando una Arborescencia Generadora de Mínimo Peso, Shortest Spanning Arborescence (SSA), con raiz en la componente C_s, en un grafo "condensado" en el que cada vértice representa una componente C_i. Este método depende de la elección de s, la raiz de la SSA; variando s, obtenemos k cotas inferiores entre las que podemos elegir la de mayor coste.

Para calcular una cota superior se presenta un algoritmo heurístico que consta de dos etapas. La primera consiste en el cálculo de una SSA que conecta todas las componentes y la segunda, en la resolución de un problema de flujo de coste mínimo que haga el grafo resultante simétrico. El ratio del peor caso de este algoritmo es $\alpha+1$ /2/, donde α es el menor número real para el que se cumple que $c_{ij} \leq \alpha c_{ji}$. En 10 de un total de 22 problemas la solución proporcionada por este heurístico fué óptima; en promedio, la cota superior que proporciona está a un 1.4% del valor óptimo.

Las ramificaciones en el algoritmo de branch and bound se realizan sobre los arcos $(i,j)\in A_S$ que unen vértices de distintas componentes, en una forma similar a la del caso no dirigido. En el citado artículo se presentan resultados computacionales de 22 problemas con tamaños de hasta 80 vértices, 179 arcos, 71 arcos requeridos y 8 componentes.

4. EL PROBLEMA DE LOS M CARTEROS (m-CPP)

Una extensión natural del CPP resulta cuando se plantea el problema de encontrar no uno, sino m circuitos, todos ellos conteniendo un vértice especificado (el depósito) y que conjuntamente atraviesen todas las aristas del grafo.

Este problema ha sido estudiado con muchas variantes, frecuentemente con el objeto de que se ajuste mejor a los problemas que aparecen en la práctica, en los que generalmente se dispone de una flota de vehículos y se trata de encontrar un conjunto de circuitos que sean cubiertos (para recoger o repartir mercancías) por los vehículos.

Se pueden imponer varios tipos de restricciones sobre los circuitos que van a ser cubiertos por los vehículos, tales como la capacidad de los vehículos, tiempo máximo de servicio, etc. Además, los objetivos que se persiguen pueden ser diferentes; por ejemplo, se se puede tratar de minimizar el número total de vehículos, la distancia total recorrida, la máxima distancia recorrida por cualquiera de los vehículos, etc. Asimismo, es posible considerar varios depósitos o diferentes puntos de salida y llegada para los vehículos.

Se han propuesto un gran número de algoritmos heurísticos para el diseño de rutas de autobuses escolares, camiones de riego y limpieza de las calles, recogida de basura, etc. En Bodin y Golden /3/ se da una clasificación de este tipo de problemas y de los heurísticos propuestos.

Este problema ha sido estudiado, casi exclusivamente, sobre grafos no dirigidos y hasta donde conocemos no ha sido propuesto ningún método exacto de resolución. En esta sección, estudiaremos las dos variantes más conocidas de este problema.

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido y conexo con costes $c_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in E$, y sea $v_1 \in V$ un vértice dado que representará el depósito.

4.1 EL m-CPP SIN RESTRICCIONES DE CAPACIDAD.

Dado $m \geq 2$, consideraremos el problema de encontrar m circuitos, todos ellos conteniendo al vértice v_1, que recorran conjuntamente al menos una vez todas las aristas del grafo y de forma que se minimice el coste del circuito de coste máximo.

Frederickson et.al. /16/ demuestran que este problema, al que denominaremos simplemente m-CPP, es NP-completo y proporcionan un algoritmo heurístico cuyo ratio del peor caso es $2 - \frac{1}{m}$.

El primer paso de este algoritmo consiste en resolver el CPP sobre el grafo G, obteniendo un circuito $R=(v_1, e_{i_1}, v_{i_2}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}, v_1)$ con coste total L. El objetivo del heurístico es dividir este circuito en m secciones, R_j, $j=1,\dots,m$, cuyos extremos serán luego conectados con v_1 utilizando caminos más cortos, obteniendo así m circuitos que se pretende tengan costes similares.

