Publicacions Matemàtiques, Vol **36** (1992), 807–825.

STRATIFICATIONS PARFAITES ET THÉORIE DES POIDS

VICENTE NAVARRO AZNAR

Abstract

In this paper, we emphasize Deligne's theory of weights, in order to prove that some stratifications of algebraic varieties are perfect. In particular, we study in some detail the Bialynicki-Birula's stratifications and the stratifications considered by F. Kirwan to compute the cohomology of symplectic or geometric quotients. Finally we also appoint the motivic formulation of this approach, which contains the Hodge theoretic formulation.

Introduction

Il est bien connu que l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admet une filtration $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \supseteq \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \supseteq \cdots$ qui donne une décomposition cellulaire $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \cdots$ à partir de laquelle on peut obtenir les nombres de Betti du $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ familiers à tous. En outre, on peut changer légèrement le point de vue et obtenir cette décomposition cellulaire du $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ de la théorie de Morse, car $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ admet une fonction de Morse avec $n+1$ points critiques d'index $0, 2, \ldots, 2n$, et il résulte alors de la parité de ces index que les inégalités générales de Morse entre nombres de Betti et nombres de points critiques sont dans ce cas des égalités. On peut finalement considérer la réduction de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ à un corps fini $\mathbb{F}_q$, on obtient alors la décomposition $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^n \cup \mathbb{F}_q^{n-1} \cup \cdots$ qui permet de compter les points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$, obtenir la fonction zeta de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ et retrouver, de nouveau, les nombres de Betti par les conjectures de Weil.

Dans cet article, nous nous intéressons aux décompositions ou stratifications des variétés algébriques et aux fonctions de Morse sur celles-ci provenant de l'action d'un groupe algébrique sur la variété. Dans ce cas, la théorie des poids, qui est née des conjectures de Weil, nous permet de

Ce travail a été partiellement subventionné par le project CICYT PS 90-0069.

formuler un principe qui établit que toutes ces décompositions et fonctions de Morse sont parfaites, c'est-à-dire que pour elles les inégalités de Morse sont toujours des égalités. Nous préciserons ce principe pour les décompositions de Bialynicki-Birula des variétés complètes lisses sur lesquelles opère un tore algébrique et pour les fonctions de Morse qui apparaissent comme carré de la norme de l'application moment de l'action d'un groupe algébrique réductif qui opère linéairement sur une variété projective complexe.

Remarquons que Atiyah-Bott ont donné dans [**1**] un critère pour qu'une stratification soit parfaite en termes de cohomologie équivariante et que, en utilisant ce critère, Kirwan ([**15**], [**16**]) a déjà obtenu la plupart des résultats de cette note, bien qu'uniquement pour les décompositions filtrables, car le critère de Atiyah-Bott n'est disponible que pour ces décompositions. Par contre, l'approche de cette note, basé sur la théorie des poids, n'a pas besoin de cette hypothèse, ce qui infirme l'opinion de Carrell et Sommese, pour qui cette hypothèse paraissait essentielle ([**6**]).

1. Poids et caractéristiques d'Euler pures

Dans cette note, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, et on appelle k-schémas les schémas séparés et de type fini sur k.

On fixe un premier l distinct de p, et pour tout k-schéma X, on note $H^*(X)$, resp. $H^*_c(X)$, la cohomologie l-adique, resp. à support compact, de X, c'est-à-dire qu'on pose

$$H^*(X) = H^*\big(X, \mathbb{Q}_l\big)$$

et

$$H^*_c(X) = H^*_c\big(X, \mathbb{Q}_l\big).$$

Si $p = 0$ et k est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut alternativement considérer la cohomologie singulière rationnelle au lieu de la cohomologie l-adique, c'est-à-dire que dans ce cas le lecteur pourra interpréter dans tout ce qui suit $H^*(X)$ et $H^*_c(X)$, par $H^*\big(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q}\big)$ et $H^*_c\big(X \otimes \mathbb{C}, \mathbb{Q}\big)$, respectivement.

D'après la théorie des poids de Deligne ([**7**]), on sait que ces groupes de cohomologie ont une filtration croissante: la filtration par le poids W, et à partir de celle-ci on peut introduire les caractéristiques d'Euler pures de X, définies, suivant Durfee ([**11**], mais où elles sont appelées mixtes), par

$$\chi_m(X) = \sum_i (-1)^i \dim\, Gr_m^W\, H^i(X)$$

et

$$\chi_c^m(X) = \sum_i (-1)^i \dim\ Gr_m^W\, H_c^i(X).$$

En particulier, si la structure de $H^i(X)$ est pure de poids i, i.e.

$$Gr_m^W\, H^i(X) = 0, \quad \text{pour tout} \quad m \neq i,$$

ce qui est, par exemple, le cas si X est lisse et complet, et on note $b_i(X)$ les nombres de Betti de X, on a

$$\chi_i(X) = b_i(X).$$

Mais, en général, ils diffèrent et ces caractéristiques d'Euler pures ont un meilleur comportement que les nombres de Betti face aux suites exactes de cohomologie.

