

LA INTERPOLACIÓ AMB FUNCIONS SPLINE: INTRODUCCIÓ AUTOMÀTICA DE LES CONDICIONS D'EXTREM

PERE BRUNET

Els algorismes d'interpolació per splines cúbics, àmpliament utilitzats en camps que van desde el disseny gràfic fins el tractament de dades experimentals, requereixen sempre el coneixement de dues condicions d'extrem a part dels valors a interpolar. En el present article es fa un estudi comparatiu de diversos algorismes de càlcul automàtic d'aquestes condicions d'extrem, discutint la seva adequació a problemes de disseny e interpolació.

1. INTRODUCCIÓ.

Els algorismes d'interpolació que utilitzen funcions spline són molt utilitzats en camps força diversos de la informàtica, /7/. Per una part, podriem parlar de la seva aplicació en el camp del disseny gràfic assistit per ordinador: si l'usuari vol construir una corba, suministrarà alguns punts de pas al sistema; mitjançant un procés automàtic d'interpolació es construirà la corba desitjada, calculada en coordenades paramètriques. En aquesta fase d'interpolació, la pràctica totalitat de sistemes gràfics actuals utilitzen splines cúbics, ja que d'aquesta manera es pot garantir que la corba final és suau. D'altra banda, cal citar totes les aplicacions propiament d'interpolació: els splines són molt útils quan cal trobar l'equació d'una funció suau que passa per un conjunt de punts donats, per tal de poder calcular posteriorment, valors a punts intermitjos. Aquest problema es presenta, per exemple, en el tractament de dades experimentals o d'una funció calculada punt a punt.

En qualsevol dels exemples anteriors, es parteix del coneixement de n punts $P_1 \dots P_n$ on P_k té coordenades (x_k, y_k) i es vol obtenir una funció suau que els interpoli. Ara bé, /2/, en el cas de la interpolació per spli-

nes, no n'hi ha prou amb coneixer els punts de pas; si volem obtenir un spline amb primera i segona derivades (pendent i curvatura) contínues, cal resoldre un sistema lineal de $n-2$ equacions que depenen dels punts $P_1 \dots P_n$ amb n incògnites. Per tant, l'usuari ha de suministrar dues dades més per tal de completar el sistema i poder calcular l'equació de l'spline. El més habitual és que aquestes informacions extres imposin condicions als dos extrems de la corba, i per aquest motiu s'anomenen condicions d'extrem. En resum, per tal de poder calcular l'equació de l'spline que interpola n punts $P_1 \dots P_n$ cal coneixer,

- la posició dels n punts a interpolar, $P_1 \dots P_n$
- el comportament de la corba al principi, prop de P_1
- el comportament de la corba al final, prop de P_n

En el que segueix, i tal com fan molts sistemes, /1/, /3/, /5/, /6/, es suposa que la informació que coneixem als dos extrems de la corba és la derivada segona. (No obstant, seria perfectament factible pensar que dis-

- Pere Brunet - Càtedra de Met. Informàtics de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyers Industrials de Barcelona
Av. Diagonal, 647 - Barcelona 28
- Article rebut el Març del 1983.

posem, en lloc de les derivades segones, de les derivades primeres: en aquest cas construiríem un spline que passaria pels punts $P_1 \dots P_n$ sortint de P_1 en la direcció especificada i arribant en la direcció desitjada a P_n .

Ara bé, com que no és lògic que l'usuari su ministri més informació que la dels punts a interpolar, normalment són els propis algorismes els qui fan una primera estimació de les condicions als extrems abans de passar al càlcul de l'spline.

L'objecte del present article és comparar els diferents criteris d'obtenció automàtica de condicions d'extrems, veient com afecten a les propietats posteriors de la funció interpolant, i deduint-ne quins criteris són els més recomanables. En aquest sentit, l'apartat 2 exposa els principis bàsics de la interpolació per splines cúbics, presentant una formulació dels algorismes que deixa explícita la dependència entre la forma final de l'spline i les condicions d'extrem. L'apartat 3 presenta sis criteris de càlcul automàtic de condicions d'extrem, alguns d'ells força usats a la literatura. Finalment, en els apartats 4 i 5 es comparen aquests criteris, concluint quins són els més indicats per la interpolació.

