LA TEORÍA DE SERIES TEMPORALES, UNA EVALUACIÓN CRÍTICA DE LOS DESARROLLOS MÁS RECIENTES

A. PRAT, D. PEÑA, M. MARTÍ RECOBER

En este trabajo se compara en forma crítica los tres enfoques básicos para el análisis de series temporales: El análisis espectral, el modelado en el espacio de los estados y los modelos paramétricos ARIMA. La presentación de los dos primeros es breve y a efectos comparativos con el último enfoque cuyos desarrollos principales en los últimos diez años constituyen el núcleo de la presente comunicación. La conclusión principal es que estos enfoques han surgido con objetivos distintos, que los hace especialmente aptos para ser aplicados en campos específicos. La formulación ARIMA presenta la ventaja diferencial de incluir procedimientos de modelado para el caso más general en que la estructura del sistema es desconocida, lo que la hace muy apropiada para una amplia gama de problemas de modelado, previsión y control estocástico.

1. INTRODUCCION

En los últimos diez años, el campo de análisis de series temporales ha sido una de las áreas de la Estadística que ha experimentado avances más importantes. Aún en los años 60 existía en esta área una separación clara entre la teoría de los procesos estacionarios de parámetro discreto, estudiados como una sección marginal en la mayoría de los libros de procesos estocásticos y los procedimientos prácticos desarrollados "ad hoc" por economistas (métodos de descomposición de series) e investigadores operativos (métodos de alisado exponencial). Las investigaciones realizadas durante la segunda mitad de los sesenta por Box, Jenkins y otros, que culminan con la publicación de Box y Jenkins (1970), suponen una revolución en este área, principalmente por dos razones. En primer lugar se formula una metodología estadística operativa para la construcción de modelos para la previsión de series temporales generales, basada en la teoría matemática de los procesos estocásticos. En segundo lugar, se desarrollan procedimientos operativos para el problema del control estocástico que constituyen una alternativa al enfoque desarrollado en Ingeniería aeroespacial unos años antes.

En la última década, el interés en la teoría y la práctica del análisis de series temporales ha crecido espectacularmente. Este crecimiento es obvio si se analiza la proporción de artículos dedicados al tema en las revistas de Estadística más prestigiosas, el número de libros de texto publicados sobre el tema o el incremento de cursos monográficos en algunas Universidades de nuestro país y las de los paises más avanzados.

El objetivo de este trabajo es revisar criticamente los avances experimentados en estos últimos diez años, con especial énfasis en los modelos paramétricos basados en ecuaciones en diferencias estocásticas, que constituyen la base de la metodología iniciada iniciada por Box y Jenkins (1970). Una evaluación de estos procedimientos requiere su comparación con los métodos alternativos disponibles por lo que se han dedicado dos secciones a estudiar brevemente los otros enfoques globales existentes: El análisis espectral y los modelos en el espacio de los estados. El trabajo está estructurado como sigue: En la sección 2 presentamos el problema teórico general de previsión y modelización de series temporales resaltando sus características estadísticas diferenciales. La sección 3 presenta un breve resumen del enfoque espectral.

La sección 4 resume la formulación en el espacio de los estados y la metodología operativa disponible. La sección 5;la más extensa de este trabajo, estudia los modelos paramétricos

A. Prat, Càtedra d'Estadística, ETSIIB-UPB, Diagonal, 647. Barcelona-28. D. Peña, Escuela de organización industrial ETSII- UPM. M.Martí, Càtedra de Estadística, ETSIIB y F. Informática, UPB.

Ponencia invitada presentada en la XIII Reunión de la Sociedad Española de Investigación Operativa, Estadística e Informática. Jaca. Septiembre 1980.

Article rebut el novembre de 1981.

con estructura básica ARIMA y comienza con una revisión histórica, sección 5.1, y una síntesis de los modelos utilizados, sección 5.2. La sección 5.3 repasa las aportaciones más importantes en el modelado univariante en los últimos diez años, y la sección 5.4 en la construcción de funciones de transferencia. La sección 5.5 estudia la formulación de modelos ARIMA vectoriales, un avance reciente en esta metodología.

Finalmente, la sección 6 resume las conclusiones más importantes de este trabajo.

2. MODELIZACION Y PREVISION DE SERIES TEMPORALES

El análisis de una serie temporal, o de un vector de series, $\underline{Z}_t$ puede tener tres objetivos distintos, aunque estrechamente relacionados entre sí. El primer objetivo es la descripción y comprensión de la estructura dinámica de evolución del vector de series $\underline{Z}_t$. Esto supone investigar las pautas históricas de dependencia de $\underline{Z}_t$ respecto a su pasado $\underline{Z}_{t-1}$, $\underline{Z}_{t-2}$ ... con el objetivo de construir un modelo matemático que describa en forma escueta o parca en el número de parámetros, las regularidades observadas. En muchos casos, especialmente en ingenieria y economía, se supone que el vector $\underline{Z}_t$ puede particionarse en $\underline{Z}'_t = \underline{X}'_t.\underline{Y}'_t$ donde el proceso vectorial $\underline{X}_t$ se considera exógeno y el proceso $\underline{Y}_t$ endógeno, es decir, influido en mayor o menor medida, por las variaciones de $\underline{X}_t$. La familia de modelos que se considera (1 admite la representación:

$$\underline{Y}_t = f_1(\underline{X}_t,\underline{X}_{t-1},\ldots)+f_2(\underline{Y}_{t-1},\underline{Y}_{t-2},\ldots)+\underline{a}_t \tag{2.1}$$

Donde f_1 y f_2 son funciones vectoriales y $\underline{a}_t$ es un vector de ruido, que suponemos recoge el efecto de las perturbaciones y variables no incluidas en el modelo. Si éste está correctamente especificado, $\underline{a}_t$ es la resultante de un conjunto de causas múltiples cada una de ellas de poca importancia respecto al total y, en la hipótesis de aditividad de los efectos, su distribución podrá admitirse que es, según el teorema central del límite, normal multivariante de media nula.

Una hipótesis simplificadora básica muy frecuente en la construcción de modelos (2.1) es la hipótesis de linealidad. Entonces

$$f_1(\underline{X}_t,\underline{X}_{t-1},\ldots) = \sum_{i=0} \underline{G}_i(t)\underline{X}_{t-i}$$

$$f_2(\underline{Y}_{t-1},\underline{X}_{t-2},\ldots) = \sum_{i=0} \underline{H}_i(t)\underline{Y}_{t-1-i}$$

donde las matrices de parámetros $\underline{G}_i(t)$ pueden ser o no constantes en el tiempo. El objetivo del análisis es determinar los parámetros en un modelo que aproxime escuetamente esta representación general.

La modelización del sistema permite:

a) Interpretar y comprender la estructura dinámica,

b) determinar el efecto de las variaciones de las variables exógenas sobre las endógenas.

La metodología para la construcción del modelo requiere:

a) Identificar la estructura de la relación

b) Estimar eficientemente los parámetros

c) Verificarlo de forma crítica, mediante diagnósticos sobre el modelo que pongan de de manifiesto sus posibles deficiencias y conduzcan a una reformulación más adecuada del mismo.

La previsión, segundo objetivo, supone la extrapolación de una serie temporal para estimar sus valores futuros. El problema teórico general de previsión se formulará así: dada una realización $\{\underline{Z}_t,\underline{Z}_{t-1},\ldots\}$ de un proceso estocástico vectorial, se trata de encontrar una función de previsión $\hat{\underline{Z}}_t(\ell)$ que estime, optimamente, el valor de $\underline{Z}_{t+\ell}$. Este problema fue resuelto por Wiener y Kolmogorov con las hipótesis siguientes:

a) La función de predicción es una función lineal de las observaciones pasadas, es decir

1) Suponemos que es posible reexpresar las variables en una métrica tal que los efectos sean aditivos. Por lo tanto, en adelante $\underline{Y}_t$, $\underline{X}_t$ serán las series originales o una transformación de ellas tal que sus efectos sean aditivos.

$$\underline{z}_t(\ell) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{\underline{P}}_i \, \underline{z}_{t-i} \qquad (2.2)$$

b) El criterio de optimalidad es minimizar el error cuadrático medio (ECM) definido por

$$E \left[\underline{z}_{t+} - \hat{\underline{z}}_t(\ell))' \, (\underline{z}_{t+\ell} - \hat{\underline{z}}_t(\ell)) \right]$$

Si partimos de la hipótesis de que $\underline{z}_t$ es un proceso estacionario real con momentos de segundo orden finitos, el espacio generado por las variables aleatorias del proceso $\underline{z}_t$ es un espacio de Hilbert (2. Entonces, $\underline{z}_{t+}$, puede descomponerse de manera única en dos componentes que pertenecen a subespacios ortogonales (véase, por ejemplo, /39/)

$$\underline{z}_{t+\ell} = \hat{\underline{z}}_t(\ell) + \underline{e}_t(\ell) \qquad (2.3)$$

Donde $\hat{\underline{z}}_t(\ell)$ pertenece al subespacio generado por $\underline{z}_t, \underline{z}_{t-1}, \ldots$ y $\underline{e}_t(\ell)$ es ortogonal a dicho subespacio. Una consecuencia inmediata de las propiedades del espacio de Hilbert es que la descomposición (2.3) conduce a un vector $\underline{e}_t(\ell)$ con norma mínima y por lo tanto que minimiza el ECM. Por lo tanto, la función de previsión $\hat{\underline{z}}_t(\ell)$ es simplemente la proyección ortogonal de $\underline{z}_{t+\ell}$ sobre el espacio generado por $\underline{z}_t, \underline{z}_{t-1}, \ldots$

El tercer objetivo del análisis es de diseño de sistemas de control, es decir, la determinación de los valores que debemos dar a las variables exógenas para que $\underline{Y}_t$ permanezca "próxima" a un objetivo dado. No entraremos en el diseño de procedimientos de control óptimo que han diso estudiados por ejemplo Box y Jenkins (1970), Chow (1976) o Medith (1969) desde el punto de vista estadístico, econométrico y de ingeniería respectivamente.

3. ANALISIS ESPECTRAL

3.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La utilización de funciones sinusoidales para describir y representar pautas periódicas de variación en una serie temporal, proviene de la segunda mitad del siglo XIX. Schuster (1898) introduce el periodograma y Slustsky (1934) desarrolla sus propiedades teóricas en la hipótesis de normalidad. El desarrollo entre 1920 y 1940 de la teoría de los procesos estocásticos estacionarios, demostró que todo proceso estacionario puede representarse por una sucesión de oscilaciones armónicas y estableció rigurosamente las relaciones teóricas entre la función de autovarianzas y su transformada de Fourier, el espectro del proceso. Entre 1940 y 1960 el problema de estimación del espectro es objeto de numerosos trabajos. Daniell (1946) mostró como estimar el proceso suavizando el periodograma, y el diseño de "ventanas" para obtener estimaciones consistentes y "óptimas" ha sido extensamente estudiado por Bartlett (1948), Kendall (1946), Hanming y Tukey (1949), Grenander y Rosenblatt (1953, 1957) y Parzen (1957), entre otros muchos. Los problemas de cálculo asociado a estas estimaciones han sido simplicados por el desarrollo de la transformada rápida de Fourier por Cooley y Tukey (1965).

La utilización de estos procedimientos para investigar las relaciones de dependencia entre series, proviene de Wiener (1949) y el término periodograma cruzado fue introducido por Whittle (1953). Un resumen de las generalizaciones de las técnicas estadísticas multivariantes al dominio de la frecuencia y su estudio mediante procedimientos espectrales se encuentra en Brillinger (1975).

3.2 METODOLOGÍA

El análisis espectral es esencialmente un enfoque no paramétrico y por lo tanto está sujeto a las limitaciones y ventajas de estos procedimientos. El problema que se plantea al estimar el espectro de una serie temporal mediante el periodograma es, en muchos aspectos, análogo al de estimar una función de densidad a partir de un diagrama de barras. Es necesario encontrar procedimientos operativos para "suavizar" las estimaciones puntuales y distribuir la densidad observada en los distintos intervalos.

Si aumentamos el alisado, lo que implica aumentar la anchura de banda con la que suavizamos el periodograma, será menor la varian-

---

2) Suponemos que las variables están centradas, es decir, tienen media nula, y el producto escalar está definido por:

$$\langle \underline{z}_{t_1} \, \underline{z}_{t_2} \rangle = E\left[\underline{z}_{t_1} \, \underline{z}_{t_2}\right] = \mathrm{cov}\,(\underline{z}_{t_1}, \underline{z}_{t_2})$$

con

$$E\left[\underline{z}_{t_1}\right] = E\left[\underline{z}_{t_2}\right] = 0$$

cia de la estimación, pero aumentará el sesgo o distorsión de ésta. Por lo tanto, es necesario un compromiso entre ambas fuentes de error y se han diseñado numerosos procedimientos de alisado ("ventanas") para resolver el problema.