Finalement, nous introduisons les polynômes de Poincaré purs de X par

$$P_{pur}(X,\, t) = \sum_m \chi_m(X)\, t^m$$

et

$$P_{pur}^c(X,\, t) = \sum_m \chi_c^m(X)\, t^m.$$

2. Décompositions et stratifications

Puisque les définitions de décomposition et stratification d'une variété algébrique varient parfois suivant les auteurs, nous allons préciser notre terminologie.

Définitions. Soit X un k-schéma, une décomposition de X est une famille finie de sous-schémas localement fermés de X : $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$, qui sont disjoints et tels que $X = \cup X_\alpha$. On appelle cellules de la décomposition les sous-schémas X_α.

Une décomposition de X est dite filtrable s'il existe une suite décroissante $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_{m+1}$ de sous-schémas fermés de X telle que $F_1 = X$, $F_{m+1} = \phi$ et $F_\beta - F_{\beta+1}$ est une cellule de la décomposition, $\beta = 1, \ldots, m$.

Une stratification de X est une décomposition telle que la frontière de toute cellule est une réunion de cellules.

Il est clair que toute stratification est une décomposition filtrable, et qu'il y a des décompositions filtrables qui ne sont pas des stratifications.

Théorème 1 (cf. [11]). *Soit X un k-schéma et soit $X = \cup X_\alpha$ une décomposition de X. Alors on a*

$$\chi_c^m(X) = \sum_\alpha \chi_c^m(X_\alpha), \quad \textit{pour tout} \quad m.$$

Démonstration: Si $N = \dim X$ et $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont les cellules de X de dimension N, on va prouver le résultat par double récurrence sur N et r. Le cas $N = 0$ étant évident, on suppose $N > 0$ et $r \geq 1$.

Si une des cellules X_β, $\beta = 1, \ldots, r$, est un ouvert de X, par récurrence, il suffit de prouver le cas particulier suivant du théorème: si $X = X_1 \cup X_2$ et X_1 est un ouvert de X, on a

$$\chi_c^m(X) = \chi_c^m(X_1) + \chi_c^m(X_2).$$

En effet, ceci résulte immédiatement de la suite exacte

$$\cdots \to H_c^i(X_1) \to H_c^i(X) \to H_c^i(X_2) \to \cdots$$

car le foncteur Gr_m^W est exact.

Dans le cas général, soit $\overset{\circ}{X}_r$ l'intérieur de X_r. Il est clair que la décomposition

$$X - \overset{\circ}{X}_r = \bigcup_{\alpha \neq r} X_\alpha \cup \left(X_r - \overset{\circ}{X}_r\right)$$

a $r - 1$ cellules de dimension N, donc par récurrence on a

$$\chi_c^m\left(X - \overset{\circ}{X}_r\right) = \sum_{\alpha \neq r} \chi_c^m(X_\alpha) + \chi_c^m\left(X_r - \overset{\circ}{X}_r\right).$$

Puisque pour les décompositions

$$X = \overset{\circ}{X}_r \cup \left(X - \overset{\circ}{X}_r\right)$$

et

$$X_r = \overset{\circ}{X}_r \cup \left(X_r - \overset{\circ}{X}_r\right)$$

on peut appliquer le cas particulier du théorème déjà prouvé, on obtient

$$\chi_c^m(X) = \chi_c^m(\overset{\circ}{X}_r) + \chi_c^m\left(X - \overset{\circ}{X}_r\right)$$

et

$$\chi_c^m(X_r) = \chi_c^m(\overset{\circ}{X}_r) + \chi_c^m\left(X_r - \overset{\circ}{X}_r\right),$$

d'oú il résulte le théorème.

Corollaire. *Si X est lisse et connexe, et les cellules X_α sont lisses, équidimensionnelles et de codimension d_α dans X, on a*

$$\chi_m(X) = \sum_\alpha \chi_{m-2d_\alpha}(X_\alpha).$$

Démonstration: En effet, par dualité de Poincaré, on a

$$\chi_c^m(X) = \chi_{2\dim X - m}(X)$$

et

$$\chi_c^m(X_\alpha) = \chi_{2\dim X_\alpha - m}(X_\alpha),$$

donc le résultat suit immédiatement du théorème 1.

3. Décompositions et stratifications parfaites

Soit $X = \cup X_\alpha$ une stratification (ou même une décomposition filtrable) de X, il est clair, en changeant les sous-index si nécessaire, qu'il existe une filtration de X par des sous-schémas fermés

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$$

telle que

$$F_\alpha - F_{\alpha+1} = X_\alpha,$$

pour tout α. Alors, pour tout α, on a une suite exacte

$$\cdots \longrightarrow H_c^i(X_\alpha) \longrightarrow H_c^i(F_\alpha) \longrightarrow H_c^i(F_{\alpha+1}) \longrightarrow \cdots$$

et on dit que la stratification est parfaite si toutes ces suites se scindent en des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow H_c^i(X_\alpha) \longrightarrow H_c^i(F_\alpha) \longrightarrow H_c^i(F_{\alpha+1}) \longrightarrow 0.$$

Si X est lisse et connexe, toutes les cellules sont lisses et connexes, et notons d_α la codimension de X_α dans X, il en résulte alors que

$$b_i(X) = \sum_\alpha b_{i-2d_\alpha}(X_\alpha)\,, \quad \text{pour tout} \quad i.$$

En général, si X es lisse et connexe et $X = \cup X_\alpha$ est une décomposition de X, avec des cellules lisses et connexes, nous dirons qu'elle est parfaite si elle vérifie l'égalité antérieure entre nombres de Betti.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux décompositions de Bialynicki-Birula ([**2**]), qui, en général, ne sont filtrables que dans le cas projectif ([**4**], [**14**]). Rappelons que ces décompositions s'obtiennent de la manière suivante.