Sea $s_{max} = \frac{1}{2} \max_j \{s(v_1, v_{i_j}) + c(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) + s(v_{i_{j+1}}, v_1)\}$. Se divide el coste del circuito, L, en m partes con costes $\frac{1}{m}(L-2s_{max})$, excepto el primero y el último que tienen costes $\frac{1}{m}(L-2s_{max})+s_{max}$. Así, la suma de los costes de las j primeras partes es igual a $L_j = \frac{j}{m}(L-2s_{max})+s_{max}$, para $j=1,\dots,m-1$. Llamamos S_{i_j} a la sección del circuito R entre v_1 y v_{i_j}, $j \leq k$, y sea $c(S_{i_j})$ su coste.

Denotaremos por $v_{p(j-1)}$ y $v_{p(j)}$ a los vértices inicial y final de la sección R_j, que son calculados de la forma siguiente: para cada $j=1,\dots,m-1$, encontrar el último vértice $v_{p'(j)}$, tal que $c(S_{p'(j)}) \leq L_j$, y sea $r_j = L_j - c(S_{p'(j)})$. Entonces, si

$$r_j + s(v_{p'(j)}, v_1) \leq c(v_{p'(j)}, v_{p'(j)+1}) - r_j + s(v_{p'(j)+1}, v_1),$$

se toma $v_{p(j)} = v_{p'(j)}$

en otro caso, se toma $v_{p(j)} = v_{p'(j)+1}$.

Así, obtenemos $R_1 = (v_1, e_{i_1}, \dots, v_{p(1)})$, $R_2 = (v_{p(1)}, \dots, v_{p(2)}), \dots, R_m = (v_{p(m-1)}, \dots v_1)$, y conectando v_1 con los vértices inicial y final de cada R_j, obtenemos los m circuitos que construyen una solución posible para el m-CPP.

4.2 EL m-CPP CON RESTRICCIONES DE CAPACIDAD (CCPP).

Supongamos ahora, que, además de los costes $c_{ij} \geq 0$, existen otras cantidades $q_{ij} > 0$ (que llamaremos demandas), asociadas a cada arista $(i,j) \in E$. El Problema del Cartero Chino con Capacidades (CCPP) consiste en encontrar un conjunto de circuitos, todos ellos conteniendo al vértice v_1, que atraviesen conjuntamente cada arista de G al menos una vez, con coste total mínimo y tales que la suma de las q_{ij} correspondientes a las aristas atravesadas por un circuito es menor o igual que una cantidad dada W (la capacidad de cada vehículo).

El CCPP 0'5-aproximado se define como el problema de encontrar una solución para el CCPP cuyo coste sea menor que 1.5 veces el valor óptimo. El siguiente teorema ilustra suficientemente la complejidad del CCPP.

Teorema (Golden y Wong /19/): El CCPP 0.5-aproximado es NP-Completo.

Por otra parte, Golden y Wong /19/ consideran un problema mas general, que denominan CARP y que se define como el CCPP excepto por el hecho de que las demandas q_{ij} pueden ser cero y solamente se requiere atravesar las aristas con demanda mayor que cero. Si consideramos un sólo vehículo sin límite de capacidad, el CARP se convierte en el RPP, ya discutido en la Sección 3. En /19/ se presenta una formulación lineal entera del CARP con un número de restricciones que es exponencial en n, y una formulación alternativa con un número de restricciones menor que 3 mn^2, en la que se utilizan tanto variables enteras como contínuas.

4.2.1. COTAS INFERIORES PARA EL CCPP.

Obviamente, el coste de la solución óptima del CPP definido sobre el grafo G constituye una cota inferior para el CCPP. Golden y Wong en el artículo citado, presentan una cota inferior para el CARP, que es válida también para el CCPP, y que resumimos a continuación.