El desarrollo en los últimos años de los procedimientos de identificación y estimación de modelos paramétricos está produciendo gradualmente en la actualidad un cambio sustancial en el problema de estimación del espectro de una serie. Parzen (1969) ha propuesto aproximar la serie mediante un modelo paramétrico autorregresivo (en adelante AR):

$$z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \, z_{t-i} + a_t$$

Una vez estimado el modelo AR(p), el espectro a la frecuencia angular ω es inversamente proporcional a:

$$\left| 1 - \sum_{k=1}^{p} \phi_k \, e^{-ik\omega} \right|^2$$

lo que conduce a un cálculo matemático directo del mismo. La utilización de la aproximación autorregresiva es debida principalmente a que entonces el modelo es lineal y puede estimarse mediante mínimos cuadrados.

En la práctica, el orden del proceso AR se determina mediante un criterio automático como el FPE introducido por Akaike (1969). La crítica a este enfoque es que al utilizar únicamente procesos AR y no de media móvil --que según la evidencia empírica son las más frecuentes en la práctica (véase /43/)- el orden del AR necesario es generalmente alto, con la consiguiente pérdida de eficiencia en la estimación. Un procedimiento mejor es construir un modelo ARIMA para la serie; cuya representación general (véase sección 5.2) es:

$$z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \, z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \theta_i \, a_{t-i} + a_t \qquad (3.1)$$

Y determinar a continuación el espectro algebraicamente, utilizando que, para la frecuencia angular ω, es proporcional a:

$$\left| \frac{1 + \sum_{h=1}^{q} \theta_h \, e^{-i\omega h}}{1 - \sum_{k=1}^{q} \phi_k \, e^{-i\omega k}} \right|^2$$

Akaike (1974) ha preconizado utilizar el criterio AIC basado en la medida de información de Kullback-Leibler, para seleccionar automáticamente el proceso ARIMA (3.1). Una crítica de este procedimiento se encuentra en /84/.

La relación dinámica entre dos series se estudia, en este enfoque, mediante el espectro cruzado, transformada de Fourier de la función de covariancias cruzadas. Al no ser la función de covariancias cruzadas simétrica, el espectro cruzado, $\Gamma_{12}(f)$, es una función compleja que puede escribirse:

$$\Gamma_{12}(f) = \alpha_{12}(f) \, e^{i\phi_{12}(f)}$$

donde la función $\alpha_{12}(f)$ es el espectro de amplitud y mide la asociación entre las amplitudes de las componentes de ambas series para cada frecuencia y $\phi_{12}(f)$, el espectro de fase, muestra como los componentes de frecuencia en una serie están adelantados o retrasados respecto a la otra. La estandarización del espectro de amplitud conduce a la función de coherencia

$$K_{12}^2(f) = \frac{\alpha_{12}(f)}{\Gamma_{11}(f)\Gamma_{22}(f)}$$

donde $\Gamma_{11}(f)$ y $\Gamma_{22}(f)$ son los espectros univariantes de las series. La interpretación de la función de coherencia es análoga a la de un coeficiente de correlación entre frecuencias.

Estos conceptos se generalizan sin dificultad al caso multivariante y el lector interesado puede acudir a /26 y 60/.

Dado que la metodología de los modelos multivariantes paramétricos es muy reciente, la determinación de espectros cruzados utilizando la dualidad matemática entre las representaciones en el dominio temporal y el de la frecuencia, se encuentran todavía en sus orígenes y tendrá previsiblemente un desarrollo rápido en un futuro próximo.

4. FORMULACION DE MODELOS EN EL ESPACIO DE LOS ESTADOS

4.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

La insuficiencia del análisis espectral para resolver problemas de filtros lineales deterministas con parámetros variables en el tiempo condujo al final de los años cincuenta a la formulación de modelos en el dominio temporal que superasen estos inconvenientes. -- Las primeras formulaciones en este dominio - se deben a Shinbrot (1958) y Pugachev (1960) De todos modos, la formulación de modelos en el espacio de los estados en la forma que ha persistido hasta nuestros días, se debe a -- Kalman (1960 a, 1960 b, 1963), y Kalman y Bucy (1961). En estos trabajos se formaliza el concepto de estado, se obtienen las ecuaciones de estado para un modelo lineal dinámico un modelo lineal estocástico y para el modelo lineal dinámico estocástico. La formulación de Kalman ha sido extendida recientemente para poder incluir la estimación simultánea del estado y los parámetros del modelo.

4.2 MODELOS EN EL ESPACIO DE LOS ESTADOS

En su formulación cláscica, las ecuaciones - de estado de un modelo lineal dinámico es decir, relación causal determinista unidireccional, son:

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{\underline{A}}\underline{x}_t + \underline{\underline{G}}\underline{u}_t \qquad (4.1)$$

$$\underline{Y}_t = \underline{\underline{H}}\underline{x}_t$$

donde $\underline{x}_t$ es un vector de dimensión n o vector de estado, $\underline{u}_t$ es un vector de dimensión r o input del sistema y $\underline{Y}_t$ es un vector de - dimensión m o output del sistema.

$\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{G}}$ y $\underline{\underline{H}}$ son matrices de parámetros del sistema, que pueden ser constantes o funciones deterministas del tiempo y tienen que cumplir además las condiciones de observabilidad y controlabilidad definidas por Kalman /65 y 63/.

En el contesto del análisis de series temporales económicas es importante observar que sólo los inputs $\underline{u}_t$ y los outputs $\underline{Y}_t$ son conocidos para el analista. Las variables de estado $\underline{x}_t$ sirven sólo para representar la dinámica interna del sistema y en general carecen de interpretación física inmediata a diferencia de su aplicación a sistemas físicos Por otro lado es bien sabido que si se aplica a las variables de estado una transformación lineal de matriz $\underline{\underline{T}}$ no singular, la representación de estado que tuviese como matrices: $\underline{\underline{A}}^* \; \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$; $\underline{\underline{G}}^* \; \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{G}}$ y $\underline{\underline{H}}^* \; \underline{\underline{H}}\,\underline{\underline{T}}^{-1}$ sería equivalente a (4.1) en el sentido de tener la misma relación input-output, (respuesta impulsional). Es decir, así como dada una representación de estado del tipo (4.1) es - inmediato obtener la función de transferencia v(B) en $\underline{Y}_t = v(B)\underline{u}_t$ siendo $v(B) = v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots$ y $Bf(t) = f(t-1)$, lo recíproco no es sencillo. La dificultad estriba en que la solución no es única incluso si se conoce el - orden $\underline{n}$ mínimo. Así pues en la formulación - (4.1) hay dos problemas distintos. El primero es la elección del vector de estado que - se escogerá de manera que su dimensión, n, - sea mínima. Este problema es conocido como - el de la determinación de la realización mínima. El segundo, una vez resuelto el anterior, es encontrar una transformación lineal $\underline{\underline{T}}$ que conduzca a un modelo con el mínimo número de parámetros. Este problema se conoce con el nombre de determinación de la forma - canónica. El modelo (4.1) incluye $N=n^2+nr+nm$ parámetros posibles que en general no podrán ser estimados sólo a partir del conocimiento del input y del output debido, a la invariancia de la función de transferencia a transformaciones lineales del estado. Ello implica la necesidad e importancia de formulaciones escuetas que hagan que los modelos sean identificables y estimables en la práctica.

El problema de encontrar una representación de estado de dimensión mínima para una cierta respuesta impulsional ha sido resuelto -- por Ho y Kalman /56/.

La reducción en el número de parámetros se - consigue mediante transformaciones canónicas de las matrices de la ecuación de estado y - ha sido objeto de numerosísimas publicaciones (ver /11/). Las primeras contribuciones a este problema son debidas a Kalman /65/ - para el caso general y Koepcke /67/ y Wong et al. /114/ para el caso de un solo output mientras que Luenberger /73/ y Bucy /29/ estudian el problema para sistemas lineales dinámicos multivariantes.

En particular, si la matriz $\underline{\underline{A}}$ en (4.1) tiene n valores propios distintos entonces (4.1) - se puede escribir en forma equivalente:

$$\underline{X}^*_{t+1} = A\underline{X}^*_t + \underline{\underline{G}}^* \underline{u}_t \qquad (4.2)$$
$$\underline{Y}_t = \underline{\underline{H}}^* \underline{X}^*_t$$

donde A es diagonal. Nótese que la representación (4.2) tiene n+nr+nm parámetros de los cuales n se pueden eliminar escalando convenientemente las matrices G* o H* quedando pues sólo n(r+m) parámetros en el modelo.

Mac Gregor /75/ indica que una buena representación canónica para el caso de un solo output es:

$$\underline{x}_{t+1} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 1 & 0 & 0\ldots 0 \\ \phi_2 & 0 & 1 & 0\ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \phi_{n-1} & 0 & 0 & 0 \quad 1 \\ \phi_n & 0 & 0 & 0 \quad 0 \end{bmatrix} \underline{x}_t + \begin{bmatrix} g_{11}\cdots g_{ir} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ g_{n1}\cdots g_{nr} \end{bmatrix} \underline{u}_t$$

$$\underline{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0\ldots 0 \end{bmatrix} \underline{x}_t \qquad (4.3)$$

y señala que (4.3) puede escribirse fácilmente en la forma

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2 \ldots \phi_n B^n) Y_t = (g_{11}+g_{21}B+\ldots+g_{n1}B^{n-1})$$
$$u_{1t-1}+\ldots+(g_{it}+g_{2r}B+\ldots+g_{nr}B^{n-1}) u_{rt-1}.$$

o bien

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\phi(B)} B^b u_{1t} + \frac{\omega'(B)}{\phi(B)} B^{b'} u_{2t} + \ldots$$

que es la forma de función de transferencia utilizada por Box-Jenkins /18/ lo que demuestra el carácter escueto de los modelos formulados por estos autores.

Para el caso de sistemas lineales estocásticos, es decir, cuando el vector de input es ruido blanco (3) y hay error de observación, es evidente que el comportamiento futuro del sistema no puede determinarse unívocamente a partir del estado actual $\underline{X}_t$. Lo que se requiere en este tipo de probabilidad del vector de estado en los instantes t+1, t+2,... quede unívocamente determinada por $\underline{X}_t$ es decir que $\underline{X}_t$ siga un proceso de Markov multivariante AR(1).

(3) Llamaremos en adelante proceso de ruido blanco a una secuencia de variables aleatorias normales independientes de media cero y homocedásticas.

En este caso las ecuaciones de estado formuladas por Kalman (1960) son:

$$\underline{X}_{t+1} = \underline{\underline{A}}\underline{X}_t + \underline{W}_t$$
$$\underline{Y}_t = \underline{\underline{H}}\underline{X}_t + \underline{V}_t \qquad (4.4)$$

donde $\underline{W}_t$ y $\underline{V}_t$ son procesos de ruido blanco tales que

$$E[\underline{W}_t \underline{W}'_t] = \underline{R}_1 \; ; \; E[\underline{V}_t \underline{V}'_t] = \underline{\underline{R}}_2 \quad \text{y}$$
$$E[\underline{W}_t \underline{V}'_{t+k}] = \underline{\underline{0}}$$

para el caso del modelo lineal dinámico con perturbaciones estocásticas que es la superposición clásica de Kalman es:

$$\underline{X}_{t+1} = \underline{\underline{A}}\underline{X}_t + \underline{\underline{G}}\underline{U}_t + \underline{W}_t$$
$$\underline{Y}_t = \underline{\underline{H}}\underline{X}_t + \underline{V}_t \qquad (4.5)$$

Una representación canónica de (4.5) se consigue vía el filtro de Kalman. En efecto tal como demuestra Mac Gregor (1972), el sistema (4.5) se puede escribir:

$$\hat{\underline{x}}_{t+1|t} = \underline{\underline{A}}\hat{\underline{x}}_{t|t-1} + \underline{\underline{G}}\underline{u}_t + \underline{\underline{A}}\underline{\underline{K}}_{t|t-1}\underline{a}_t$$
$$\underline{Y}_t = \underline{\underline{H}}\hat{\underline{x}}_{t|t-1} + \underline{a}_t \qquad (4.6)$$

donde $\underline{a}_t$ son las innovaciones del proceso, es decir:

$$\underline{a}_t = \underline{Y}_t - \underline{\underline{H}}\, \hat{\underline{x}}_{t|t-1}$$

$\hat{\underline{x}}_{t|t-1}$ es la predicción óptima lineal cuadrática del vector de estado con la información hasta el instante t-1, o sea:

$$\hat{\underline{x}}_{t|t-1} = E[\underline{x}_t | \underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \ldots, \underline{Y}_{t-1}]$$

$\underline{\underline{K}}_{t|t-1}$ es la ganancia del filtro definida por:

$$\underline{\underline{K}}_{t|t-1} = \underline{\underline{P}}_{t|t-1}\, \underline{\underline{H}}' (\underline{\underline{H}}\underline{\underline{P}}_{t|t-1}\, \underline{\underline{H}}' + \underline{\underline{R}}_2)^{-1}$$

siendo $\underline{\underline{P}}_{t|t-1}$ la matriz de variancias y covariancias del estado:

$$\underline{\underline{P}}_{t|t-1} = E[(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})^1]$$