Soit X un k-schéma lisse et complet sur lequel agit un tore algébrique T et soit $X^T = \cup X_\alpha^T$ la décomposition de la partie fixe X^T en composantes connexes. Alors X a une décomposition $X = \cup X_\alpha$, telle que X_α est un k-schéma lisse, X_α^T est un sous-schéma fermé de X et X_α est une fibration sur X_α^T, en particulier, le morphisme

$$H^*(X_\alpha) \to H^*(X_\alpha^T)$$

est un isomorphisme.

Ces décompositions sont le sujet du résultat suivant.

Théorème 2. *Soit X un k-schéma connexe, lisse et complet, qui admet une décomposition $X = \cup X_\alpha$, telle que chaque X_α est un k-schéma lisse, connexe, de codimension d_α et a un sous-schéma complet Y_α pour lequel le morphisme*

$$H^*(X_\alpha) \to H^*(Y_\alpha)$$

est un isomorphisme. Alors,

$$b_i(X) = \sum_\alpha b_{i-2d_\alpha}(Y_\alpha)\,, \quad \textit{pour tout} \quad i,$$

et, donc, la décomposition de X est parfaite.

Démonstration: Puisque aussi bien X que les cellules X_α sont lisses, et puisqu'on a

$$\chi_m(X_\alpha) = \chi_m(Y_\alpha),$$

il résulte du corollaire au théorème 1 que

$$\chi_m(X) = \sum_\alpha \chi_{m-2d_\alpha}(Y_\alpha).$$

Or on a

$$Gr_m^W H^i(X_\alpha) = 0\,, \quad \text{si} \quad m < i,$$

car les X_α sont lisses, et on a

$$Gr_m^W H^i(Y_\alpha) = 0\,, \quad \text{si} \quad m > i,$$

car les Y sont complets, d'où

$$Gr_m^W H^i(Y_\alpha) = 0\,, \quad \text{si} \quad m \neq i,$$

et il en résulte que

$$\chi_m(Y_\alpha) = b_m(Y_\alpha).$$

Puisqu'on a aussi

$$\chi_m(X) = b_m(X),$$

X étant lisse et complet, ceci prouve le théorème.

Corollaire (cf. [3], [6], [12], [16]). *Soit X un k-schéma connexe, lisse et complet sur lequel agit un tore algébrique T. Si $X^T = \cup X_\alpha^T$ est la décomposition de X^T en composantes connexes et d_α est la codimension de la cellule X_α de la décomposition de Bialynicki-Birula de X, on a*

$$b_i(X) = \sum_\alpha b_{i-2d_\alpha}(X_\alpha^T)\,, \quad \textit{pour tout} \quad i.$$

Remarque. Dans [3] les nombres de Betti de X sont donnés par une expresion équivalente à l'antérieure mais légèrement différente. En effet, rappelons que, associées à la décomposition en composantes connexes de X^T, on a deux décompositions de X

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha^+ = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha^-.$$

Alors, la formule du corollaire antérieur pour la décomposition $X = \cup X_\alpha^+$ donne

$$b_i(X) = \sum b_{i-2d_\alpha}(X_\alpha^T),$$

où $d_\alpha = \dim X - \dim X_\alpha^+$. Tandis que la formule de [3], pour cette décomposition, est

$$b_i(X) = \sum b_{i-2d_\alpha^+}(X_\alpha^T),$$

où $d_\alpha^+ = \dim X_\alpha^+ - \dim X_\alpha^T$. Or, puisqu'on a

$$\dim X = \dim X_\alpha^+ + \dim X_\alpha^- - \dim X_\alpha^T,$$

il résulte que

$$d_\alpha = \dim X_\alpha^- - \dim X_\alpha^T (=: d_\alpha^-),$$

et ainsi la formule du corollaire obtenue à partir de la décomposition $X = \cup X_\alpha^+$ coïncide avec la formule de [3] obtenue à partir de la décomposition $X = \cup X_\alpha^-$.