Sea $E_R \subseteq E$ (E_R=E en el CCPP) el conjunto de aristas con $q_{ij}>0$, y sea $S=\{s_1,\ldots,s_t\}$ el conjunto de vértices incidentes con un número impar de aristas de E_R. Obviamente, al menos $M=\left\lceil \sum q_{ij}/W \right\rceil$ circuitos serán necesarios para recorrer todas las aristas de E_R. Supongamos que d_1, el grado de v_1, es par y no mayor que 2M (si d_1 fuera impar, hacer $d_1 \leftarrow d_1+1$ y continuar el procedimiento). El grado de v_1 tendrá que incrementarse, al menos, en $R=2M-d_1$. Definimos dos nuevos conjuntos de vértices: $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_R\}$ y $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_R\}$. Sea G' el grafo cuyo conjunto de vértices es $S \cup A \cup B$ y con costes d_{ij} para las aristas, definidos como sigue:

$$d_{ij}=\begin{cases} \text{el coste del camino más corto en G entre i y j, si } i,j \in S. \\ \text{el coste del camino más corto en G entre i y } v_1\text{, para } i \in S,\ j \in A. \\ \text{el coste de la arista de menor peso incidente con } v_1\text{, para } i \in A,\ j \in B. \\ 0\text{, para } i,\ j \in B \\ \infty\text{, en otro caso} \end{cases}$$

Sea z el valor del acoplamiento de coste mínimo definido en G'. Se demuestra que $z+\sum_{(i,j)\in E_R} c_{ij}$ es una cota inferior para el CARP.

4.2.2. ALGORITMOS HEURÍSTICOS PARA EL CCPP.

Se han propuesto varios algoritmos heurísticos para el CCPP y problemas relacionados con él. En lo que sigue, ilustraremos algunos de los distintos métodos utilizados, discutiendo brevemente tres de estos algoritmos.

Heurístico de Christofides /5/.

Se dice que un circuito es admisible si contiene a v_1 y su demanda total es menor o igual que W. Además, este circuito deberá cumplir que al eliminar sus aristas del grafo G, el grafo resultante siguiera siendo conexo. Si existe un circuito admisible en G, podemos encontrarlo utilizando la siguiente estrategia: construir secuencialmente un camino $v_1,\ldots,v_i$ añadiendo, si es posible, aristas (v_i,v_j) que cumplan:

a) que al ser eliminadas, el grafo permanece conexo (excluyendo vértices aislados), y

b) la demanda total del camino $(v_1,\ldots,v_i,v_j)$ más la del camino de menor demanda de v_j a v_1 (que se puede calcular utilizando un al goritmo para el camino más corto) es como máximo W.

Si no existe una arista (v_i, v_j) que cumpla - estas condiciones, completar el circuito conectando v_i con v_1 utilizando el camino de - menor demanda y eliminar las aristas correspondientes del grafo.

Repetir esta estrategia hasta que no sea posible encontrar un circuito admisible. Si el grafo resultante no tiene aristas, hemos obtenido una solución posible. En caso contrario, se añaden un conjunto de aristas artificiales con coste original y con demanda cero, como sigue:

1) Si el grado de todos los vértices es par, y el de v_1 no es cero, añadir los dos caminos más cortos (de aristas artificiales) calculados en el grafo original, desde v_1 al vértice más cercano. Si en el grafo resultante todavía no existe un circuito admisible, añadir los dos caminos más cortos desde v_1 al segundo vértice más cercano, y así sucesivamente.
2) Si existe algún vértice de grado impar, - (o v_1 tiene grado cero), resolver un problema de acoplamiento de coste mínimo para hacerlos pares. Si v_1 tiene grado cero, desdoblarlo en dos vértices unidos por -- una arista de coste infinito y resolver - el correspondiente problema de acoplamiento.

El algoritmo repite estos pasos hasta que cada arista de G ha sido cubierta.

Heurístico de Male y Liebman /25/.