Es fácil demostrar que el modelo general de función de transferencia de Box y Jenkins (1970):

$$\underline{y}_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} \underline{u}_{t-b-1} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)\nabla^d} \underline{a}_t$$

que que a su vez se puede escribir:

$$\gamma(B)\underline{y}_t = \mu(B)\nabla^d \underline{u}_{t-b-1} + \alpha(B) \underline{a}_t \qquad \text{con}$$

$$\gamma(B) = \delta(B) \phi(B)\nabla^d = (1-\gamma_1 B \ldots \gamma_n B^n)$$

$$\mu(B) = \omega(B) \phi(B) = (\mu_0 + \mu_1 B \ldots + \mu_{n-1} B^{n-1})$$

$$\alpha(B) = \theta(B) \delta(B) = (1-\alpha_1 B \ldots \alpha_n B^n)$$

se puede escribir en la representación canónica (4.6) en la forma:

$$\begin{bmatrix} x_{1_{t+1}} \\ x_{2_{t+1}} \\ \\ \\ \\ x_{n_{t+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \gamma_2 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ \gamma_{n-1} & 0 & 0 \ldots 1 \\ \gamma_n & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_t} \\ x_{2_t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1_t} \\ x_{n_t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_0 \\ -\mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\mu_{n-1} \end{bmatrix} \nabla^d u_{t-b} + \begin{bmatrix} \gamma_1 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_n - \alpha_n \end{bmatrix} \underline{a}_t$$

$$\text{y} \quad \underline{y}_t = |1 \quad 0 \ldots 0| \, \underline{x}_t + \underline{a}_t$$

Una representación canónica markoviana de -- (4.6) basada en el concepto de espacio pre-- dictor ha sido obtenida por Akaike /8/ -- y utilizada por Mehra y Cameron /77/ para el modelado de series temporales parametrizadas en la forma:

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{\underline{A}}\underline{x}_{t+1} + \underline{\underline{B}}\underline{w}_{t+1}$$

$$\underline{y}_t = \underline{\underline{H}}\underline{x}_t + \underline{v}_t \tag{4.7}$$

siendo

$$\underline{w}_{t+1} = \underline{u}_{t+1} - \hat{\underline{u}}_{t+1|t}$$

es decir la innovación del input.

Finalmente, digamos que Salut /98/ , propone una forma canónica separada paramétrica-- mente del tipo:

$$\underline{x}_{t+1} = \underline{\underline{E}}_* \underline{x}_t - \underline{\underline{A}}_* \underline{y}_t + \underline{\underline{D}}_* \underline{w}_t + \underline{\underline{B}}_* \underline{u}_t$$

$$\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{E}}_0 \underline{x}_t - \underline{\underline{A}}_0 \underline{y}_t + \underline{\underline{B}}_0 \underline{u}_t + \underline{\underline{D}}_0 \underline{w}_t \tag{4,8}$$

que tiene la novedad de que E_* y E_0 sólo contienen 0 y 1 y por lo tanto eliminan la no - linealidad en la estimación del sistema (4.7) no linealidad debida al producto $\underline{\underline{A}}\underline{x}_t$ con la matriz $\underline{\underline{A}}$ que contiene parámetros a estimar.

4.3 METODOLOGÍA

Es interesante constatar que en el área de - formulación de modelos en el espacio de los estados, hasta hace muy pocos años, no se ha desarrollado una metodología sistemática de identificación en el sentido de Box y Jen--- kins /18/ e incluso el término identificación ha sido extensamente empleado para denotar la estimación de los parámetros del modelo (ver /11/).

Suponer la estructura del modelo conocida a partir de teorías matemáticas subyacentes, puede tener sentido en ingeniería y sólo para la parte dinámica del sistema, pero es poco realista en el contexto del análisis de - series temporales cualesquiera.

Sin pretender hacer una revisión exhaustiva de las metodologías de modelado en el espa-- cio de los estados debemos citar las propuestas por Akaike, et al. /9/, /7/ y por Mehra y Cameron /77/ . Esencialmente se utiliza el criterio de información de Akaike ---- /6/, /7/ para seleccionar automáticamente modelos para series estacionarias (previamente se ha decidido en forma automática también el grado de diferenciación óptimo en la serie para hacerla estacionaria). Con los modelos seleccionados se obtienen previsiones de las series (elementos del espacio predictor) y la dimensión mínima del vector de estado se obtiene buscando un conjunto máximo de vectores linealmente independientes entre la secuencia de predicciones. La selección - de las componentes del vector de estado y la estimación de los parámetros de las matrices $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{G}}$ y $\underline{\underline{H}}$ en (4,7) se realiza mediante análisis de correlación canónica entre el conjunto de valores actual y futuros de las series. Los problemas que plantea la selección automática de modelos mediante alguno de los criterios de Akaike antes citados han sido discutidos ya en el partado 3 del presente trabajo.

Digamos finalmente que Lefebvre /70/ ha desarrollado un programa de identificación de sistemas formulados según la forma canónica de Salut pero no conocemos aplicaciones del mismo al análisis de series temporales.

La modelización en el espacio de los estados ha sido utilizada recientemente por Harrison y Stevens /53/ como marco global para la construcción y previsión de modelos lineales con parámetros que varían con el tiempo (4). Un trabajo en la misma línea aunque menos ambicioso es Morrison y Pike /78/ . La crítica general a estos procedimientos es su carencia de métodos de especificación (identificación) de la relación dinámica para la serie o conjunto de series. Peña /86/ ha presentado un estudio comparativo entre estas representaciones y las formulaciones ARIMA.

5. MODELOS PARAMETRICOS BASADOS EN ECUACIONES DE DIFERENCIAS ESTOCASTICAS

5.1 INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Vamos ahora a revisar con algo más de detalle la formulación conocida con el nombre genérico de modelos ARIMA y que ha constituido la forma normal de parametrización por parte de los estadísticos. La primera formulación de una serie temporal como salida de un filtro lineal excitado mediante ruido blanco se debe a Yule /116/ que introdujo formalmente la nomenclatura para los modelos autorregresivos (AR) y ajustó por vez primera un AR(2) a una serie temporal de manchas solares estudiada por Wolfer. Slutsky /102/ formuló un caso particular de un modelo de medias móviles (MA).

La demostración de que toda serie temporal estocástica y estacionaria se puede representar mediante un modelo de medias móviles de orden infinito es debida a Wold /103/ . Durante los veinte años siguientes las investigaciones principales estuvieron dedicadas al estudio teórico de los modelos estacionarios autorregresivos y de medias móviles, siendo de destacar a este respecto los trabajos de Walker /109/ , Bartlett /13/ , Hannan /50/ Quenoulille /96/ entre otros. De estos autores y dentro de las fechas indicadas sólo Quenouille se planteó el estudio del caso multivariante.

La hipótesis de estacionariedad pronto se reveló como poco realista en el contexto de la previsión con series económicas que, en general, exhiben marcadas tendencias (no estacionariedad) así como estacionalidades.

La necesidad de modelar series de este tipo condujo a la formulación de una serie de modelos "ad hoc" a finales de los años 50 y que son conocidos bajo el nombre genérico de métodos de alisado exponencial. Dichos métodos, que se demuestra fácilmente son casos particulares de los modelos ARIMA, fueron elaborados principalmente por Holt /57, 58/, Winters /112/ y Brown /27, 28/ para citar sólo las contribuciones más conocidas. Entre los procedimientos "ad hoc" merece un lugar destacado el utilizado por el Bureau of Census para la desestacionalización de series temporales. El método conocido como el X-11 fue desarrollado por Shiskin, Young y Musgrave /99/ y ha sido extensamente aplicado en macroeconomía.

Pocos años antes, Yaglom /115/ ya había señalado la utilidad de modelar alguna diferencia (5) de una serie no estacionaria y Muth /79/ había demostrado que para modelar una serie temporal que presentase cambios aleatorios en su nivel (valor medio) se debía modelar la primera diferencia de dicha serie.

La síntesis de todos estos trabajos aparece en los estudios de Box y Jenkins /15, 16, 17 y 18/ con la formulación paramétrica escueta de una clase general de modelos para series no estacionarias y/o estacionales y función de transferencia:los modelos ARIMA, a la vez que dichos autores proponen una metodología sistemática y práctica para resolver el problema de ajustar un modelo a datos empíricos En el apartado 5.3 del presente trabajo nos referimos con detalle a las aportaciones teóricas más relevantes de la metodología citada que han ido surgiendo desde el año 1970.

Para finalizar este breve resumen histórico debemos citar la generalización de los modelos ARIMA al caso vectorial o multivariante. Aparte de la ya mencionada obra de Quenouille, varios autores se han ocupado recientemente del caso multivariante. Citaremos a tí

(4) Estos autores califican su método como previsión Bayesiana, nombre que consideramos desafortunado al identificar un enfoque metodológico y filosófico global de la Estadística -el enfoque Bayesiano- con la representación particular de la clase de modelos propugnada por estos autores.

(5) Se llama primera diferencia de la serie Z_t a

$$W_t = \nabla Z_t = (1-B)Z_t = Z_t - Z_{t-1}$$

tulo de ejemplo de Hannan /52/ , Hauhg y -- Box /54/, Jenkins /59/. Punto y aparte - merece la metodología desarrollada por el Departamento de Estadística de la Universidad de Wisconsin-Madison, Tiao et al. /105/ que será discutida con cierto detalle en el apartado 5.5 de la presente comunicación.

5.2 MODELOS Y METODOLOGIA

En el área de series temporales, la parametrización de modelos en forma ARIMA ha resuelto un problema de vital importancia: los mode-- los que se formulan deben poder identificarse y estimarse en la práctica a partir de la información disponible que, en general, es - únicamente una serie temporal o un vector de series temporales concretas.

Cuando se desea formular una clase general - de modelos que sea identificable y estimable, el principio de parquedad ("parsimony" en la nomenclatura de Box-Jenkins) adquiere una importancia notable. Se entiende por modelo -- parco o escueto aquél que contiene un número mínimo de parámetros. Un modelo que no con-- tenga parámetros redundantes, además de que podrá ser estimado en forma estadísticamente eficiente, tendrá en general una estructura simple y podrá ser fácilmente falseado si -- realmente no se ajusta a los datos empíricos.

Para ilustrar los fundamentos de esta metodología vamos a exponer el caso general de un vector de series $\underline{Z}_t$, que particularizaremos después para el caso univariante.

Supongamos un vector estacionario, estrictamente no determinista de series de dimensión k, $\underline{Z}_t$. Según la generalización multivariante del teorema de Wold /52/ este proceso admite una representación:

$$\overset{\circ}{\underline{Z}}_t = \underline{\underline{\Psi}}(B)\ \underline{a}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i\ \underline{a}_{t-i} \qquad (5.1)$$

Donde $\overset{\circ}{\underline{Z}}_t=\underline{Z}_t-\underline{\mu}$ siendo $\underline{\mu}$ el vector de medias - de $\underline{Z}_t$, B es el operador de retardo definido por B $\underline{Z}_t=\underline{Z}_{t-1}$, los términos $\underline{\underline{\Psi}}_i$ son matrices cuadradas k x k no singulares (6) con $\underline{\underline{\Psi}}_0=\underline{\underline{I}}$ la matriz unidad, y $\underline{a}_t$ un vector de ruido -- blanco, caracterizado por:

$$E[\underline{a}_t] = 0$$

$$E[\underline{a}_t\ \underline{a}'_t] = \underline{\underline{\Sigma}}\delta_{tt'}$$

siendo $\delta_{tt'}$ la delta de Kronecker. Supondremos que la matriz $\underline{\underline{\Sigma}}$ es definida positiva.

Para encontrar una representación escueta de $\underline{\underline{\Psi}}(B)$, supondremos que esta matriz puede aproximarse por el producto de las matrices finitas:

$$\overset{\circ}{\underline{Z}}_t = \underline{\underline{\Phi}}(B)^{-1}\ \underline{\underline{\theta}}(B)\ \underline{a}_t \qquad (5.2)$$

lo que conduce a la representación ARIMA multivariante=

$$\underline{\underline{\Phi}}(B)\ \overset{\circ}{\underline{Z}}_t = \underline{\underline{\theta}}(B)\ \underline{a}_t \qquad (5.3)$$

Donde los ceros del determinante $|\underline{\underline{\theta}}(B)|$ de-- ben estar fuera del círculo unidad para que $\overset{\circ}{\underline{Z}}_t$ sea estacionario y los ceros de $|\underline{\underline{\theta}}(B)|$ -- fuera del círculo unidad para que sea invertible.