2. LA INTERPOLACIÓ AMB SPLINES CÚBICS.

En el que segueix, suposarem que les abscises dels punts a interpolar estan igualment distanciades, i que aquesta distància és la unitat ($x_{k+1} = x_k + 1, \forall k$). La primera de les restriccions simplifica força totes les equacions que obtindrem, i d'altra banda és una hipòtesi que s'introdueix a la gran majoria d'algorismes d'interpolació pel disseny gràfic, i a bastants dels problemes clàssics d'interpolació. La segona restricció - distància unitat entre els punts - implica no més un canvi d'escala.

Per tant, la informació suministrada per l'usuari és el conjunt de ordenades $y_1 \dots y_n$ a interpolar. Indicarem amb la lletra y el vector format per totes elles, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$. A partir d'aquest vector, el procés d'interpolació amb funcions spline es realitza habitualment en dues etapes, (veure /1/, /2/, --

/3/, /5/),

- En primer lloc, es calcula el vector s de les derivades segones de la corba interpolada final en cada un dels punts donats, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ on $s_k = y_k''$. Aquest procés d'estimació de derivades segones, com es veurà tot seguit, és tal que assegura que la corba interpolant final té la primera i segona derivades contínues.

- En segon lloc, es defineix l'equació de l'spline cúbic a cada un dels intervals $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, com la del polinomi cúbic P_k tal que interpola els punts y_k, y_{k+1} i té en ells les segones derivades ja estimades, s_k i s_{k+1} . Evidentment, aquestes 4 condicions defineixen unívocament una cúbica, que fàcilment es pot comprovar que té com equació,

$$P_k(r) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ s_k \\ s_{k+1} \end{pmatrix} \quad (1)$$

on $r = x - x_k, \quad 0 \leq r \leq 1$.

D'aquest procés de construcció es dedueix, en primer lloc, que l'spline cúbic no té una única equació: és un conjunt de polinomis cúbics, cada un dels quals interpola dos dels punts donats i és vàlid només en un dels intervals x_k, x_{k+1} . En segon lloc, el mateix algorisme d'estimació de les derivades segones, assegura la continuïtat d'aquestes: la cúbica definida a $[x_{k-1}, x_k]$ acaba amb derivada segona s_k , i la següent, definida a $[x_k, x_{k+1}]$, comença amb la mateixa s_k . Per tant, l'únic que cal és calcular el vector s de forma que es garanteixi, a més, la continuïtat de la pendent a tots els punts intermitjos, x_2, x_3, \dots, x_{n-1} . A partir de (1), derivant, es dedueix que la derivada al final de l'interval és,

$$P_k'(1) = y_{k+1} - y_k - \frac{1}{3} s_k - \frac{1}{6} s_{k-1} \quad (2)$$

i de la mateixa manera, considerant el següent interval tindrem,

$$P_{k+1}'(0) = y_k - y_{k-1} + \frac{1}{6} s_{k-1} + \frac{1}{3} s_k \quad (3)$$

imposant la continuïtat, $P_k'(1) = P_{k+1}'(0)$ i agrupant termes,

$$s_{k-1} + 4s_k + s_{k+1} = 6(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \quad (4)$$

que és la condició que cal imposar per tal d'asegurar continuïtat al punt x_k . L'equació (4) aplicada als punts $x_2 \dots x_{n-1}$, dona lloc a un sistema de $n-2$ equacions per calcular el vector s de derivades segones.

Amb les definicions que apareixen a l'apèndix, les equacions (4) es poden escriure en forma matricial,

$$(s_2 \dots s_{n-1})^T = A^{-1}(Dy - J\sigma) \quad (5)$$

on $\sigma = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_n \end{Bmatrix}$

O bé, introduint la matriu B - veure també l'apèndix -,

$$s = C \cdot y + W \cdot \sigma \quad (6)$$

amb $C = B \cdot D$
 $W = J_2 - B \cdot J$

Aquesta última equació relaciona el vector s de derivades segones amb el vector y de les dades, i per tant soluciona el primer pas del procés d'interpolació per splines cúbics, sempre que s'hagi assignat un valor a les condicions d'extrem s_1, s_n . Cal observar que les matrius C i W només depenen de la dimensió n del problema i per tant poden haver estat precalculades.

En el següent apartat veurem que en tots els criteris existents per la determinació automàtica de les condicions d'extrem, aquestes es calculen de forma lineal a partir del vector de les dades,

$$\sigma = H_k \cdot y \quad (7)$$

on la matriu H_k depèn del criteri utilitzat. En definitiva, a partir de (6) i (7) podem escriure,

$$s = (C + W H_k) y \quad (8)$$

Y la relació entre s e y és sempre lineal; - la matriu de transformació té una part constant i una altra que depèn del criteri elegit.