Supongamos que el grafo G es planar y que el número, m, de circuitos es conocido. El algoritmo consiste básicamente de 5 etapas:

1) Resolver el CPP sobre el grafo G, obteniendo un grafo par G_1.
2) Dividir G_1 en un conjunto de circuitos de forma que cada arista esté contenida en - un solo circuito y que el número de circuitos sea el mayor posible.
3) Formar el grafo G_2 en el que cada vértice representa un circuito de los construidos en 2) y las aristas unen vértices que --- corresponden a circuitos adyacentes y tienen coste cero. Asignar a cada vértice de G_2 una demanda igual a la suma de las demandas de las aristas del circuito correspondiente. Añadir un nuevo vértice, que representa el depósito, unido al resto de - vértices con una arista cuyo coste es dos veces el del camino más corto en G_1 desde el depósito al vértice más cercano del circuito correspondiente.
4) Construir, utilizando el grafo G_2, m árboles, con raiz en el depósito, tales que la suma de las demandas de los vértices de cada uno de ellos no sobrepasa la capacidad W. Los árboles son construidos heurísticamente, intentando minimizar el coste total.
5) Expander los vértices de estos árboles, obteniendo así m circuitos en G.

Heurístico de Golden y Wong /19/.

Este algoritmo fué propuesto inicialmente por sus autores para el CARP y puede resumirse como sigue:

1) Construir, para cada arista de E_R, un circuito que la contenga.
2) Comenzando con el circuito de mayor coste, ver si es posible añadir una arista de un circuito de coste menor a otro de coste mayor.
3) Teniendo en cuenta las restricciones de capacidad, calcular la disminución total de coste que se produce al unir dos circuitos en uno sólo. Unir los dos circuitos que -- producen la mayor disminución de coste.
4) Repetir la etapa 3) hasta que se obtenga - una solución posible.

La etapa 3) puede programarse de muchas for-- mas que están siendo estudiadas por sus autores.

5. CONCLUSIONES.

Existe una gran cantidad de problemas en la - literatura relacionados con el problema de encontrar circuitos que cubran las aristas (arcos) de un grafo, todos ellos aplicables a -- problemas de gran importancia práctica.

Casi todos estos problemas son NP-completos. Así, sólo para el CPP y el DCPP, existen algoritmos polinomiales. El MCPP, sin embargo, es NP-completo y los algoritmos exactos existentes (Christofides et. al./10/) son capaces de resolver problemas de hasta 50 vértices, 66 arcos y 39 aristas. El Problema del Cartero Rural, en los dos casos RPP y DRPP, es también NP-completo y los algoritmos existentes (Christofides et al./8/ y /9/) pueden resolver problemas de hasta 84 vértices, 180 aristas (arcos), 74 aristas (arcos) requeridas y 8 componentes. El problema del Cartero Rural definido sobre un grafo mixto no ha sido objeto de estudio hasta la fecha.

En el problema de los m-Carteros, el trabajo realizado ha sido menor y no se conoce, hasta la fecha, un algoritmo, mínimamente desarrollado, que lo resuelva óptimamente en cualquiera de sus variantes, por lo que podemos decir que sólamente son utilizables en la práctica algoritmos heurísticos.

Como conclusión general, se constata que la mayor parte de la investigación en estos problemas está aún por hacer, sobre todo en lo que se refiere a métodos exactos de resolución; aunque es también fundamental el estudio y análisis de algoritmos heurísticos, dada la gran complejidad de estos problemas.

6. BIBLIOGRAFIA.

/1/ E.BELTRAMI Y L.BODIN, "Networks and Vehicle Routing for Municipal Waste Collection", Networks 4 (1974) 65-94.

/2/ E.BENAVENT, V.CAMPOS, A.CORBERAN y E.MOTA "Análisis de Heurísticos para el Problema del Cartero Rural", pendiente de aceptación en Trabajos de Estadística e Investigación Operativa.

/3/ L. BODIN Y B. GOLDEN, "Classification in Vehicle Routing and Scheduling", Networks 11 (1981) 97-108.