4. Théorie équivariante

Soit G un groupe k-algébrique linéaire et X un G-schéma, i.e. un k-schéma sur lequel G agit, la cohomologie l-adique équivariante de X est définie comme la cohomologie l-adique du schéma simplicial $B(X, G)$, obtenu par la construction barre géométrique; ainsi, si on suppose, par exemple, que G agit à droite sur X, on a

$$B(X,G)_n = X \times G^n,$$

et

$$\begin{aligned}\delta_0(x,\, g_1,\, g_2, \ldots, g_n) &= (xg_1,\, g_2, \ldots, g_n)\\ \delta_i(x,\, g_1,\, g_2, \ldots, g_n) &= (x,\, g_1, \ldots, g_i\, g_{i+1}, \ldots, g_n),\end{aligned}$$

si $1 \leq i \leq n-1$, et

$$\delta_n(x,\, g_1,\, g_2, \ldots, g_n) = (x,\, g_1, \ldots, g_{n-1}),$$

(voir [**8**, 6.1]). Il en résulte que les groupes de cohomologie équivariante $H^*_G(X)$ et $H^*_{G,c}(X)$ ont aussi une filtration par le poids, qui vérifie le théorème suivant (cf. [**8**, (8.2.4)]):

Théorème 3. *Soit X un G-schéma de dimension N. Pour tout $i \geq 0$, on a:*

1) *Les entiers m tels que $Gr^W_m\, H^i_G(X)$ est non nul vérifient les conditions suivantes:*
   (i) $m \in [0, 2i] \cap [i-N,\, i+N]$.
   (ii) Si X est lisse, $m \in [i,\, 2i] \cap [i,\, i+N]$.
   (iii) Si X est complet, $m \in [0,\, i] \cap [i-N,\, i]$.
2) *Les entiers m tels que $Gr^W_m\, H^i_{G,c}(X)$ est non nul vérifient $m \in [0,\, i] \cap [i-N,\, i]$.*

Démonstration: Les différentes parties du théorème résultent des propriétés des poids des faisceaux d'images directes $\mathbb{R}^i f_* \mathbb{Q}_l$ du morphisme

$$f : B(X,G) \to B(G),$$

analogue simplicial du morphisme classique

$$X \times U_G/G \to B_G,$$

car $B(G)$ se comporte cohomologiquement comme un schéma lisse et complet, c'est-à-dire, que si F est un faisceau lisse pur de poids n sur $B(G)$, alors $H^i(B(G), F)$ est pur de poids $n+i$ (cf. [**9**, (3.3.6)] et [**8**, (9.1.4)]). Nous nous bornons à donner une esquisse de preuve du théorème.

En général , le faisceau $\mathbb{R}^i f_* \mathbb{Q}_l$ est mixte de poids dans $[0,2i] \cap [i-N,\ i+N]$ ([**9**, (3.3.8)]), donc on obtient 1) (i).

Pour prouver 2), on considère les faisceaux d'images directes à support propre $R^i f_! \mathbb{Q}_l$ qui sont mixtes de poids dans $[0,i] \cap [i-N,\ i]$ ([**9**, (3.3.8)]), et ainsi, les groupes $H^i_{G,c}(X)$ sont mixtes de poids aussi dans $[0,i] \cap [i-N,\ i]$.

Si X est lisse de dimension N, le faisceau $\mathbb{R}^i f_* \mathbb{Q}_l$ est le dual du faisceau $\mathbb{R}^{2N-i} f_! \mathbb{Q}_l(N)$, est donc mixte de poids dans $[i, 2i] \cap [i, i+N]$, d'oú il résulte 1) (ii).

Evidemment, 1) (iii) est un cas particulier de 2).

Si on dispose de la résolution équivariante de singularités, par exemple si k est de caractéristique 0, on peut donner une autre preuve de ce théorème, même en termes de structures de Hodge mixtes, car on dispose alors des ingrédients essentiels pour suivre la ligne de démonstration de Deligne dans le cas non équivariant ([**8**]). En effet, si X est lisse et complet on a

$$H^*_G(X) = (H^*(X) \otimes H^*(B_G))^{G/G_0},$$

où G_0 est la composante connexe de G (voir [**15**, 5.8]), donc ces groupes ont des structures pures. Si X est lisse et non complet, par Sumihiro [**17**] et Hironaka, il existe un G-schéma lisse et complet $\overline{X}$ qui contient X comme un ouvert de Zariski dense et tel que $\overline{X} - X$ est un diviseur à croisements normaux, on peut alors suivre les arguments de [**8**] et prouver 1) (ii). Si X est propre, par Hironaka, il existe une hyperrésolution équivariante de X et il en résulte 1) (iii) par descente cohomologique. D'oú on déduit aussi 2) en utilisant encore le théorème de complétation équivariante et la suite exacte de cohomologie correspondante. Finalement, il en résulte aussi 1) (ii) par descente cohomologique.

Il résulte de ce théorème que pour la cohomologie équivariante les caractéristiques d'Euler pures sont définies, bien que la caractéristique d'Euler ordinaire n'est pas en général définie, car on peut avoir un nombre infini de groupes de cohomologie non nuls. On définit donc les caractéristiques d'Euler équivariantes pures de X par

$$\chi^m_G(X) = \sum_i (-1)^i \ \dim\ Gr^W_m H^i_G(X)$$

et

$$\chi^m_{G,c}(X) = \sum_i (-1)^i \dim Gr^W_m H^i_{G,c}(X).$$

On définit la série de Poincaré équivariante pure de X par

$$P^G_{pur}(X) = \sum_m \chi^m_G(X)\, t^m,$$

qui, éventuellement, peut être une série formelle non polynômiale.