3. CRITERIS PER LA SELECCIÓ DE LES CONDICIONS D'EXTREM.

En aquest apartat es presenten 6 possibles criteris per determinar les dues condicions d'extrem, s_1 i s_n . En cada cas deduirem la matriu H_k que caracteritza el criteri, la qual cosa ens permetrà, més endavant, discutir-los comparativament.

3.1 Criteri 1 (Minimització de la norma del vector s).

Donat que es desitja construir la corba el més suau possible que interpoli els punts donats, es pot pensar en elegir les condicions d'extrem de manera que $s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2$ sigui mínima. Aquest criteri, utilitzat per exemple en l'algorisme de suavització de /15/, dona lloc a interpolants molt poc curvats (en el cas límit, si podem arribar a un vector s de norma nula, tindrem una recta). Tenint en compte l'equació (6), hem de minimitzar,

$$s^T s = (C y + W \sigma)^T (C y + W \sigma) \quad (9)$$

Derivant respecte σ per tal de calcular el mínim, i operant, obtindrem,

$$\sigma = -(W^T W)^{-1} W^T C y \quad (10)$$

Per tant,

$$H_1 = -(W^T W)^{-1} W^T C \quad (11)$$

i aquesta és la matriu que haurem de substituir a (8) si volem interpolat utilitzant aquest criteri. Com és lògic, H_1 només depèn de la dimensió n .

3.2 Criteri 2 (Minimització dels canvis de signe entre components consecutives de s).

Aquest criteri parteix de la derivació que un spline suau ha de interpolat els punts donats oscilant el mínim possible. Atés que en total cúbica la derivada segona és una funció lineal, la gràfica de $y''(x)$ en l'spline final és una poligonal que passa pels punts $(x_1, s_1) \dots (x_n, s_n)$; oscilacions en la corba final indiquem canvis de signe en la curvatura, i per tant, canvis de signe entre components consecutives de s . El contrari també és cert: si minimitzem aquests canvis de sig

ne, obtindrem un spline que oscila el mínim possible.

En definitiva, en el criteri 2 s'escullen -- els valors s_1, s_n tals que maximitzen,

$$S^T U S = S^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix} S =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} s_i \cdot s_{i+1} = (Cy+W\sigma)^T U (Cy+W\sigma) \quad (12)$$

Aquesta forma quadràtica té un únic màxim -- (ja que és fàcil comprovar que la matriu -- $W^T U W$ és definida negativa); augmentar $S^T U S$ implica disminuir els canvis de signe entre components consecutives de s , ja que aquests són els únics que donen lloc a termes negatius en el sumatori de (12).

Derivant (12) respecte σ de forma anàloga a com es feia en el Criteri 1, s'obté la matriu H_2 que caracteritza el criteri,

$$H_2 = - \frac{1}{2} (W^T U W)^{-1} W^T (U + U^T) C \quad (13)$$

3.3 Criteri 3 (Splines naturals)

Aquest criteri, força utilitzat, (veure /3/, per exemple), minimitza la corbatura quadràtica mitja al llarg de la corba. Concretament, cal escollir s_1, s_n de forma que la -- integral,

$$\int_{x_1}^{x_n} [y''(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^1 [s_k + r(s_{k+1} - s_k)]^2 dr =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{3} s_k^2 + \frac{2}{3} s_k s_{k+1} + \frac{1}{3} s_{k+1}^2 \right] \quad (14)$$

tingui el mínim valor possible. Definint la matriu tridiagonal

$$Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

és immediat veure que minimitzar (14) equi-- val a minimitzar $S^T Z s$. Utilitzant el mateix procés de derivació que en els criteris 1,2, s'obté,

$$H_3 = -(W^T Z W)^{-1} W^T Z C$$

Ara bé, substituint W i C per les seves definicions,

$$W^T Z C = (J_2 - B J)^T Z \cdot B \cdot D = [J_2^T Z B - J^T B^T Z B] \cdot D$$

Operant i tenint en compte que la matriu Z no és més que la A orlada amb una fila i una columna a cada costat, s'obté $J_2^T Z B = J^T B^T Z B$. Per tant,

$$H_3 = [0] \quad (18)$$

On $[0]$ vol indicar la matriu nula. Aquest és un resultat ja conegut, /12/: La interpolació amb splines naturals s'aconsegueix imposant curvatura nul·la als dos extrems, ---- $s_1 = s_n = 0$.