/4/ R.G.BUSACKER Y T.L.SAATY, Finite Graph and Networks, McGraw Hill, New York (1965)

/5/ N.CHRISTOFIDES, "The Optimum Traversal of a Graph", Omega 1 (1973) 719-732.

/6/ N. CHRISTOFIDES, Graph Theory: An algorithmic Approach, Academic Press, New York (1975).

/7/ N. CHRISTOFIDES, "Worst-Case Analysis of a New Heuristic for the Travelling Salesman Problem", Technical Report, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburg, PA (1976).

/8/ N. CHRISTOFIDES, V.CAMPOS, A.CORBERAN Y E.MOTA, "An algorithm for the Rural Postman Problem", Imperial College Report, IC-OR-81-5 (1981).

/9/ N. CHRISTOFIDES, V. CAMPOS, A.CORBERAN Y E. MOTA, "The Directed Rural Postman Problem", Imperial College Report, IC-OR-82-4 (1982).

/10/ N. CHRISTOFIDES, E. BENAVENT, V.CAMPOS, A.CORBERAN Y E.MOTA, "The Mixed Postman Problem", Imperial College Report, IC-OR-83-6 (1983).

/11/ J. EDMONDS, "Maximum Matching and a Polyhedron with 0-1 vertices", J. Res.Nat.Bur Stand, 69B (1965) 125.

/12/ J. EDMONDS, "The Chinese Postman's Problem" ORSA Bull. 13 (1965) 73.

/13/ J. EDMONDS Y E. JOHNSON, "Matching, Euler Tours and the Chinese Postman Problem", Mathematical Programming 5 (1973) 88-124.

/14/ L. EULER, "Solutio Problematis ad Geometriam Situa Pertinentis", Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae 8 (1736).

/15/ L. FORD Y D. FULKERSON, Flows in Networks Princeton University Press, Princeton (1962).

/16/ G.N. FREDERICKSON, M.S. HECHT Y C.E. KIM, "Approximation Algorithms for Some Routing Problems", SIAM J. Comput, 7 (1978) 178-193.

/17/ G.N. FREDERICKSON, "Approximation Algorithms for Some Postman Problems", J.Assoc. Comput.Mach. 26 (1979) 538-554.

/18/ M.R. GAREY Y D.S. JOHNSON, Computers and Intractability: a guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San rancisco (1979).

/19/ B. GOLDEN Y R.T. WONG, "Capacitated Arc

Routing Problems", Networks 11 (1981) -- 305-315.

/20/ CH.H. KAPPAUF Y G.J. KOEHLER, "The Mixed Postman Problem", Discrete Applied Mathematics 1 (1979) 89-103.

/21/ A. KAUFFMAN, Graphs, Dynamic Programming and Finite Games, Academic Press, New - York (1967).

/22/ M.K. KWAN, "Graphic Programming using -- even or odd points", Chinese Mathematics 1 (1962) 273.

/23/ J.K. LENSTRA Y A.H.G. RINNOOY-KAN, "On - General Routing Problems", Networks 6 -- (1976) 273-280.

/24/ J.K. LENSTRA Y A.H.G. RINNOOY-KAN, "Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems", Networks 11 (1981) 221-227.

/25/ J.W. MALE Y J.C.LIEBMAN, "Districting -- and Routing for Solid Waste Collection", Journal of the Environmental Engineering Division 104 (1978) EE1.

/26/ E. MINIEKA, Optimization Algorithms for Networks and Graphs, Marcel Dekker, New York (1978).

/27/ E. MINIEKA, "The Chinese Postman Problem for Mixed Networks", Management Science 25 (1979) 643-648.

/28/ C.S. ORLOFF, "A Fundamental Problem in Vehicle Routing", Networks 4 (1974) 35-64.

/29/ CH. PAPADIMITRIOU, "On the Complexity of Edge Traversing", J. Assoc. Comput.Mach. 23 (1976) 544-554.

/30/ H.I. STERN Y M. DROR, "Routing Electric Meter Readers", Comput. Oper. Res. 6 -- (1979) 209-223.