Además de estas restricciones, las matrices:

$$\underline{\underline{\Phi}}(B) = \underline{\underline{\Phi}}_0 - \underline{\underline{\Phi}}_1 B - \ldots - \underline{\underline{\Phi}}_p B^p$$

$$\underline{\underline{\theta}}(B) = \underline{\underline{\theta}}_0 - \underline{\underline{\theta}}_1 B - \ldots - \underline{\underline{\theta}}_q B^q$$

deben de cumplir determinadas restricciones para que el modelo sea identificable, es decir, exista una equivalencia uno a uno entre la representación (5.3) y la función de covarianzas del proceso. Las condiciones necesarias y suficientes han sido obtenidas por -- Hannan (1969). En particular, el proceso es identificable si:

a) o bien $\underline{\underline{\Phi}}_0=\underline{\underline{\theta}}_0=\underline{\underline{I}}$ y $\underline{\underline{\Sigma}}$ cualquiera
b) o bien $\underline{\underline{\Phi}}_0$ cualquiera, $\underline{\underline{\Gamma}}_0=\underline{\underline{I}}$ y $\underline{\underline{\Sigma}}$ diagonal
c) o bien $\underline{\underline{\theta}}_0$ cualquiera, $\underline{\underline{\theta}}_0=\underline{\underline{I}}$ y $\underline{\underline{\Sigma}}$ diagonal.

En resumen, si permitimos generalidad en $\underline{\underline{\Sigma}}$, $\underline{\underline{\Phi}}_0$ y $\underline{\underline{\theta}}_0$ son matrices unitarias, mientras que si restringimos $\underline{\underline{\Sigma}}$ a ser diagonal una de las matrices $\underline{\underline{\Phi}}_0$ ó $\underline{\underline{\theta}}_0$ puede ser arbitraria. Es inmediato también que si exigimos $\underline{\underline{\Sigma}}=\underline{\underline{I}}$ -formulación de Zellner y Palm (1974)- $\underline{\underline{\Phi}}_0$ y $\underline{\underline{\theta}}_0$ pue-- den ser cualquiera.

En lo que sigue, escogeremos la formulación a) que constituye la generalización natural

(6) Para que el proceso sea estacionario las matrices $\underline{\underline{\Psi}}_i$ deben satisfacer $\sum_1^{\infty}|\Psi_i|<\infty$ (Véase /52/).

de los modelos ARIMA univarivariantes. Los elementos de las matrices $\underline{\underline{\phi}}(B)$ y $\underline{\underline{\theta}}(B)$ vendrán pues dados por:

$$\phi^{ij}(B) = \sum_{p=0}^{p_{ij}} \phi_p^{ij} B^p \qquad \phi_0^{ij} = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix}$$

$$\theta^{ij}(B) = \underset{q=0}{\overset{q_{ij}}{\theta}}\ {}_q^{ij} B^q \qquad \theta_0^{ij} = \begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix}$$

Por ejemplo, si la k -dimensión del vector - de series- es dos y $\underline{\underline{\phi}}(B)=\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{\theta}}_2=\ldots=\underline{\underline{\theta}}_q=\underline{\underline{0}}$, - tenemos el modelo MA (1) bivariante=

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1-\theta_{22}B \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{matrix}$$

y si $\underline{\underline{\theta}}(B)\equiv\underline{\underline{I}}$ y $\underline{\underline{\phi}}_1\neq\underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\phi}}_i=\underline{\underline{0}}$ $(i>1)$, el AR (1) -- multivariante:

$$\begin{bmatrix} 1-\phi_{11}B & -\phi_{12}B \\ -\phi_{21}B & 1-\phi_{22}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

para que esta clase de modelos sea útil en - el modelado de series no estacionarias homogéneas, se permite la existencia de algunos ceros en el círculo unidad. Se obtiene así - el modelo ARIMA (p, d, q).

$$\underline{\underline{\phi}}_p(B)\ (1-B)^{\underline{d}}\ \underline{\overset{\circ}{Z}}_t = \underline{\underline{\theta}}_q(B)\ a_t \qquad (5.4)$$

en la que

$$(1-B)^{\underline{d}} = \begin{vmatrix} (1-B)^{d_1} & \ldots\ldots & 0 \\ \vdots & \ldots(1-B)^{d_2}\ldots & \\ 0 & \ldots(1-B)^{d_k} & \end{vmatrix}$$

y $|\underline{\underline{\phi}}_p(B)|$ tiene ahora todos sus ceros fuera del círculo unidad.

Un caso particular importante de (5.4) es el modelo estocástico univariante (k=1)

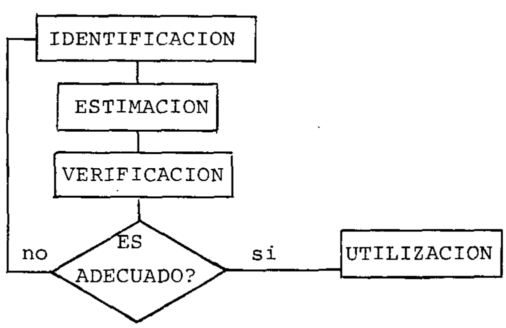
$$\phi_p(B)\ (1-B)^d Z_t = \theta_q(B)\ a_t$$

La introducción en los modelos del operador $(1-B)=\nabla$ permite analizar series que tienen tendencias estocásticas, es decir no estacionariedad en la media de la serie. Otro elemento importante, que se relaciona, por un - lado con la formulación de modelos escuetos y por otro lado con la no escionariedad de - la variancia, y/o la no normalidad de los datos, es la utilización de transformaciones - no lineales de los mismos que serán comentados con mayor detalle en el apartado 5.3.

La parametrización ARIMA permite también la inclusión de modelos para series económicas, en forma multiplicativa o no y, como han demostrado recientemente Tiao y Grupe /105/, permite también la formulación de modelos en los que la media tiene un comportamiento periódico y/o la estructura de covariancias es también periódica.

Una característica que creemos conviene destacar es que una vez obtenido un modelo ARIMA por la metodología que resumiremos a continuación el propio modelo resuelve en forma clara los tres problemas básicos de toda previsión: La forma de la función de previsión eventual, los pesos que hay que aplicar al - pasado para obtener las previsiones adaptativas y la determinación de los intervalos de confianza para las previsiones (véase /19/).

En forma esquemática podríamos decir que la metodología propuesta por Box-Jenkins (1970) es un procedimiento de aprendizaje secuencial basado en la interacción entre el analista y el ordenador que resulta una herramienta imprescindible. El diagrama de las etapas del proceso de modelado es:



Estas etapas son comunes a todos los niveles de la metodología (modelo estocástico univariante, función de transferencia, etc.). La identificación tiene como finalidad principal el obtener valores plausibles para p, d, q así como para el tipo de transformación no lineal a efectuar.

Utiliza como herramientas básicas las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial y todo tipo de ayudas gráficas.

La estimación de los parámetros del modelo identificado se realiza mediante algoritmos - de optimización no lineal que maximizan la - función de verosimilitud exacta o alguna aproximación de la misma. El interés de los - estimadores de máxima verosimilitud reside -

en sus propiedades estadísticas y, principalmente en este caso en que se trabaja habitualmente con muestras grandes, la eficiencia asintótica de los estimadores MV.

La verificación del modelo consiste en un conjunto de pruebas de significación estadística efectuadas a los parámetros del modelo y sobre todo a los resíduos del mismo. Creemos importante señalar aquí que, si el resultado de la verificación es la no aceptación del modelo, ello no implica que deba iniciarse a partir de cero un nuevo proceso de identificación, sino que el nuevo modelo a estimar y verificar se obtiene combinando el modelo rechazado con el modelo que se podría ajustar a los resíduos. Ahí reside precisamente la base de lo que hemos llamado método de aprendizaje secuencial.

5.3 MODELOS ESTOCÁSTICOS UNIVARIANTES

En este apartado trataremos de pasar revista a algunas de las aportaciones más relevantes en el área del modelado de series univariantes parametrizadas en la forma ARIMA, desde la publicación en 1970 del libro de Box y Jenkins.

En la fase de identificación deberíamos citar en primer lugar la aportación de Cleveland /30/ que utiliza el concepto de función de autocorrelación inversa como complemento y alternativa a la función de autocorrelación parcial.

En la identificación de modelos estacionales se ha estudiado por parte de Hamilton, Watts /49/ y Peña /85/ la interacción entre la parte estacional y la no estacional del modelo en las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial. El análisis de dichas interacciones facilita considerablemente la identificación del modelo.

También en el área de modelos estacionales debemos citar el importante trabajo de Claveland y Tiao /31/ en el que discuten la identificación de modelos periódicos para cierto tipo de series estacionales en las que el ajuste de un modelo estacional multiplicativo no resulta adecuado.

En las aportaciones analizadas hasta quí, se han suministrado herramientas adicionales al analista sin eliminar en ningún caso la intervención del mismo en el proceso de identificación, intervención que creemos de especial importancia. Recientemente una serie de autores han propuesto procedimientos de identificación automática basados esencialmente en la minimización del criterio de información de Akaike /5/ . Los resultados obtenidos con métodos automáticos han sido objeto de numerosas críticas teóricas y prácticas, como señalamos en la sección 3.2.

En el área de estimación ha habido progresos notables desde 1970. Es sabido que Box y Jenkins /18/ utilizaban dos tipos de aproximación a la función de máxima verosimilitud que luego se optimizaban mediante algoritmos tipo Marquardt. La primera aproximación es esencialmente minimizar la suma de cuadrados de los resíduos condicional a ciertos valores iniciales y la segunda consiste en la utilización del "back-forecasting". Varios autores y entre ellos Dent /41/ , Ljung y Box /72/ y Ansley /2/ han obtenido la función de verosimilitud exacta para un proceso ARIMA (p, q) y descrito el algoritmo necesario para calcularla mediante el ordenador.

Como creemos que este punto es importante, vamos a desarrollar los conceptos básicos para un modelo MA (1).

Supongamos el modelo:

$$\mathring{z}_t = a_t - \theta a_{t-1}; \quad \mathring{z}_t = z_t - \mu; \quad a_t = \mathring{z}_t + \theta a_{t-1}$$

Condicional a $a_0=0$ tendríamos que la suma de cuadrados de los resíduos sería:

$$S(\theta,\mu) = \sum_{t=1}^{n} a^2_t\ (\theta,\mu)$$

La estimación mínimo-cuadrática de los parámetros del modelo se obtendría pues:

$$S(\hat{\theta},\hat{\mu}) = \min_{\theta,\mu} S(\theta,\mu) \qquad (5.5)$$

Ahora bien, la función de verosimilitud exacta del modelo MA (1) es:

$$\ell(\theta,\mu,\sigma^2_a|\underline{Z})\,\alpha\, p(\underline{Z}|\theta,\mu,\sigma^2_a)$$

siendo σ^2_a la variancia del ruido y $\underline{Z} = (\dot{z}_1, \dot{z}_2,\ldots,\dot{z}_n)'$, es decir

$$\ell(\theta,\mu,\sigma^2_a|\underline{Z})\,\alpha\,\sigma_a^{-N}|\underline{\underline{V}}_n|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma_a^2}\underline{Z}'\underline{\underline{V}}_n^{-1}\underline{Z}} \qquad (5.6)$$

siendo

$$\underline{\underline{V}}_n = \begin{vmatrix} 1+\theta^2 & -\theta \ldots & -\theta \\ -\theta & 1+\theta^2 \ldots & -\theta \\ & & \\ -\theta & -\theta & 1+\theta^2 \end{vmatrix}$$

se puede demostrar además /18/:

$$\underline{Z}' \underline{\underline{V}}_n^{-1} \underline{Z} = S(\theta,\mu) + g(\theta,\mu|\underline{Z})$$

Queda claro ahora que cuando se utiliza la estimación cuadrática (5.5) se está despreciando de (5.6) los términos en que intervienen

$$|\underline{\underline{V}}_n|^{-1/2} \quad y \quad g(\theta,\mu|\underline{Z})$$

mientras que cuando se utiliza el backforecasting se trabaja exactamente con $Z' \underline{\underline{V}}_n^{-1} Z$ pero se sigue despreciando el determinante. Los problemas de despreciar éste, fueron señalados inicialmente por Newbold /82/.

Un punto señalado en la literatura, y que nuestra experiencia práctica nos confirma, es que las aproximaciones a la función de verosimilitud exacta no dan malos resultados cuando el número de observaciones es elevado y cuando los ceros de los polinomios de medias móviles, sobre todo los estacionales, no están certa del círculo unidad.

De todos modos recomendamos vivamente la utilización de la función de máxima verosimilitud exacta en los procedimientos de estimación ya que es la única posibilidad de resolver el problema de la no invertibilidad debida a una sobrediferenciación, problema estudiado por Abraham /1/.

En el área de verificación o diagnosis del modelo, las aportaciones más relevantes se han hecho sobre el estadístico "Portmanteau" definido por Box y Pierce /24/ . Este estadístico fue criticado en primer lugar por Prothero y Wallis /94/ y por Davies, Triggs y Newbold /40/ en el sentido de que la distribución de

$$Q(r) = N \sum_{k=1}^{m} r^2_k$$

puede desviarse de la supuesta teórica χ^2_{m-q-p}. En un reciente trabajo, Ljung y Box /71/ han modificado es estadístico "portmanteau" y han demostrado la robustez del mismo frente a las desviaciones de la hipótesis de normalidad de los resíduos a_t.