Si X est un G-schéma, on introduit, comme dans le paragraphe 2, les G-décompositions, les G-décompositions filtrables et les G-stratifications, et une démonstration parallèle à celle du théorème 2 donne le résultat suivant.

Proposition 4. *Soit X un G-schéma et soit $X = \cup X_\alpha$ un G-décomposition de X. Alors on a*

$$\chi^m_{G,c}(X) = \sum_\alpha \chi^m_{G,c}(X_\alpha), \quad \textit{pour tout} \quad m.$$

La dualité de Poincaré n'étant pas valable en cohomologie équivariante, pour obtenir l'analogue équivariant du corollaire au théorème 1, nous devons utiliser la cohomologie locale équivariante et introduire les caractéristiques d'Euler pures correspondantes.

Soient X un G-schéma et Y un G-sous-schéma localement fermé de X. Alors, il existe un G-sous-schéma ouvert U de X tel que Y est un fermé de U, $U - Y$ est donc aussi un G-schéma et on définit la cohomologie locale à support dans Y : $H^*_{G,Y}(X)$, comme la cohomologie du cône du morphisme

$$B(U - Y, G) \to B(U, G),$$

(voir [**8**, (6.3)]), cohomologie qui ne dépend pas du ouvert U choisi. Cette cohomologie a quelques propriétés en commun avec la cohomologie locale ordinaire, ainsi cette cohomologie a une filtration par le poids, vérifie la propriété d'excision, l'isomorphisme de Thom et on a la suite exacte longue de cohomologie que, par exemple si Y est fermé dans X, est

$$\cdots \to H^i_{G,Y}(X) \to H^i_G(X) \to H^i_G(X - Y) \to \cdots$$

Proposition 5. *Soient X un G-schéma et Y un G-sous-schéma localement fermé de X. Les entiers m tels que $Gr^W_m H^i_{G,Y}(X)$ est non nul* *sont positifs et pour chaque m il n'y a qu'un nombre fini d'entiers $i \geq 0$ tels que $Gr_m^W H^i_{G,Y}(X)$ est non nul.*

Démonstration: Elle suit immédiatement de la suite exacte antérieure et du théorème 3.

On peut donc définir les caractéristiques d'Euler pures pour cette cohomologie locale équivariante par

$$\chi^m_{G,Y}(X) = \sum_i (-1)^i \dim Gr_m^W H^i_{G,Y}(X).$$

Proposition 6. *Soit X un G-schéma et soit $X = \cup X_\alpha$ une G-décomposition de X. Alors on a*

$$\chi^m_G(X) = \sum_\alpha \chi^m_{G,X_\alpha}(X) \,, \quad \textit{pour tout} \quad m.$$

Démonstration: Il nous convient pour le raisonnement qui suit de prouver le résultat plus général suivant.

Soient Z un G-schéma, X un G-sous-schéma localement fermé de Z et $X = \cup X_\alpha$ une G-décomposition de X. Alors on a

$$\chi^m_{G,X}(Z) = \sum_\alpha \chi^m_{G,X_\alpha}(Z) \,, \quad \text{pour tout} \quad m.$$

En effet, nous pouvons maintenant suivre le même argument que dans la preuve du théorème 1. Par la même récurrence, il nous suffit de prouver le cas où $X = X_1 \cup X_2$ et X_1 est un ouvert de X. Mais dans ce cas, on a la suite exacte

$$\cdots \to H^i_{G,X_2}(Z) \to H^i_{G,X}(Z) \to H^i_{G,X_1}(Z) \to \cdots ,$$

et on obtient

$$\chi^m_{G,X}(Z) = \chi^m_{G,X_1}(Z) + \chi^m_{G,X_2}(Z).$$

Corollaire. *Si X est lisse et connexe et les cellules X_α sont lisses, équidimensionnelles et de codimension d_α dans X, on a*

$$\chi^m_G(X) = \sum_\alpha \chi_G^{m-2d_\alpha}(X_\alpha),$$

et

$$P^G_{pur}(X) = \sum_\alpha t^{2d_\alpha} P^G_{pur}(X_\alpha).$$

Démonstration: En effet, il résulte de l'isomorphisme de Thom

$$H^i_G(X_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^{i+2d_\alpha}_{G,X_\alpha}(X)\,(d_\alpha),$$

que

$$\chi^m_G(X_\alpha) = \chi^{m+2d_\alpha}_{G,X_\alpha}(X),$$

donc le résultat suit de la proposition antérieure.

Exemple 1. Nous allons maintenant montrer comment on peut déduire du corollaire précédent les formules de F. Kirwan ([**15**]) qui donnent inductivement les nombres de Betti d'un quotient symplectique ou géométrique d'une variété. Nous rappelons, d'abord, le théorème de décomposition de [**15**], suivant l'approche algébrique de [**15**, Part II], et renvoyons à loc. cit. pour plus de détails ainsi que pour la relation avec la théorie de Morse et le carré de la norme de l'application moment en géométrie symplectique.