Encara que a primera vista podria semblar -- que aquest ha de ser el millor criteri, en garantir una òptima suavitat, l'experiència demostra que moltes vegades no condueix a la corba esperada. Aquest fet quedarà corroborat en la comparació que realitzarem a l'apartat següent.

3.4. Criteri 4 (Adaptació als punts inicials i finals).

Aquest criteri proposat per Forsythe, /1/, -- ha estat utilitzat amb èxit en diversos treballs (veure, per exemple, /15/ i /16/. Consisteix en fixar la derivada tercera als dos extrems, y_1''' , y_n''' . Aquestes derivades es calculen en funció de les ordenades dels 4 primers punts (o de les dels 4 últims): per -- exemple, y_1''' és la derivada tercera del polinomi de Lagrange que interpola els punts -- y_1, y_2, y_3, y_4 . Tenint en compte que ----- $y_1''' = s_2 - s_1$, $y_n''' = s_n - s_{n-1}$ el criteri de ----- Forsythe ve expressat per les relacions,

$$s_2 - s_1 = y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$$

$$s_n - s_{n-1} = y_n - 3y_{n-1} + 3y_{n-2} - y_{n-3} \quad (19)$$

En forma matricial, l'equació (19) -- veure -- l'Apèndix, apartats e), f) -- es pot escriure com,

$$\sigma = Z_4 \cdot y + J_3^T \cdot s \quad (20)$$

Utilitzant ara l'equació (6) per eliminar s , podem obtenir finalment l'expressió de la ma

da una de les gràfiques 1-a)...1-f), s'ha representat la funció sinus, els 10 punts introduïts a l'algorisme d'interpolació -señyalats pels trams verticals- i el resultat d'aquesta interpolació segons cada un dels criteris. S'observa que en tots els casos, la curva spline coincideix evidentment amb el sinus en els 10 punts de mostreig. Finalment, la figura 1-g) mostra el resultat de la interpolació polinòmica per Lagrange, -- que com era d'esperar, tot i que interpola els punts donats té una forma molt diferent de la esperada. A part de les lògiques diferències que es poden observar entre els diferents interpolants, és de remarcar que el criteri 5 és el que més es separa, amb molt, de la corba original. Això és degut a que l'estimació de derivades primeres a partir de les fórmules de diferències introdueix errors molt grans, com ja era d'esperar: la pendent al punt x_1 , per exemple, és la pendent, a x_1 , del polinomi d'interpolació que passa per tots els punts $x_1 \dots x_n$; i aquest és un polinomi especialment inadequat pel càlcul de derivades, /2/. Aquest fet, que queda molt clar comparant les figures 1-e) i 1-g) (la corba 1-e és un spline que obliquem a començar i acabar com el polinomi de Lagrange 1-g), indica que és molt desaconsellable construir splines a partir d'una estimació automàtica de les pendents.

4.1. Classificació dels criteris segons la distància mútua.

Segons s'ha vist a l'apartat 3, qualsevol criteri ve totalment determinat per la matriu H_k que relaciona, (7), les dues condicions d'extrem amb el vector de les dades. Però, per raons de simetria, les dues files de H_k estan intimament relacionades: es compleix $(H_k)_{1i} = (H_k)_{2,n+1-i}$, $\forall i$. Per tant, una mesura lògica de la distància entre dos criteris és la norma del vector diferència entre les dues primeres files de les corresponents H_k ,

$$\text{dist}^2(i, j) = \sum_{\ell=1}^n \left[(H_i)_{1\ell} - (H_j)_{1\ell} \right]^2 \quad (28)$$

La taula 1 presenta el valor de totes les distàncies entre criteris, calculades segons l'equació (28). S'en poden deduir les següents conclusions,

- El criteri 5 queda molt separat de tots els demés, la qual cosa confirma els resultats obtinguts en la interpolació de la funció sinus.
- Els criteris 1 i 3 són força semblants.
- Els criteris 2 i 6 són també força semblants.
- El criteri 4 és intermitg entre els grups 1-3 i 2-6: la distància de qualsevol dels criteris al 4 és del mateix ordre de magnitud.

4.2. Estudi estadístic del comportament en la interpolació.

Per tal de poder comparar el comportament dels diferents criteris estudiats quan s'apliquen a problemes reals d'interpolació, s'ha realitzat una simulació d'interpolació polinòmica amb les següents característiques,

- s'han generat polinomis de grau 5, amb pendent inicial $P'(0)$ de valor absolut menor que 1, i segona derivada tal que $|P''(x)| \leq 0.4$, per $|x| \leq 1$. (En una primera fase s'ha generat el polinomi $P''(x)$ usant la base de polinomis de Tchebyshev amb coeficients aleatoris, i després s'ha integrat dues vegades $P''(x)$).