Otro aspecto importante de la metodología en la que ha habido contribuciones interesantes durante los últimos diez años ha sido el de la transformación de los datos mediante transformaciones no lineales del tipo Box-Cox /20/ . Este problema va íntimamente ligado a los de aditividad, normalidad y heterocedasticidad de las series temporales. En su libro, Box y Jenkins sugerían que sus modelos tendrían un campo de aplicación más amplio si se consideraban transformaciones no lineales de los datos originales. El énfasis se colocaba en discernir entre si una serie podía convertirse en estacinaria mediante diferenciación únicamente, o si por el contrario, la serie posiblemente estacionaria es la de variación procentual:

$$\frac{\nabla Z}{Z} \doteq \nabla \log Z$$

en cuyo caso procedía transformar logarítmicamente los datos antes de diferenciar.

La importancia del problema surgió a raíz del trabajo de Chatfield y Prothero /34/ en el que se cuestionaba la metodología de Box-Jenkins en base a las previsiones hechas para una única serie temporal, mediante un modelo ARIMA, en el que los autores habían adoptado la transformación logarítmica de los datos. En la réplica a este trabajo, Box y Jenkins /21/ demostraban que la pobreza de las previsiones obtenidas era debida básicamente a que la transformación logarítmica no era la más adecuada para la serie analizada y mostraban como el valor de λ podía obtenerse de forma aproximada mediante un sencillo -gráfico media- amplitud.

Granger y Newbold /43/ demostraron que una transformación de los datos puede modificar a veces la estructura de la función de autocorrelación de la serie y por lo tanto sugerir distintos modelos en la fase de identificación. No obstante, la importancia del problema, de los métodos de diagnosis necesarios para detectar en los resíduos la necesidad de transformar los datos y los efectos de dicha transformación en las previsiones obtenidas han sido claramente expuestas por Nelson /81/ si bien dicho autor indica que los problemas de no normalidad no se resuelven completamente mediante la transformación de Box-Cox. Entre los algoritmos existentes que permiten la estimación máximo-verosímil del parámetro conjuntamente con los restantes parámetros del modelo citaremos el de Ansley, Spivey y Wrobleski /3/.

Han sido también importantes y numerosas las aportaciones en el área del modelado de series estacionales. Un problema importante es si se debe modelar la serie original (convenientemente transformada) o bien si es preferible desestacionar previamente los datos con modelos más o menos "ad hoc". Una respuesta a este dilema se encuentra en Cleveland y Tiao /32/ . En este trabajo los autores encuentran un modelo ARIMA para el programa X-11, propuesto por Shi kin, Young y Musgrave /99/ partiendo de los datos sin desestacionalizar y comentan los resultados, no del todo satisfactorios, del citado programa aplicado a la serie clásica de viajeros de avión. La aplicación a toda serie estacional del método X-11 presupone, que toda serie temporal estacional tiene el mismo modelo ARIMA o, alternativamente, que las previsiones son robustas frente a las desviaciones del modelo ARIMA de una serie concreta respecto del implicado en el X-11, lo que resulta de dudosa validez. Un trabajo íntimamente relacionado con el anterior es el de Tiao y Hillmer /104/ que proponen una descomposición canónica de una serie estacional y comparan positivamente sus resultados con los obtenidos por otros filtros propuestos en la literatura y utilizados en el X-11.

El análisis de series con componente estacional muy estable ha sido objeto de estudio por parte de Cleveland, Dunn y Terpenning /33/ y por Cleveland y Tiao /31/ que introducen el concepto de modelos con media periódica y/o estructura de covariancia periódica y finalmente por Tiao y Grupe /105/ que utilizan la modelización multivariante descrita en el apartado 5.2 del presente trabajo para la identificación, estimación y verificación de dicha clase de modelos. Creemos que los modelos periódicos pueden alcanzar una notable importancia en el futuro.

Otra problemática de gran interés es la del seguimiento de un modelo, previamente aceptado para una serie temporal dada, a fin de detectar posibles cambios en los parámetros y/o en la estructura del mismo en el transcurso del tiempo. Este enfoque difiere sensiblemente del consistente en ir actualizando los parámetros del modelo a cada nueva observación. Se propone detectar evidencia de que algo ha cambiado en el modelo y permite una posterior reflexión sobre qué ha variado en el entorno generador de la serie. Un enfoque no secuencial al tema se encuentra en /22/ en el que los posibles cambios se detectan por comparación entre las previsiones obtenidas mediante el modelo con un origen del tiempo anterior al posible cambio y los valores realmente observados, basándose en el estadístico:

$$Q = \sigma^{-2} \sum_{l=1}^{m} a^2_\ell$$

siendo a_ℓ (ℓ=1,...,m) los errores de previsión con adelanto unitario.

La solución al problema mediante control secuencial de los errores de previsión por el método de observaciones acumuladas (CUSUM charts) ha sido expuesta en la Tesis Doctoral de Ledolter /69/ . Las bases teóricas del método de control por observaciones acumuladas así como una amplia bibliografia sobre el tema se exponen en la Tesis Doctoral de Prat /69/ .

Un último aspecto a resaltar es el de la interpretación de los modelos ARIMA. En su ya citado artículo Chatfield y Prothero /34/ argumentaban la dificultad de interpretación intuitiva de dichos modelos y este punto se ha esgrimido con cierta frecuencia en la literatura como crítica a estos métodos. En la respuesta a estos autores, Box y Jenkins /21/ mostraban, mediante sencillas manipulaciones algebraicas, como expresar un modelo ARIMA en una forma de interpretación muy simple. Además en un apéndice de Box y Jenkins /18/ se sugiere que la función de previsión definida por un modelo ARIMA, que es la solución de una ecuación homogénea en diferencias estocásticas, se reduce a una ecuación de regresión con parámetros que varían en el tiempo, lo que introduce un nexo natural con la formulación en el espacio de los estados, tipo filtro de Kalman, un punto que ha sido explorado por Peña /86/.

Finalmente la justificación teórica de la aparición de modelos mixtos en el modelado de series temporales reales ha sido claramente expuesta por Granger y Morris (1978).

Creemos conveniente cerrar esta apartado señalando las ya muy numerosas aplicaciones -- del modelo ARIMA a problemas reales (ver apartado 6). Además, las previsiones obtenidas por otros métodos de previsión para series univariantes /45/ e incluso a las obtenidas con complejos sistemas econométricos - con una gran cantidad de ecuaciones simultáneas tales como el sistema MIT-Penn y el FRB (ver /80/).

5.4 Modelos de Función de Transferencia

La forma de parametrizar los modelos de función de transferencia y la estrategia de identificación, estimación y verificación, -- fueron desarrollados por Box y Jenkins /18/ en forma muy similar a la expuesta para el - modelo estocástico univariante.

Consideramos en primer lugar el caso de una sola entrada X_t, y salida única Y_t ambas estacionarias. Los modelos de función de transferencia presuponen que entre Y_t y X_t existe causalidad unidireccional en el sentido de - Granger /42/.

En ausencia de perturbación estocástica la - relación dinámica determinista entre X_t e Y_t se puede representar mediante una ecuación - en diferencias.

$$X_t \longrightarrow \boxed{v(B)} \longrightarrow Y_t$$

$$Y_t = (v_0+v_1B+v_2B^2+\ldots)X_t = v(B)X_t$$

Si se formula en forma escueta la respuesta impulsional $v(B)$, admitiendo sólo funciones de transferencia racionales e irreducibles - tendríamos:

$$X_t \longrightarrow \boxed{v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b} \longrightarrow Y_t$$

donde b es el retraso que indica la inercia del sistema y $\omega(B)$ y $\delta(B)$ son polinomios en el operador de retardo B, primos entre sí y tales que todos sus ceros están fuera del -- círculo unidad:

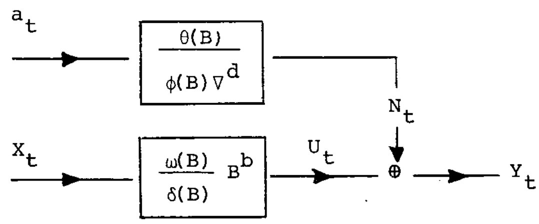
$$\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B \ldots \omega_s B^s$$

$$\delta(B) = 1 - \delta_1 B \ldots \delta_r B^r$$

Por otro lado, sabemos que una perturbación aleatoria estacionaria puede ser representada mediante un modelo ARIMA univariante:

$$a_t \longrightarrow \boxed{\frac{\theta(B)}{\phi(B)\nabla^d}} \longrightarrow N_t$$

Así pues una relación dinámica determinista entre la entrada X_t y la salida Y_t perturbada por un cierto ruido N_t admitirá la representación general (modelo de función de ---- transferencia):



$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} B^b X_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)\nabla^d} a_t \qquad (5.7)$$

El primer sumando de (5.7) representa la relación determinista entre la entrada y la salida, mientras que el segundo sumando expresa la perturbación aleatoria, o sea la influencia sobre Y_t de otras variables distintas a X_t. La no existencia de realimentación implica la independencia entre a_t y X_t en -- instantes de tiempo distintos.

Una primera área de aportaciones a los modelos de función de transferencia desde 1970 - ha sido la de los problemas de la causalidad entre series temporales.

En el trabajo de Haugh /55/ se discuten -- los problemas que aparecen en la identificación de dichos modelos cuando existe realimentación entre la salida y la entrada. Este tema lo trataremos con algo más de detalle - al hablar del preblanqueo. Sims /103/ demostró que el concepto de causalidad de Granger es equivalente al concepto de exogeneidad en los modelos econométricos. Pierce /89/ sugiere que una variable X_t, reciba el nombre de indicador de adelanto ("leeding indicator") de otra variable Y_t sólo si X_t causa a Y_t en el sentido de Granger. Pierce y Haugh /90/ demuestran que al concepto de causalidad antes mencionado es invariante a las - diferenciaciones de las series y a transformaciones no lineales del tipo Box-Cox a la vez que proporcionan un test para verificar entre las series analizadas.

Pocas aportaciones ha habido en el campo de la identificación de los modelos de la identificación de los modelos de función de transferencia desde el resultado básico obtenido por Box y Jenkins de que los coeficientes $v_0, v_1, \ldots$ de la respuesta impulsional son proporcionales a los coeficientes de correlación cruzada $\rho_{xy}(\ell)$, sólo si por lo menos la serie de entrada es ruido blanco. En caso contrario v_ℓ depende de las autocorrelaciones de la serie de entrada. Por ello, proponían preblanquear X_t, con su modelo estocástico univariante, obteniendo una serie α_t que debe ser ruido blanco; preblanquear luego la serie de salida Y_t con el modelo univariante de X_t, obteniendo una serie β_t no necesariamente ruido blanco e identificar v(B) mediante los coeficientes de correlación cruzada $\rho_{\alpha\beta}(\ell)$. La función de transferencia entre α_t y β_t es obviamente la misma que entre las series originales

$$\begin{tikzcd}
X_t \arrow[r] \arrow[d, "\psi^{-1}(B)"'] & \boxed{v(B)} \arrow[r] & Y_t \arrow[d, "\psi^{-1}(B)"] \\
\alpha_t \arrow[r] & \boxed{v(B)} \arrow[r] & \beta_t
\end{tikzcd}$$

Siendo $\psi(B)$ el filtro lineal de la serie X_t.

Este método es válido en el caso de ausencia de realimentación. Dado que un modelo de función de transferencia es un caso particular de un modelo multivariante, se pueden utilizar para su identificación técnicas desarrolladas para dichos modelos que se comentarán en el apartado 5.5.

En cuanto a la identificación del ruido, N_t originalmente Box y Jenkins proponían obtener N_t por diferencia: $N_t = Y_t - v(B)X_t$, aplicando luego a dicha serie la metodología univariante. Teniendo en cuenta que los coeficientes de v(B) son estimados en forma poco eficiente en la etapa inicial del proceso, Jenkins /59/ sugiere utlizar para N_t el modelo univariante del "out-put".

El tratamiento de varios "inputs" no presenta mayores dificultades cuando son independientes. Basta buscar la función de transferencia de cada uno de ellos con el output y tomar como modelo para el ruido el más complejo de los obtenidos. El caso de multicolinealidad en los inputs puede resolverse también sin dificultad (/59/).

Una de las aportaciones más importantes en los últimos diez años, en el contexto que nos ocupa, ha sido el análisis de intervención propuesto por Box y Tiao /23/ . Se trata, en esencia, de un caso particular de función de transferencia cuando los inputs son series binarias (impulsos o escalones).

La utilización de dicho análisis permite eliminar de las series temporales, anomalías debidas a hechos externos a las mismas y que de no ser eliminadas pueden distorsionar la estructura del modelo y/o los parámetros del mismo. Es posible tratar acontecimientos tales como, una huelga, un aumento de precios, la introducción de una nueva lay, una campaña publicitaria, etc. En el apartado 6 el lector interesado podrá encontrar referencias en las que se ha aplicado el método con éxito.

En este punto hay que destacar la utilización hecha por Treadway /108/ del análisis de intervención para el tratamiento de respuestas no lineales, mediante la utilización de funciones de transferencia descompuestas.