Soient X un k-schéma projectif et lisse et G un k-groupe algébrique réductif qui agit linéairement sur X. Alors, d'après [**15**], il existe une décomposition filtrable de X

$$X = \bigcup_{\beta\in B} S_\beta,$$

telle que S_0 est l'ouvert X^{ss} des points semi-stables de X, et pour tout $\beta \in B$, $\beta \neq 0$, S_β est isomorphe à $G \underset{P_\beta}{\times} Y^{ss}_\beta$, où Y^{ss}_β est un sous-schéma de X localement fermé et lisse, et P_β est un sous-groupe parabolique de G. En plus, il existe une fibration algébrique localement triviale et P_β-équivariante

$$p_\beta : Y^{ss}_\beta \to Z^{ss}_\beta$$

avec des fibres des espaces affines, où Z^{ss}_β est l'ouvert des points semi-stables, par rapport à un sous-groupe réductif maximal $stab\,\beta$ de P_β, d'un sous-schéma fermé et lisse Z_β de X.

Soient $S_{\beta,m}$ les composantes connexes de S_β de codimension $d(\beta, m)$. Alors, il résulte du corollaire précédent que

$$\chi^p_G(X) = \sum \chi_G^{p-2d(\beta,m)}(S_{\beta,m}), \quad \text{pour tout} \quad p,$$

ou bien, en termes des polynômes de Poincaré purs

$$P^G_{pur}(X) = \sum t^{2d(\beta,m)}\, P^G_{pur}\left(S_{\beta,m}\right).$$

Soient $Y^{ss}_{\beta,m}$ et $Z^{ss}_{\beta,m}$ les composantes correspondantes de Y^{ss}_β et Z^{ss}_β. Il résulte des propriétés de la cohomologie équivariante que

$$H^*_G(S_{\beta,m}) \cong H^*_{P_\beta}(Y^{ss}_{\beta,m}),$$
$$H^*_{P_\beta}(Y^{ss}_{\beta,m}) \cong H^*_{P_\beta}(Z^{ss}_{\beta,m}),$$

et

$$H^*_{P_\beta}(Z^{ss}_{\beta,m}) \cong H^*_{stab\,\beta}(Z^{ss}_{\beta,m}),$$

d'où

$$P^G_{pur}(S_{\beta,m}) = P^{stab\,\beta}_{pur}(Z^{ss}_{\beta,m}),$$

et on obtient la formule récursive

$$P^G_{pur}(X^{ss}) = P^G_{pur}(X) - \sum_{\substack{\beta\in B \\ 0\leq m<\dim X}} t^{2d(\beta,m)}\, P^{stab\beta}_{pur}(Z^{ss}_{\beta,m}).$$

En utilisant pour chaque $Z^{ss}_{\beta,m}$ cette formule, on obtient récursivement des sous-schémas fermés et lisses $Z_{\underline{\beta},m}$, où $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ (voir [**15**, 16.4]), telles que

$$P^G_{pur}(X^{ss}) = P^G_{pur}(X) - \sum_{\underline{\beta}} (-1)^q\, t^{2d(\underline{\beta},m)}\, P^{stab\underline{\beta}}_{pur}(Z_{\underline{\beta},m}),$$

d'où, si G est connexe, il résulte

$$P^G_{pur}(X^{ss}) = P(X)\,P(B_G) - \sum_{\underline{\beta}} (-1)^q\, t^{2d(\underline{\beta},m)}\, P(Z_{\underline{\beta},m})\,P(B_{stab\underline{\beta}}).$$

Finalement, si on suppose $X^s = X^{ss}$, i.e. que X^{ss} a un quotient géométrique M, alors

$$H^*_G(X^{ss}) \cong H^*(M),$$

et, puisque M est complet et n'a que des singularités quotient, $H^*(M)$ est pur, donc on a

$$P^G_{pur}(X^{ss}) = P(M).$$

Il en résulte la formule de F. Kirwan

$$P(M) = P(X)\,P(B_G) - \sum (-1)^q\, t^{2d(\underline{\beta},m)}\, P(Z_{\underline{\beta},m})\,P(B_{stab\underline{\beta}}),$$

et comme corollaire que la décomposition $X = \cup S_\beta$ est équivariantement parfaite.

Il faut souligner, toutefois, que F. Kirwan a déjà prouvé dans [**15**] que la stratification $X = \cup S_\beta$ est équivariantement parfaite même dans le cas général, et que ceci est équivalent à la pureté de $H^*_G(X^{ss})$, mais nous n'avons pas de preuve directe de ce fait.