- el polinomi obtingut $P(x)$ s'ha mostregat en n punts entre 0 i 1, obtinguent els valors,

$$y_k = P(x_k), \quad x_k = \frac{k-1}{m-1} \quad (29)$$

- s'ha interpolat el conjunt de valors $y_1 \dots y_n$ amb cada un dels criteris exposats, i s'ha calculat després l'error quadràtic en l'estimació de derivades del polinomi,

$$\epsilon_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[P'(x_i) - S'_k(x_i) \right]^2 \quad (30)$$

(En aquesta fórmula l'error obtingut amb el criteri k -èsima s'obté a partir de les derivades $P'(x_i)$ del polinomi aleatori generat, i de les $S'_k(x_i)$ de l'spline S_k que interpola els punts $y_1 \dots y_n$).

La raó per escollir (30) com el criteri --

per mesurar la bondat de l'interpolant és doble: per una part, la interpolació per splines es fa servir moltes vegades per l'estimació de derivades, ja que és un mètode molt més exacte que la interpolació polinòmica; i justament (30) ens dirà la precisió de cada un dels criteris en aquest càlcul. D'altra banda, una bona estimació de les pendents -- reals de la funció interpolada és garantia de no oscilacions, i per tant d'un spline el més suau possible.

A la taula 2 es presenten els errors dels diferents criteris en la simulació del procés d'interpolació de,

- 100.000 polinomis, amb $n=5$
- 100.000 polinomis, amb $n=10$
- 20.000 polinomis, amb $n=15$.

El comportament dels sis criteris en aquests tres casos és força similar, excepte el criteri 5 (basat, com havíem vist, en una interpolació polinòmica previa per l'estimació de pendents) que va essent més dolent a mesura que creix el nombre de punts n . Com se sap, aquesta és una característica típica de la interpolació polinòmica. Pel que fa a la resta de criteris es pot observar que en tots els casos, els millors són el 6 i el 4.

4.3. Aplicació al disseny gràfic.

Finalment, la figura 2 presenta l'aplicació de tots els criteris presentats al disseny de corbes. Es tracta d'un cas concret on es vol dissenyar una corba a partir del coneixement de 11 punts de pas en el pla x - y . Els diferents splines obtinguts permeten també en aquest cas una comparació, encara que ara només és qualitativa

- l'spline obtingut amb el criteri 5 és inacceptable. (La asimetria de la figura 2-e és deguda a errors d'arrodoniment).
- les demés corbes es diferencien tan sols en la zona propera als extrems. Això vol dir que l'efecte de les condicions d'extrem s'amortigua ràpidament en avançar -- cap l'interior de la corba.
- les corbes obtingudes amb els criteris 1 i 3 són molt similars, i el mateix passa amb les que s'obtenen amb els criteris 2 i 6;

altre cop i tal com veiem a la taula 1, el criteri 4 dóna un resultat intermitg entre aquests dos.

5. DISCUSSIÓ I CONCLUSIONS.

En aquest article s'han presentat sis criteris per la interpolació de funcions amb splines cúbics, algun d'ells força utilitzats ja en diferents aplicacions. L'obtenció, en cada un d'ells, de la matriu que relaciona les condicions d'extrem amb el vector de les dades, ha permès de comparar-los, tant des d'un punt de vista analític com pel que fa als resultats de la interpolació en diversos problemes.

Fent referència a les notacions introduïdes en l'apartat 3, es pot concloure,

Que, com ja era previsible, el criteri 5 no es pot aplicar. Els errors, deguts a que el càlcul de les condicions d'extrem es basa en un procés d'interpolació polinòmica, són massa elevats.

Que els criteris 2 i 6, encara que són molt propers (com indica la taula 1), es comporten de forma diferent quant a aproximació en el càlcul de derivades. En aquest cas, el 6 és clarament millor, i concluirà a interpolants menys oscilatoris.

Que en canvi, els criteris 1 i 3 es comporten de manera molt similar en tots els tests que s'han efectuat.

Que, també en tots els tests, el criteri 4 és pitjor que el 6, però millor que els 1 i 3.

Que, en definitiva, d'entre els criteris proposats, sembla que el més adequat és el 6. De totes maneres, i a la vista de la taula 2, es pot substituir per el 4, que desde un punt de vista algorítmic és més senzill i ja ha estat força aplicat.