5.5 Modelos ARIMA Vectoriales

La formulación del modelo ARIMA vectorial ha sido expuesta en el apartado 5.2 y vamos aquí a resumir sus propiedades matemáticas. El lector interesado puede acudir a /52/ y /108/.

Si definimos la matriz de covariancias de orden ℓ del proceso vectorial de dimensión k, $\underline{Z}_t$, (que supondremos en adelante siempre de media nula sin pérdida de generalidad).

$$\underline{\underline{\Gamma}}(\ell) = E(\underline{Z}_{t-\ell}\underline{Z}'_t) = \{\gamma_{ij}(\ell)\} \qquad \begin{array}{l} i,j=1,\ldots,k \\ \ell=0,1,2,\ldots \end{array}$$

y la matriz de autocorrelación parcial $\underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}$ como la obtenida ajustando a $\underline{Z}_t$, por mínimos cuadrados, el modelo lineal multivariante.

$$\underline{Z}_t = \underline{\underline{P}}_{1,\ell}\underline{Z}_{t-1} + \underline{\underline{P}}_{2,\ell}\underline{Z}_{t-2} + \cdots + \underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}\underline{Z}_{t-\ell} + \underline{u}_t$$

puede demostrarse que, análogamente al caso univariante:

a) un proceso AR(p) vectorial se caracteriza porque los términos de las matrices $\underline{\underline{\Gamma}}(\ell)$ son no nulos y se amortiguan al aumentar el retardo, mientras que los de las matrices $\underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}$ se anulan para $\ell>p$.

b) un proceso MA(q) vectorial se caracteriza porque los términos de las matrices $\underline{\underline{\Gamma}}(\ell)$ se anulan para $\ell>q$ mientras que los de las matrices $\underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}$ son no nulos y se amortiguan al aumentar el retardo ℓ.

c) un proceso mixto ARMA (p,q) vectorial tiene matrices $\underline{\underline{\Gamma}}(\ell)$ y $\underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}$ no nulas, con términos amortiados a medida que crece el retardo ℓ, con algunos valores iniciales sin pauta reconocible y con comportamiento autogresivo a partir de un cierto retardo.

A continuación exponemos brevemente la metodología de Tiao y Box /106/ que es una generalización natural de los procedimientos univariantes.

La identificación requiere:

a) Decidir si transformamos o no las series para convertirlas en estacionarias.
b) Identificar la estructura ARMA.

La conversión del vector de series en estacionario -si inicialmente no lo es- la efectuaremos tomando diferencias de un orden apropiado. Así como en el análisis univariante es conveniente en caso de duda sobrediferenciar para terminar con un modelo más adaptativo, en el caso multivariante la sobrediferenciación debe evitarse.

La identificación de la estructura ARMA requiere: determinar los órdenes máximos de las matrices $\underline{\underline{\Phi}}_i$ y $\underline{\underline{\Theta}}_i$, es decir, los órdenes p y q a partir de los cuales las matrices son idénticamente nulas, es que en definitiva determinar el orden del proceso multivariante ARMA. Para determinar la estructura de las matrices $\underline{\underline{\Phi}}(B)$ y $\underline{\underline{\Theta}}(B)$ utilizamos tres herramientas que vamos a exponer brevemente.

a) <u>Las matrices de correlación simple</u>

Estas matrices que denotaremos $\underline{\underline{R}}(\ell)$ tienen por elemento genérico $r_{ij}(\ell)$, definido por

$$r_{ij}(\ell) = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (z_{it}-\overline{z}_i)(z_{jt+\ell}-\overline{z}_j)}{\sqrt{\sum(z_{it}-\overline{z}_i)^2 \sum(z_{jt}-\overline{z}_j)^2}} \qquad (5.8)$$

donde $\overline{z}_i = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} z_{it}$ y n es el número de observaciones del vector de series. El análisis de estas matrices permite determinar el retardo a partir del cual estas matrices son idénticamente nulas. Dado que los coeficientes $r_{ij}(\ell)$ son muestrales, utilizaremos que, en la hipótesis de que el vector $\underline{Z}_t$ es ruido blanco, $r_{ij}(\ell)$, para $\ell>0$, tiene una distribución asintóticamente normal, con media cero y varianza n^{-1}. Por lo tanto, consideraremos no significativamente distintos de cero aquellos coeficientes menores, en valor absoluto que $2n^{-1/2}$.

Es útil también calcular los determinantes de estas matrices para ver si son iguales a cero.

Si el orden ℓ, tal que para $h>\ell$. $\underline{R(h)}$ tiene todos los elementos nulos y $|\underline{R(h)}|=0$ es alto (mayor que 3 ó 4) esto indica que el proceso tendrá parte autoregresiva. Si el orden h es bajo (1,2 ó 3) la hipótesis tentativa más simple es que el proceso es MA(h).

Por lo tanto, la función de correlación simple nos permitirá diferenciar, en una primera instancia, entre procesos AR y MA.

b) <u>Las matrices de correlación parcial</u>

Por definición, la matriz $\underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}$ es la matriz $\underline{\underline{\Phi}}_\ell$ al ajustar por MCO la ecuación de regresión multivariante:

$$\underline{Z}_t = \underline{\underline{\Phi}}_1\underline{Z}_{t-1} + \dots + \underline{\underline{\Phi}}_\ell\underline{Z}_{t-\ell} + \underline{\varepsilon}_t \qquad (5.9)$$

o, trasponiendo, para escribirlo en forma estándar:

$$\underline{Z}'_t = \underline{Z}'_{t-1}\underline{\underline{\Phi}}'_1 + \dots + \underline{Z}'_{t-\ell}\underline{\underline{\Phi}}'_\ell + \underline{\varepsilon}_t$$

Si llamamos $\underline{Z}'_j$ al vector dila que contiene las k observaciones de las componentes de $\underline{Z}_t$ en el instante j:

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{vmatrix} Z'_{\ell+1} \\ \vdots \\ Z'_n \end{vmatrix}_{(n-1)xk}$$

$$\underline{\underline{X}} = \begin{vmatrix} Z'_\ell & Z'_{\ell-1} & \dots & Z'_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z'_{n-1} & Z'_{n-2} & & Z'_{n-\ell} \end{vmatrix}_{(n-1)xk\ell}$$

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{vmatrix} \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_\ell \end{vmatrix}_{k\ell \times k} \qquad \underline{\underline{U}} = \begin{vmatrix} \varepsilon'_{\ell+1} \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{vmatrix}_{(n-\ell)\times k}$$

Tendremos la ecuación multivariante de regresión:

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}}\ \underline{\underline{\phi}} + \underline{\underline{U}} \tag{5.10}$$

cuya solución mínimo-cuadrática es:

$$\hat{\underline{\underline{\phi}}} = (\underline{\underline{X}}'\underline{\underline{X}})^{-1}\ \underline{\underline{X}}'\underline{\underline{Y}} \tag{5.11}$$

que nos dará la matriz $k\ell \times k$ de parámetros $\phi_{ij}(h)$.

Si llamamos $\underline{\underline{S}}(\ell)$ a la matriz $k \times k$ que da las sumas de cuadrados de los residuos, defnida por:

$$\underline{\underline{S}}(\ell) = \hat{\underline{\underline{U}}}'\hat{\underline{\underline{U}}}$$

siendo $\hat{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{Y}} - \underline{\underline{X}}\ \hat{\underline{\underline{\phi}}}$

entonces la matriz de varianzas y covarianzas de los residuos se calcula con:

$$\sum = \frac{1}{n-k\ell}\ S(\ell)$$

y las varianzas y covariznas de los estimadores $\hat{\underline{\underline{\phi}}}$ vienen dadas por:

$$(X'X)^{-1} \otimes \sum$$

siendo $\otimes$ el producto de Kronecker.

Estas fórmulas constituyen la generalización inmediata del modelo de regresión multivariante clásico. Para contrastar la hipótesis de que $\underline{\underline{P}}_{\ell,\ell}$ es cero, podemos utilizar un test de razón de verosimilitud, con:

$$\Lambda = \frac{|\underline{\underline{S}}(\ell)|}{|\underline{\underline{S}}(\ell-1)|}$$

La distribución de este coeficiente es la Λ de Wilks, que puede aproximarse a una χ^2 central mediante:

$$\chi^2 = -(N - \frac{1}{2} - \ell k)\ \log \Lambda$$

que es, en la hipótesis de que $\underline{\underline{\phi}}_\ell$ es cero, asintóticamente una χ^2 con k^2 grados de libertad. Otras aproximaciones, utilizando la distribución F de Snedecor, pueden verse en /99/

En resumen, las estimaciones de las matrices de autocorrelación parcial van a ser útiles para determinar si el proceso es AR -en cuyo caso habrá un pequeño número de matrices distintas de cero- o MA, en cuyo caso tendremos matrices con coeficientes distintos de cero hasta retardos elevados.

Una información importante de este análisis es el estudio de las matrices de autocorrelación simple de los residuos estimados después del ajuste del modelo (5.9), ya que nos proporcionan información sobre la existencia de un modelo mixto. Por ejemplo, supongamos que el verdadero modelo es ARMA (1,1):

$$(\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{\phi}}B)\ \underline{Z}_t = (\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{\theta}}B)\ \underline{a}_t$$

y erróneamente especificamos un AR(1) dado por:

$$(\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{\phi}}^*B)\ \underline{Z}_t = \underline{\varepsilon}_t$$

es entonces inmediato ver que los residuos $\underline{\varepsilon}_t$ tendrán estructura multivariante, lo que nos llevará a reformular el modelo.

La estimación del modelo identificado se hace, al igual que en el caso univariante, maximizando la función de verosimilitud o alguna aproximación de la misma, mediante algoritmos del tipo Marquardt.

En el óptimo obtendremos el valor de los estimadores, de la matriz de larianzas y covarianzas del vector de ruido así como la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores que vendrá dada por la matriz de información de Fischer. La función de verosimilitud exacta para un proceso ARMA vectorial, ha sido obtenida recientemente por Hillmer y Tiao (1979).

Los diagnosticos del modelo están diseñados para identificar posibles errores en la formulación del mismo y se realizan mediante el análisis de los residuos estimados $\hat{\underline{a}}_t$. El objetivo es comprobar si el vector $\hat{\underline{a}}_t$ es ruido blanco, lo que implica:

a) cada componente $\hat{a}_{it}$ debe ser ruido blanco. Esto se comprueba analizando las funciones de autocorrelación simple y parcial de cada componente. El contraste global utilizado es el estadístico de Ljung-Box /72/.

b) Conjuntamente el vector $\hat{\underline{a}}_t$ sólo puede tener correlación contemporánea, lo que implica que, para $\ell \neq 0$:

- Las matrices de autocorrelación $\underline{\underline{R}}a_t(\ell)$ deben tener todos los elementos no significativos distintos de cero.

- Las matrices $\underline{\underline{P}}_{\underline{a}_t}(\ell\ell)$ deben tener todos los elementos no significativamente distintos de cero.

- Los determinantes de estas matrices deben de ser cero.

Si observamos que $\hat{\underline{a}}_t$ tiene estructura del tipo:

$$\hat{\underline{a}}_t = \underline{\underline{\psi}}(B)\ \underline{a}_t$$

entonces reformularemos el modelo mediante:

$$\underline{\underline{\phi}}(B)\underline{Z}_t = \underline{\underline{\theta}}(B)\underline{a}_t = \underline{\underline{\theta}}(B)\underline{\underline{\psi}}(B)\underline{a}_t$$

que será el nuevo modelo a estimar.

Finalmente la formulación ARIMA vectorial puede generalizarse para tener en cuenta la estacionalidad mediante:

$$\underline{\underline{\phi}}(B)\underline{\underline{\Phi}}(B^s)\underline{Z}_t = \underline{\underline{\theta}}(B)\underline{\underline{H}}(B^s)\underline{a}_t$$

donde $\underline{Z}_t$ es el vector de series originales o convenientemente diferenciado para que sea estacionario.

Una aportación interesante al análisis multivariante de series temporales es el análisis canónico de Box y Tiao (1977). Estos autores investigan las combinaciones lineales de las series originales que tengan predictibilidad (definida como la proporción de variación explicada respecto al total) máxima o mínima. - Las combinaciones lineales de predictibilidad máxima van a determinar la "tendencia" global del sistema mientras que las de predictibilidad mínima reflejan las relaciones estables - entre las series.

6. CONCLUSIONES

Los tres enfoques básicos en el análisis de - series temporales: análisis espectral, modelos en el espacio de los estados y modelos -- ARIMA tienen objetivos y, por lo tanto, dominios de aplicación originalmente distintos. El análisis espectral es un enfoque no paramétrico, -no pretende construir un modelo para la serie temporal univariante o vectorial- se desenvuelve en el dominio frecuencial y pretende esencialmente la comprensión cualitativa de las relaciones dinámicas-frecuencias, amplitudes y fases- presentes entre las componentes de un vector de series - $\underline{Z}_t$.