Exemple 2. Pour terminer ce paragraphe, nous donnons un dernier exemple d'application du corollaire au calcul des nombres de Betti des quotients géométriques étudiés par Bialynicki-Birula et Sommese ([**5**]). La situation considérée par ces auteurs est la suivante. Soient T le tore $\mathbb{G}_m$, X un T-schéma lisse et complet sur $\mathbb{C}$, et U un ouvert T-invariant de $X - X^T$ tel qu'il existe le quotient géométrique U/T et est complet. Alors, il est prouvé par Bialynicki-Birula et Sommese que, si

$$X = \bigcup_{\alpha\in A} X^+_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A} X^-_\alpha$$

sont les décompositions de X, il existe un sous-ensemble de A non trivial A^-, tel que

$$U = \bigcup_{\alpha\in A^-} X^+_\alpha - \bigcup_{\alpha\in A^-} X^-_\alpha .$$

Nous allons retrouver les formules pour les nombres de Betti de U/T obtenues dans [**5**], en utilisant le corollaire à la proposition 6. En effet, puisque

$$\bigcup_{\alpha\in A^-} X^+_\alpha = U \cup \bigcup_{\alpha\in A^-} X^-_\alpha ,$$

on a

$$\sum t^{2d^-_\alpha}\, P^T_{pur}\,(X^+_\alpha) = P^T_{pur}\,(U) + \sum t^{2d^+_\alpha}\, P^T_{pur}(X^-_\alpha),$$

car rappelons que

$$d^-_\alpha = \dim X - \dim X^+_\alpha$$

et

$$d^+_\alpha = \dim X - \dim X^-_\alpha .$$

On obtient donc

$$P^T_{pur}(U) = \sum t^{2d^-_\alpha}\, P^T_{pur}(X^+_\alpha) - \sum t^{2d^+_\alpha}\, P^T_{pur}(X^-_\alpha).$$

Or

$$\begin{aligned} P^T_{pur}(X^+_\alpha) &= P^T_{pur}(X^T_\alpha) \\ &= P(X^T_\alpha)\, P(B_T) \\ &= \frac{P(X^T_\alpha)}{1-t^2} \end{aligned}$$

et analoguement

$$P^T_{pur}(X^-_\alpha) = \frac{P(X^T_\alpha)}{1-t^2}.$$

Et puisque

$$P^T_{pur}(U) = P(U/T),$$

U/T étant complet et à singularités quotient, on obtient finalement

$$P(U/T) = \sum_{\alpha\in A^-} P(X^T_\alpha)\,\frac{t^{2d^-_\alpha} - t^{2d^+_\alpha}}{1-t^2}.$$

5. Une version motivique

Dans les paragraphes précédents, nous n'avons considéré que la filtration par le poids de la cohomologie, car nous avons supposé k de caractéristique quelconque, or si k est un corps de caractéristique zéro, on peut formuler les résultats obtenus pour tout le système de réalisations de sa cohomologie ([**10**]) qui, en particulier, contient la structure de Hodge de cette cohomologie. Cette version motivique des résultats antérieurs s'obtient de la manière suivante.

Dans ce qui suit, on considère donc k un corps de caractéristique zéro. Soit $\mathbf{SRM}(k)$ la catégorie des systèmes de réalisations mixtes sur k, qui est une catégorie tanakienne ([**10**], cf. [**13**]), et soit $\mathbf{SRP}(k)$ la sous-catégorie tanakienne de $\mathbf{SRM}(k)$ engendrée par les systèmes de réalisations pures. Pour tout m, on a des foncteurs exacts

$$Gr^W_m : \mathbf{SRM}(k) \to \mathbf{SRP}(k).$$

Nous noterons $K_0M(k)$ et $K_0P(k)$ le groupe K_0 de la catégorie abélienne $\mathbf{SRM}(k)$ et $\mathbf{SRP}(k)$, respectivement. Ces groupes sont, de fait, isomorphes, car le morphisme

$$\oplus_m Gr^W_m : K_0M(k) \to K_0P(k)$$

est un inverse du morphisme $K_0P(k) \to K_0M(k)$ induit par l'inclusion.

Si X est un k-schéma, notons $SRM^*(X)$ et $SRM^*_c(X)$ les systèmes de réalisations mixtes de $H^*(X)$ et $H^*_c(X)$, respectivement ([**10**], [**13**]).

On définit, dans $K_0M(k)$, les caractéristiques d'Euler motiviques de X par

$$\chi_{mot}(X) = \sum_i (-1)^i\,[SRM^i(X)],$$

et

$$\chi_{mot,c}(X) = \sum_i (-1)^i \, [SRM_c^i(X)].$$

Finalement, on définit, dans $K_0P(k)$, les caractéristiques d'Euler motiviques pures de X par

$$\chi_{mot}^m(X) = \sum_i (-1)^i \, Gr_m^W \, [SRM^i(X)],$$

et

$$\chi_{mot,c}^m(X) = \sum_i (-1)^i \, Gr_m^W [SRM_c^i(X)].$$

Après ces préliminaires, les versions motiviques des résultats des paragraphes précédents sont claires, par exemple la même preuve du théorème 1 mais avec $\chi_{mot,c}^m$ et SRM_c^i au lieu de χ_c^m et H_c^i nous donne:

Proposition 8. *Soit X un k-schéma et soit $X = \cup X_\alpha$ une décomposition de X. Alors on a*

$$\chi_{mot,c}^m(X) = \sum_\alpha \chi_{mot,c}^m(X_\alpha) \ , \quad \textit{pour tout} \quad m.$$

Pour exprimer la dualité de Poincaré dans ce contexte rappelons qu'on a dans $\mathbf{SRP}(k)$ des foncteurs exacts: le foncteur de dualisation

$$\begin{aligned} \mathbf{SRP}(k) &\to \mathbf{SRP}(k) \\ M &\mapsto M^\vee := \mathrm{Hom}(M, \mathbf{1}) \end{aligned}$$

et les twist de Tate

$$\begin{aligned} \mathbf{SRP}(k) &\to \mathbf{SRP}(k) \\ M &\mapsto M(n) := M \otimes \mathbf{1}(n). \end{aligned}$$