6. BIBLIOGRAFIA.

- /1/ G. E. FORSYTHE, M. A. MALCOLM, C. B. MOLLER, "Computer Methods for Mathematical Computations". Prentice-Hall, 1977.

TAULA 1

Grau de semblança entre els diferents criteris (Distància entre les matrius que defineixen les condicions als extrems).

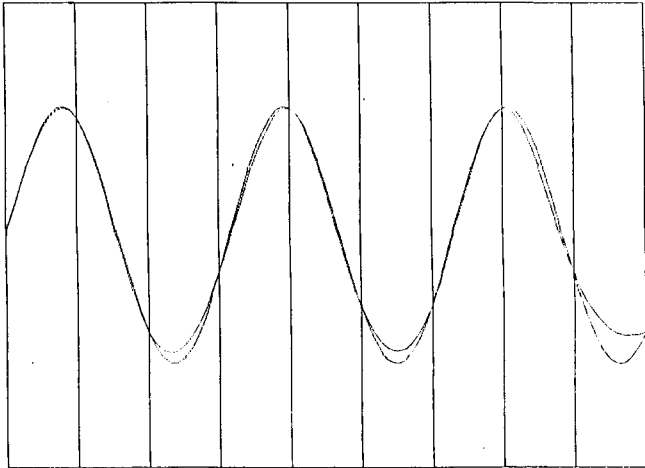
	Criteri 2	Criteri 3	Criteri 4	Criteri 5	Criteri 6
Criteri 1	107	3	32	32907	117
Criteri 2	x	143	24	31013	4
Criteri 3	x	x	52	33218	154
Criteri 4	x	x	x	32148	34
Criteri 5	x	x	x	x	30501

TAULA 2

Error quadràtic mitg obtingut en l'estimació de les derivades de polinomis generats a l'atzar.

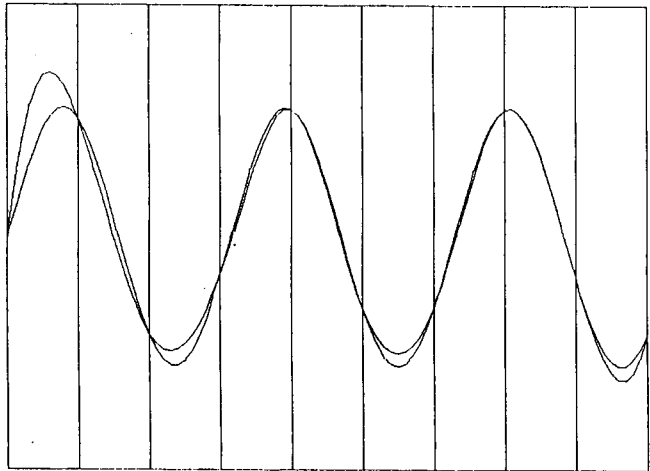
	Mostra de 100.000 polinomis. Interpolació coneixent 5 punts	Mostra de 100.000 polinomis. Interpolació donats 10 punts	Mostra de 20.000 polinomis. Interpolació coneixent 15 punts
Criteri 1	9.96×10^{-6}	1.06×10^{-5}	1.71×10^{-4}
Criteri 2	1.10×10^{-5}	1.31×10^{-5}	1.57×10^{-4}
Criteri 3	1.33×10^{-5}	1.79×10^{-5}	2.89×10^{-4}
Criteri 4	5.66×10^{-8}	9.45×10^{-8}	2.15×10^{-7}
Criteri 5	1.88×10^{-6}	4.74×10^{-5}	8.69×10^{-4}
Criteri 6	7.49×10^{-9}	3.38×10^{-8}	7.54×10^{-8}