La formulación en el espacio de los estados se ha desarrollado en el campo de la ingeniería de control en los que la estructura del modelo, por lo menos en su parte dinámica, - es conocida a partir de teorías físico-matemáticas subyacentes, centrándose los esfuerzos de los parámetros del modelo y en la utilización del mismo para el control de los -- procesos correspondientes. En los últimos -- años este enfoque se ha generalizado para el caso en que la única información disponible es la observación de las entradas y salidas del sistema y es esa formulación la que puede ser comparada con los modelos ARIMA al -- ser equivalentes las hipótesis de partida.

La formulación de modelos paramétricos con - esa información inicial ha sido, desde sus - orígenes, el problema básico que se ha querido resolver en el campo de los modelos ARIMA y para el que se ha desarrollado una metodología sistemática de identificación -estimación y verificación de modelos.

Desde el punto de vista del aparato matemátemático utilizado y de la generalidad de la - clase de modelos propuesta, creemos importante señalar:

a) Existe una equivalencia matemática -la - transformada de Fourier- entre la función de autocovariancias y el periodograma que son las herramientas básicas en - el área de los modelos ARIMA y en el análisis espectral respectivamente. De hecho, las dificultades existentes en el - diseño de ventanas para la estimación -- del espectro se están resolviendo utilizando esta dualidad, como se ha señalado en el apartado 3 del presente trabajo.

b) Dado un modelo formulado en el espacio - de los estados es inmediato encontrar su formulación ARIMA equivalente y, como se ha señalado en el apartado 4, dado un modelo ARIMA es posible encontrar una infinidad de ecuaciones de estado equivalentes y en particular escribirlo en forma canónica y escueta.

A la multiplicidad de formas canónicas en el espacio de los estados le corresponde la multiplicidad de condiciones que deben cumplir las matrices $\underline{\phi}$ y $\underline{\theta}$ en los modelos ARIMA para que dichos modelos sean identificables. Existe pues una equivalencia matemática entre los modelos ARIMA y los modelos en el espacio de los estados que cumplan las condiciones de controlabilidad y observabilidad y deban ser identificados a partir de las observaciones input-output únicamente.

Ciñéndonos a la comparación entre los modelos ARIMA y modelos en el espacio de los estados es importante resumir sus diferencias en lo concerniente a la metodología de modelado. Desde este punto de vista cabe destacar:

a) En el área de los modelos ARIMA y debido a los objetivos para los que se formulan dichos modelos, la elaboración de un procedimiento sistemático de modelado ha sido de importancia vital y una de las aportaciones más relevantes de Box y Jenkins (1970) y en particular la utilización de la información empírica para la fase de identificación. En este aspecto las aportaciones en el área del espacio de los estados hay que limitarlas al análisis de correlación canónica propuesto par Akaike (1974).

b) El área de estimación de los parámetros del modelo ha sido objeto de numerosos trabajos en el área de los modelos de estado. Ello es debido a que problemas tan importantes como el de la dimensión del vector de estado se consideran resueltos "a priori". Mientras que en el área de los modelos ARIMA se utiliza cada vez con mayor frecuencia la estimación máximo-verosímil, en el espacio de los estados sigue siendo notable la tendencia a la utilización de modelos autoregresivos que, al tener residuos lineales en los parámetros, permiten una estimación mínimo-cuadrática que, si bien requiere menos tiempo de ordenador es menos eficiente desde un punto de vista estadístico, si, por ejemplo, el verdadero modelo es de medias móviles.

En el área de verificación del modelo basta decir que la gran mayoría de los diagnósticos utilizados han sido desarrollados en el área de los modelos ARIMA ya que constituyen la base de la reformulación de modelos, elemento central en el proceso metodológico de aprendizaje secuencial descrito por Box y Jenkins (1970). También el hecho de que este importante aspecto del modelado de series temporales haya despertado poco interés en el espacio de los estados, debe atribuirse a las hipótesis de partida en este campo: el modelo es ya conocido al margen de los datos

Finalmente, desde el punto de vista de las aplicaciones, el análisis espectral se ha utilizado extensamente en primer lugar en el estudio de sistemas físicos en los que la interpretación en el dominio de la frecuencia tiene una relación directa con el fenómeno estudiado, como en la espectroscopía, el análisis de fenómenos de turbulencia en fluidos la ingeniería eléctrica, la geofísica, la hidráulica, la acústica, el estudio de ritmos orgánicos en Biología o Medicina, etc. (Véase /26/ para referencias extensas de estas aplicaciones). En estos estudios el análisis espectral es muy adecuado para identificar la importancia relativa de los distintos armónicos y para la determinación de la respuesta en frecuencia del sistema ante distintos inputs.

En segundo lugar, el análisis espectral se ha utilizado como análisis previo a la construcción de un modelo paramétrico y complemento y confirmación del modelado en el dominio temporal (véase /18/).

En tercer lugar, para la construcción de filtros y para el alisado y descomposición de series temporales o vectores de series. (Véase /106/ para un enfoque reciente del problema).

El modelado en el aspecto de los estados se ha aplicado principalmente en el control de sistemas físicos en los que las ecuaciones de estado tienen una interpretación directa en el sistema objeto de estudio. En particular, se ha aplicado, entre otros campos, en el de la ingeniería aeronáutica y aeroespacial, /76/, en el de sistemas de potencia, /68/, en el control de procesos, /14/, etc.

Las aplicaciones a campos como el económico - en que la estructura del modelo es desconocida han sido más reducidas y presentan problemas no resueltos. (Véase /5, 77/).

La popularidad de los modelos ARIMA ha sido - debida principalmente al gran número de sus - aplicaciones en los campos más diversos. Jenkins (1970) presenta una amplia panorámica de las mismas. En nuestro país, el lector interesado puede encontrar en el número monográfico de Cuadernos Económicos del ICE (1979) una -- muestra de trabajos realizados por investigadores españoles. En particular, los autores - de este trabajo han aplicado estos procedimientos con éxito al estudio de la demanda de energía eléctrica (/74, 92 y 93/) al estudio - de precios del trigo en la España del siglo - XIX (/88/) y al estudio de transmisión de precios en mercados agrarios /87/, entre otros.

Como resumen de este trabajo, cada una de las metodologías revisadas tiene un dominio de -- aplicación para el cual ha sido diseñada y en el cual es especialmente apta.

El análisis espectral cuando el dominio frecuencial se corresponde estrechamente con la naturaleza física del fenómeno y como herramienta exploratoria muy general, sirve de soporte en los otros enfoques.

El modelado en el espacio de los estados cuando la estructura dinámica del sistema es conocida y el objetivo básico es el control del - mismo. El enfoque paramétrico ARIMA en el resto de los casos en los cuales el objetivo básico es la construcción de modelos estocásticos a partir de la evidencia empírica disponible. Los autores confian en que las estrechas relaciones que se han señalado entre estos enfoques conduzcan en un futuro próximo a una - mayor integración entre los mismos.

8. BIBLIOGRAFIA

/1/ ABRAHAM, B. (1975) "Linear Models, Time Series and Outliers". Ph.D.Thesis. Department of Statistics. University of - Wisconsin-Madison.

/2/ ANSLEY, C.F. (1979) "An algorithm for - the exact likelihood of a mixed autoregressive moving average process". Biometrika, 66, 2, 59-65.

/3/ ANSLEY, C.F., SPIVEY, W.A., WROBLESKI, W.J. (1977) "A class of Transformations for Box-Jenkins Seasonal models". Appli Statis, 26, 2.

/4/ AKAIKE, H. (1969) "Fitting aurorregresive models for prediction". Ann. Inst. - Stat. Math. 21:243-247.

/5/ AKAIKE, H. (1974 a) "A new look at the statistical model identification" IEEE Trans Aut. Control AC-19.

/6/ AKAIKE, H. (1976) "Canonical Correlation Analysis of Time Series and the -- Use of an Information Criterion". System Identification, Advances and Case Studies. Eds. Mehra y Laintiotis. -- Academic Press.

/7/ AKAIKE, H. (1979) "A Bayesian extension of the minimum AIC procedure of autoregressive model fitting". Biometrika, 66

/8/ AKAIKE, H. (1974 b) "Stochastic Theory of Minimal Realization" IEEE Trans. Aut. Control AC-19. Special Issue.

/9/ AKAIKE, H., ARAHATA, E., OZAKI, T. ---- (1975) "TIMSAC-74, A time Series Analysis and control program peckage (1)(2)" Computer Science Monographs nº 5 y 6. - The Institute of Statistical Mathematics Tokyo.

/10/ ASTROM, K.J. (1964) "Control Problems in papermating". Proc. IBM Scientific computing Symposium on control Theory and - applications. Yorktown Heights. New York

/11/ ASTROM, K.J., EYKHOFF, P. (1971) "System Identification- A Survey". Automatica, 7 123-162.

/12/ BARTLETT, M.S. (1966). An Introduction - to Stochastic Processes, Cambridge University Press. London.

/13/ BARTLETT, M.S. (1948) "Smoothing periodograms from time series with continous -- spectra". Nature. 161:686-687.

/14/ BOHLIN, T. (1976). "Four cases of identificate of changing systems from discrete time series", en System Identification,- Mehra y Laintiotis, edit. Academic Press

/15/ BOX G.E.P., JENKINS, G.M. (1962) "Some - Statistical Aspects of adaptative Optimization and Control" Journal of the Roy - Stat. Soc. (B), 24, 297-331.

/16/ BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. (1963) "Fur-- ther contributions to Adaptative Control. Simultaneous Estimation of Dynamics:Non-Zero Costs". Bulletin of the Int. Statis. Inst. 34-th. Session, 934-974.

/17/ BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. (1968) "Some Recent Advances in Forecasting and Con-- trol I". App. Statist. 17, 91-103.

/18/ BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. (1970) Time - Series Analysis. Forecasting and Control. Holden Day.

/19/ BOX, G.E.P., HILLMER, S.C., TIAO, G.C. - (1976) "Analysis and Modelling of Seasonal Time Series". Proceedings of the --- Conference on the Seasonal Analysis of - Economic Time Series Data. U.S. Depart-- ment of Comerce. Economic Research Re--- port ER-1, 309-333.

/20/ BOX, G.E.P., COX, D.R. (1964) "An Analysis of Transformations" J.R. Statist. -- Soc. B, 26, 211-152.

/21/ BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. (1973) "Some Comments on a Paper by Chatfield -- and Prothero an on a Review by Ken---- dall". J.Roy Statit. Soc., A. 136,337-345.

/22/ BOX, G.E.P., y TIAO, G.C. (1976) "Comparison of Forecast and Actuality" J. Roy Stat. Soc., C. 25

/23/ BOX, G.E.P., TIAO, G.C. (1975) "Intervention Analysis with Applications to Economic and Enviromental Problems" -- J.A.S.A. 70, 70-79.

/24/ BOX, G.E.P., PIERCE, D.A. (1970) "Distribution of residual autocorrelation in autoregressive-integrated moving -- average time series models" J.A.S.A., 65. 1509-26.

/25/ BOX, G.E.P., TIAO, G.C. (1977) "A canonical analysis of multiple time se---- ries". Biometrika 64, 335

/26/ BRILLINGER, D.R. (1975) Time Series. - Holt, Rinehart and Winston In.

/27/ BROWN, R.G. (1959) Statistical Forecasting for Inventory and Control. Mc. -- Graw Hill, New York.

/28/ BROWN, R.G., MEYER, R.F. (1961) "The - Fundamental Theory of Exponential Smoothing". Operation Research, 9 673-685

/29/ BUCY, R.C. (1968) "Canonical Forms for multivariable Systems" I.E.E.E. Trans. Ant. Control AC-13. 567-569

/30/ CLEVELAND, W.P. (1972) "Analysis and Forecasting of Seasonal Time Series" - Ph. D. dissertation. University of --- Wisconsin-Madison. Statistics Depart-- ment.

/31/ CLEVELAND, W.P., TIAO, G.C. (1979) "Modeling Seasonal Time Series" Economie Appliquée, 32, 107-129.

/32/ CLEVELAND, W.P., TIAO, G.C. (1976) "Decomposition of Seasonal Time Series: A Model for the Census X-11 Program" --- J.A.S.A., 71, 581-187

/33/ CLEVELAND, W.S., DUNN, D.M., TERPEN--- NING, I.J. (1978) "SABL-A Robust Seasonal Adjustment Procedure with Graphi-- cal Methods for Interpretation and --- Diagnosis". Proceedings of the NBER -- Census Conference of Seasonal Analysis of Economic Time Series. Sept. 1976.

/34/ CHATFIELD, C., PROTHERO, D.L. (1973) - "Box-Jenkins Seasonal Forecasting: Problems in a Case Study" J. Roy Stat. -- Soc. A. 136.

/35/ CHOW, G.C. (1975). Analysis and Con--- trol of Dynamic Economic Systems. ---- Wiley.

/36/ COOLEY, J.W. y TUKEY, J.W. (1965) "An algorithm for the machine calculation of complex fourier series". Math. Comp. 19: 297-301.

/37/ CUADERNOS ECONOMICOS DE INFORMACION -- COMERCIAL ESPAÑOLA (1979) Número monográfico. nov-dic. de 1979.

/38/ DANIELL, P.J. (1946) "Discussion of paper by M.S. Bartlett". J. Roy Statist. Soc. Suppl. 8, 27

/39/ DAVIS, M.H.A. (1977) Linear estimation and stochastic control. Chapman and -- Hall. London.

/40/ DAVIES. N., TRIGGS, C.M., NEWBOLD, P. (1977) "Significance levels of the Box Pierce portmanteau Statistics in finite samples" Biometrika, 64, 517-522.

/41/ DENT, W.T. (1977) "Computation of the exact likelihood function for an ARIMA process". J. Statist. Comp. and Simul. 5, 193-106.

/42/ GRANGER, C.W.J. (1969) "Investigating causal relation by econometric models and cross-spectral methods" Econometrika 37: 424-438.

/43/ GRANGER, C.W.J., NEWBOLD, P. (1977) -- Forecasting Economic Time Series. Academic Press. New York.

/44/ GRANGER, C.W.J., MORRIS, M.J. (1976) - "Time Series modelling and interpretation" J.R.Statist.Soc.A. 139, 246-257

/45/ GRANGER, C.W.J., NEWBOLD, P. (1974) -- "Experience with Forecasting Univariate Time Series and the Combination of Forecast". J. Roy Stat. Soc., A, 137.

/46/ GRENANDER, U. y ROSENBLATT, M. (1953) "Statistical spectral analysis of time series arising from stochastic processes". Ann. Math. Stat. 24, 55.

/47/ GRENANDER, U. y ROSENBLATT, M. (1957) Statistical analysis of Stationary Time Series. Wiley

/48/ HAMMING, R.W. y TUKEY, J.W. (1949) --- Measuring moise color. Bell Teleph. -- Lab. Memorandum.

/49/ HAMILTON, D.C., WATTS, D.G. (1978) "Interpreting partial autocorrelation --- functions of seasonal time series mo-- dels" Biometrika 65, 135-140

/50/ HANNAN, E.J. (1960) Time Series Analysis. Methuen. London.

/51/ HANNAN, E.J. (1969) "The identification of vectors mixed autoregressive - moving averages systems" Biometrika, - 69, 223-225.

/52/ HANNAN, E.J. (1970) Multiple Time Series. Wiley. New York.

/53/ HARRISON y STEVENS (1976) "Bayesian -- Forecasting" Jour. Roy. Stat. Soc.

/54/ HAUGH, L.D., BOX, G.E.P. (1977) "Identification of Dynamic Regression (Distributed Lag) Models Connecting Two -- Time Series" J.A.S.A., 72, 121-130.

/55/ HAUGH, L.D. (1972) "The identification of time series interrelationsship with special reference to dynamic regres--- sion". Ph. D. Thesis. Dept. of Statistics. University of Wisconsin.

/56/ HO, B.L., KALMAN, R.E. (1966) "Effective construction of linear state-variable models from input/output function" Regelungs technik, 14, 545-548.

/57/ HOLT, C.C. (1957) "Forecasting trends seasonals by Exponentially Weighed Moving Averages". Office of Naval Re---- search. Memorandum nº 52.

/58/ HOLT, C.C., MODIGLIANI, F., MUTH, J.F. and SIMON, H.A. (1960) Planning Production, Inventories and Work Force. Englewood Cliffs. N.J. Prentice Hall.

/59/ JENKINS, G.M. (1979) Practical Experiences with forecasting. G.J.P. Lancaster

/60/ JENKINS, G.M. y WATTS, D.S. (1968) Spectral Analysis and its applications. Holden-day.

/61/ KALMAN, R.E. (1960 a) "A new approach - to linear filtering and prediction problems". J. Basic Eng. (ASME Trans) 82, D, 33-45.

/62/ KALMAN, R.E. (1960 b) "New Methods and Results in Linear Prediction and Filtering Theory". Paper presented ad the -- Symposium of Engeneering Applications - of Random Function Theory and Probability. Purdue University. November 1960.

/63/ KALMAN, R.E. (1968) Lectures on Controllability and Observability. C.I.M.E. Bologna.

/64/ KALMAN, R.E., BUCY, R.S. (1961) "New -- Results in Linear Filtering and Prediction Theory". J. Bas. Engin. (ASME ---- Trans.) 83, D.

/65/ KALMAN, R.E. (1963) "The mathematical - description of lineal dynamical sys---- tems" SIAM J. on Control 1,2.

/66/ KENDALL, M. (1946) "Contributions to -- the Study of Oscillatory with conti---- nuous spectra". Nature, 161, 686-687.

/67/ KOEPCKE, R. (1963) Private Comunication

/68/ LARSON, R.E., TINNEY, W.F. y PESCHON, J (1970) "State Estimation in power sys-- tems" Part I and II IEEE Transc-PAS. -- 89:345-63.

/69/ LEDOLTER, J. (1975) "Topics in time series analysis" Ph. D. Thesis. Dept. of Statistics. University of Wisconsin --- Madison.

/70/ LEFEBVRE, S. (1979) "Forme Canonique de Salut et Identification des Systemes - Multivariables". Note interne LAAS 79 I 32. Toulouse

/71/ LJUNG, G.M., BOX, G.E.P. (1978) "On a measure of lack of fit in time series models". Biometrika, 65, 297-303.

/72/ LJUNG, G.M., BOX, G.E.P. (1978) "The - likelihood function of stationary autoregressive-moving average models". --- Biometrika, 66, 2, 265-270.

/73/ LUENBERGER, D.G. (1967) "Canonical --- forms for lineal multivariable systems (short paper)". I.E.E.E.E Trans. Aut. Control AC-12, 290-293.

/74/ MARTI, M., PRAT, A., HERNANDEZ, C ---- (1978) "Aplicación de la metodología - de Box-Jenkins a la previsión de la -- punta mensual de carga de una empresa eléctrica". Questiió, vol. 2, nº 4 --- dic. 78.

/75/ Mc GREGOR, J.F. (1972) "Topics in the control of linear processes Subject to Stochastic Disturbances" Ph. D. Thesis Dept. of Statistics. University of Wisconsin-Madison.

/76/ MEDITH, J.S. (1969) Stochastic Optimal Linear Estimation and Control. Mc Graw Hill.

/77/ MEHRA, R.K., CAMERON, A.V. (1977) "Unified State Space Forecasting for Sin-- gle and Multiple Time Series Applica-- tions" Submitted to Management Science Special Issue on Forecasting

/78/ MORRISON, G.W., PIKE, D.H. (1977) "Kalman filtering applied to statistical - forecasting". Mang. Science. 23, 7: -- 768-74.

/79/ MUTH, J.F. (1960) "Optimal Properties of Exponentially Wheighed Forecast of Time Series with Permanent and Transitory components" J.A.S.A.,55, 299-306.

/80/ NELSON, C.R. (1972) "The Prediction - Perfomance of the F.R.B.-M.I.T.-P.E.N. N. model of the U.S. economy". Ann. -- Econ. Rev., 62, 902-917.

/81/ NELSON, H.L. (junior) (1977) "The Use - of Box-Cox Transformations in Economic Time Series Analysis: An Empirical Study". Ph. D. Thesis. University of California-San Diego.

/82/ NEWBOLD, P. (1974) "The exact likeli--- hood function for a mixed autoregressive-moving average process". Biometrika, 61, 423-426.

/83/ PARZEN, E. (1957) "On consistent estimates of the spectrum of a Stationary time series". Ann. Math. Statist. 28, --- 329-348.

/84/ PEÑA, D.,;ARNAIZ, G. (1980) Criterios - de Selección de modelos ARIMA. Trab. -- Est. e Inv. Oper. (próxima publicación)

/85/ PEÑA, D. (1979) "Interacciones modelos ARIMA estacionales". Cuad. Econ. ICE. - Nov./Dic.

/86/ PEÑA, D. (1980) "Modelos con parámetros variables en el análisis de series temporales". QUESTIIO, 4

/87/ PEÑA, D. y SUMPSI, J. (1979) "Relationship between farm and retail prices in the spanish broiler chicken industry" Pendiente de publicación.

/88/ PEÑA, D., SANCHEZ ALBORNOZ, N. (1979) - "Time series analysis wheat in Spain -- prices from 1957-1890. An application - of the Box-Jenkins methodology" Pendiente de publicación.

/89/ PIERCE, D.A., (1975) "Forecasting in dymic Models with Stochastic Regressors" Journal of Econometrics, 3, 349-374.

/90/ PIERCE, D.A., HAUGH, L.D. (1977) "Causality in Temporal Systems" Characterizations and Survey". J. of Econometrics, 5 265-293.

/91/ PRAT, A. (1975) "Aportaciones al control estadístico de procesos por el médo de observaciones acumuladas" Tesis - Doctoral. Universidad Politécnica de -- Barcelona.

/92/ PRAT, A. y SOLE, I. (1980) "Influencia de la temperatura en el consumo diario de energía eléctrica. Función de transparencia según la metodología de Box-- Jenkins". QUESTIIO,vol. 4 Nº 1.

/93/ PRAT, A. (1980) "Análisis multivariante de la relación temperatura media--- consumo diario de energía eléctrica" - QUESTIIO, vol. 4 nº1.

/94/ PROTHERO, D.L., WALLIS, K.F. (1976) -- "Modelling macroeconomic time series - (with discussion)" J.R.Stat. Soc. A. - 139, 468-500.

/95/ PUGACHEV, V.S. (1960) Theory of Random Functions and its Applications to Automatic Control Problems. Moscú. Ed. Gostekhizdat

/96/ QUENOUILLE, M.H. (1957) The Analysis - of Multiple Time Series. Hafner. New - York.

/97/ RAO, C.R. (1973) Linear Statistical Inference and its applications. Wiley.

/98/ SALUT, G. (1976) "Identification Optimale des Systemes Linéaires Stochastiques" These d'Etat. Université Paul -- Sabatier. Toulouse.

/99/ SHISKIN, J., YOUNG, A.S., MUSGRAVE, J. C. (1967) "The X-11 Variant of Census Method Il Seasonal Adjustement Pro---- gram". Technical Paper nº 15 Bureau of Census U.S. Dept. of Commerce.

/100/ SHUSTER, A. (1898) "On the investiga-- tion of hidden periodicites with application to a supposed 26 day period of meteorological phenomena" Term. Magn.3 13-41.

/101/ SLUTSKY, E. (1934) "Alcuni applicazioni di coefiicienti di Fourier al analizo di sequance eventuali coherenti stazionarii" Giorn.d.Instituto degli Atuare, 5 435-482.

/102/ SLUTSKY, E. (1937) "The summation of - random causes as the source of cyclic processes" Econometrika, 5.

/103/ SIMS, C.A. (1972) "Money, Income and - Causality" American Economic Review, - 62, 540-552.

/104/ TIAO, G.C., HILMER, S.C. (1978) "Some consideration of Decomposition of a Time Series" Biometrika, 65, 497-500

/105/ TIAO, G.C., GRUPE, M.R. (1979) "Hidden Periodic Autoregressive Moving Average Models in Time Series Data" Technical Report Nº 572. Dept. of Statistics University of Wisconsin-Madison (Próxima publicación en Biometrika)

/106/ TIAO, G.C., BOX, G.E.P. (1979) "An Introduction to Applied multiple time series". Tech.Rep.Dept. of Stat. University of Wisconsin, Madison.

/107/ TIAO, G.C., BOX, G.E.P., GROUPE, M.R., HUDAK, G.B., BELL, W.R., CHANG-I ----- (1979) "The Wisconsin Multiple Time Series (WTMS-1) Programm" Department of Statistics. University of Wisconsin-Madison.

/108/ TREADWAY, A. (1978) Efectos sobre la - economia española de una devaluación - de la peseta. Fundación R. Areces, Madrid.

/109/ WALKER, G. (1931) "On periodicity of - series and related terms" Proc. Roy -- Soc. A, 131.

/110/ WHITTLE, P. (1953) "The analysis of -- multiple Stationary time series" J. -- Roy Statist. Soc., B. 15, 125-139.

/111/ WIENER, N. (1949) The Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. Wiley

/112/ WINTERS, P.R. (1960) "Forecasting Sa-- les by Exponentially Weighed Moving Averages" Manag. Science, 6, 1304.

/113/ WOLD, H. (1938) The Analysis of Stationary Time Series. Almquist and Wick--- sell. Uppsala.

/114/ WONG, K.Y., WIIG, J.M., ALLBRIGHTON, - E.J. (1968) "Computer control of the - Clarksville cement plant by state space design method" I.E.E.E. Cement In-- dustry Conf. St. Louis, Mo.

/115/ YAGLOM, A.M. (1955) "The Correlation - Theory of Processes whose n-th Diffe-- rence Constitute a Stationary Process" American Mathematical Society Trans. ser 2 and 8.

/116/ YULE, G.U. (1927) "On the method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with special References to Wolfer's Sunspot Numbers", Phil. Trans. - A, 226.

/117/ ZELLNER, A., PALM, F. (1974) "Time Series Analysis and Simultaneous equa--- tion econometric models". Journ. of -- Econometrics, 2: 17-54.