N=10 LAMBDA= 2.00 CRITERI: 1 SIG: 431 -1.092 205 - .450 170 059 019 006 .002 - 000



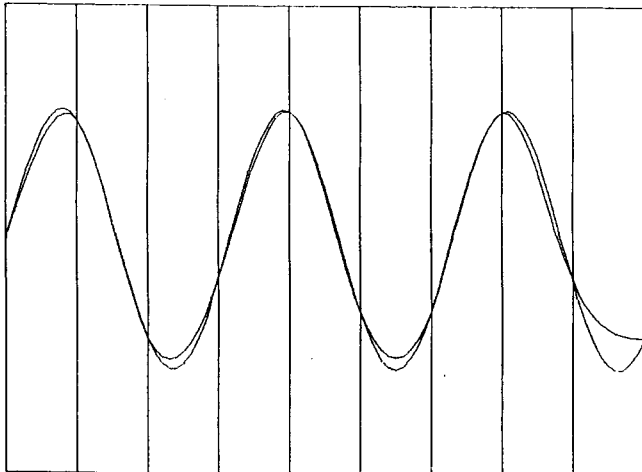
1-a) Criteri 1

N=10 LAMBDA= 2.00 CRITERI: 2 SIG: 3.215 -8.154 7.254 -3.256 1.270 - .439 .143 - .042 009 - .001



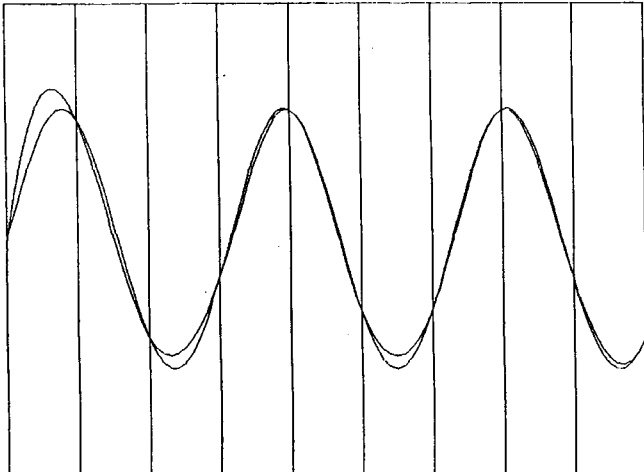
1-b) Criteri 2

N=10 LAMBDA= 2.00 CRITERI: 3 SIG: 000 .000 .000 .000 .000 .000 .000 .000 .000 .000



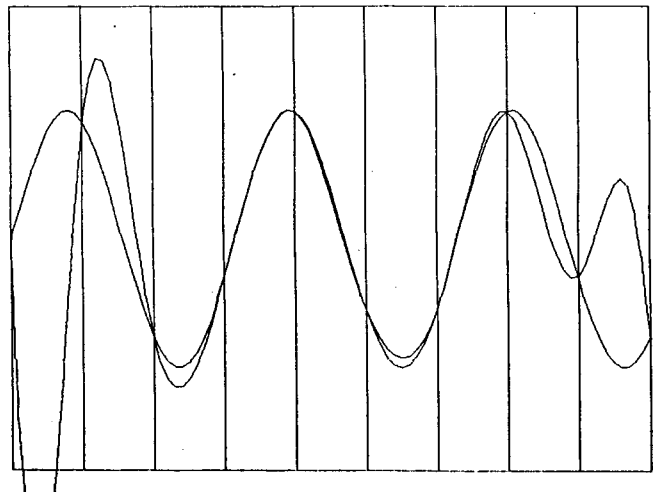
1-c) Criteri 3

N=10 LAMBDA= 2.00 CRITERI: 4 B10: 2.057 -3.242 4.404 -1.325 .146 -.039 .010 -.003 .001 -.000



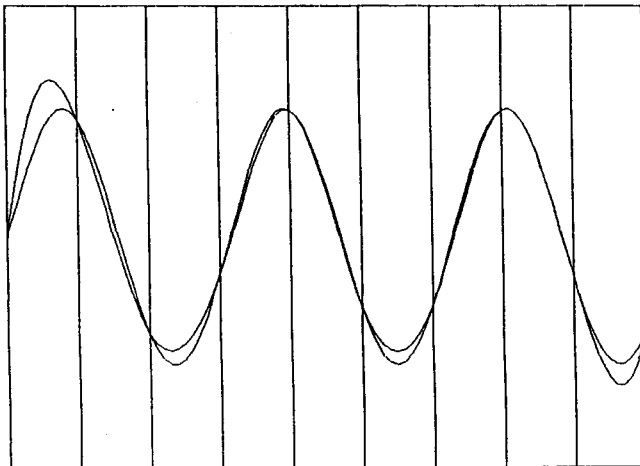
1-d) Criteri 4

N=10 LAMBDA= 2.00 CRITERI: 5 B10: 5.408-25.408 60.842-96.595109.012-87.267 48.490-17.813 3.897 -.385

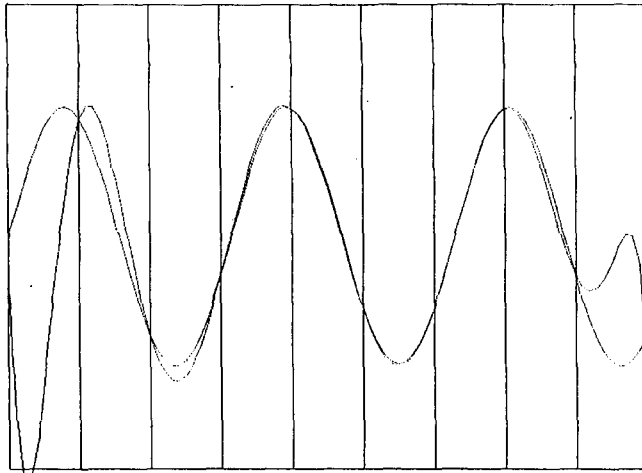


1-e) Criteri 5

N=10 LAMBDA= 2.00 CRITERI: 6 B10: 2.926 -7.299 8.184 -4.749 1.970 -.712 .237 -.071 .017 -.000

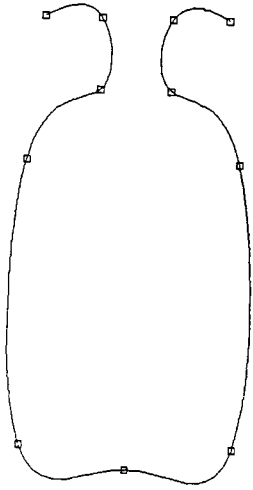


1-f) Criteri 6

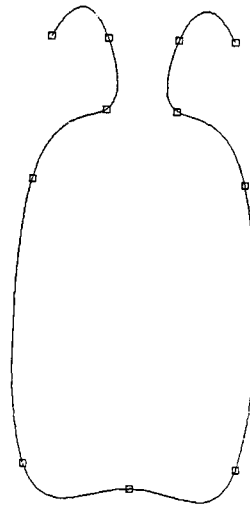


1-g) Interpolació
de Lagrange

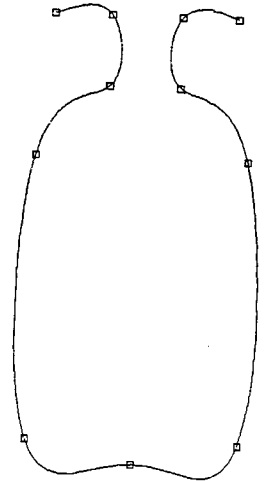
Figura 1.- Interpolació de la funció $y=\sin(x)$, a partir del coneixement dels 10 punts senyalats per les línies verticals. S'ha representat també la funció sinus original. A 1-a)...f-f), interpolació segons els 6 criteris introduïts al text. A 1-g), resultat de la interpolació de Lagrange.



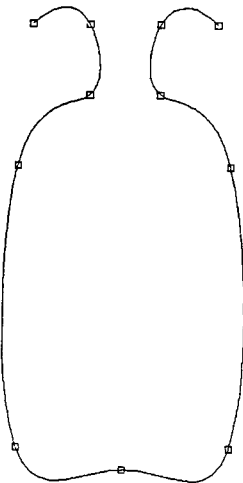
2-a) Criteri 1



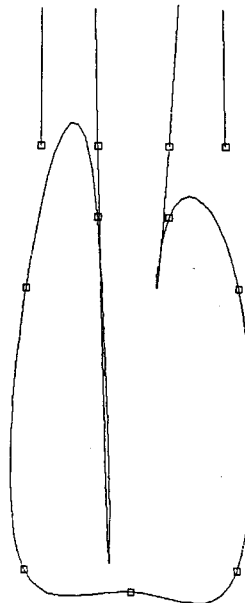
2-b) Criteri 2



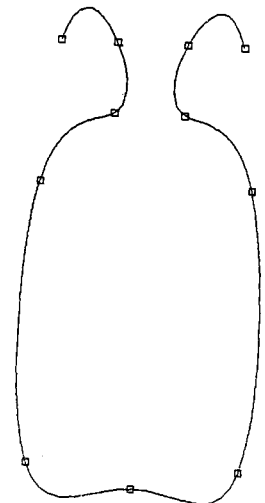
2-c) Criteri 3



2-d) Criteri 4



2-e) Criteri 5



2-f) Criteri 6

Figura 2.- Disseny d'un perfil curvat a partir de 11 punts suministrats per l'usuari i senyalats amb petits quadrats. Resultat final utilitzant cada un dels sis criteris exposats. Observis que, excepte en el criteri 5, les altres corbes es diferencien tan sols en la zona propera als extrems.