Ces foncteurs induisent des morphismes

$$\begin{aligned} K_0P(k) &\to K_0P(k) \\ M &\mapsto M^\vee \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K_0P(k) &\to K_0P(k) \\ M &\mapsto M(n). \end{aligned}$$

Alors, si X est lisse, la dualité de Poincaré entraine

$$\chi_{mot,c}^m(X) = \left(\chi_{mot}^{2N-m}(X)\right)^\vee (-N),$$

où $N = \dim X$, et on obtient immédiatement les résultats suivants.

Corollaire. *Si X est lisse et connexe, et les cellules X_α sont lisses, connexes et de codimension d_α dans X,, on a*

$$\chi^m_{mot}(X) = \sum_\alpha \chi^{m-2d_\alpha}_{mot}(X_\alpha)\,(-d_\alpha).$$

Proposition 9. *Soit X un k-schéma connexe, lisse et complet sur lequel agit un tore algébrique T. Si $X^T = \cup X^T_\alpha$ est la décomposition de X^T en composantes connexes et d_α est la codimension de la cellule X_α de la décomposition de Bialynicki-Birula de X, on a*

$$[SRM^i(X)] = \sum_\alpha \,[SRM^{i-2d_\alpha}(X^T_\alpha)]\,(-d_\alpha)\,, \quad \textit{pour tout} \quad i.$$

*En particulier on en déduit l'égalité suivante entre nombres de Hodge (cf. [**6**])*

$$h^{pq}(X) = \sum_\alpha h^{p-d_\alpha,q-d_\alpha}(X^T_\alpha).$$

Finalement, nous établissons la version motivique du corollaire à la proposition 6, qui se démontre par les mêmes arguments que ce corollaire.

Proposition 10. *Soit X un G-schéma et soit $X = \cup X_\alpha$ une G-décomposition de X. Si X est lisse et connexe et les cellules X_α sont lisses, equidimensionnelles et de codimension d_α dans X, on a*

$$P^G_{mot,\,pur}(X) = \sum_\alpha t^{2d_\alpha}\,P^G_{mot,\,pur}(X_\alpha)\,(-d_\alpha).$$

Ainsi, pour l'exemple 2 du paragraphe 4 on obtient

$$P_{mot}(U/T) = \sum_{\alpha\in A^-} P_{mot}(X^T_\alpha)\,\frac{t^{2d^-_\alpha}(-d^-_\alpha) - t^{2d^+_\alpha}(-d^+_\alpha)}{1-t^2(-1)}$$

d'où

$$[SRM^i(U/T)] = \sum_{\alpha\in A^-}\ \sum_{d^-_\alpha\le s<d^+_\alpha} [SRM^{i-2s}(X^T_\alpha)]\,(-s)$$

et, en particulier, on obtient pour les nombres de Hodge

$$h^{pq}(U/T) = \sum_{\alpha\in A^-}\ \sum_{d^-_\alpha\le s<d^+_\alpha} h^{p-s,\,q-s}(X^T_\alpha).$$

Bibliographie

1. M. F. ATIYAH AND R. BOTT, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, *Philos. Trans. Roy Soc. London Ser. A* **308** (1982), 523–615.
2. A. BIALYNICKI-BIRULA, Some theorems on actions of algebraic groups, *Ann. of Math.* **98** (1973), 480–497.
3. A. BIALYNICKI-BIRULA, On fixed points of torus actions on projective varieties, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **22** (1974), 1097–1101.
4. A. BIALYNICKI-BIRULA, Some properties of the decompositions of algebraic varieties determinated by actions of a torus, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **24** (1976), 667–674.
5. A. BIALYNICKI-BIRULA AND A. J. SOMMESE, Quotiens by $\mathbb{C}^*$ and $SL(2,\mathbb{C})$ actions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **279** (1983), 773–800.
6. J. B. CARRELL AND A. J. SOMMESE, Some topological aspects of C^* actions on compact Kähler manifolds, *Comment. Math. Helv.* **54** (1979), 567–582.
7. P. DELIGNE, Poids dans la cohomologie des variétés algébriques, in "*Actes du Congres International des Mathematiciens*," Vancouver, 1974, pp. 79–85.
8. P. DELIGNE, Théorie de Hodge, II, *Publ. I.H.E.S.* **40** (1971), 5–58; III,*Publ. I.H.E.S.* **44** (1975), 5–77.
9. P. DELIGNE, La conjecture de Weil, II, *Pub. I.H.E.S.* **52** (1980), 137–252.
10. P. DELIGNE, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in "*Galois Groups over* $\mathbb{Q}$," Springer-Verlag, 1989, pp. 79–297.
11. A. DURFEE, Euler characteristics in mixed Hodge theory, Preprint.
12. T. FRANKEL, Fixed points and the torsion on Kähler manifolds, *Ann. of Math.* **70** (1959), 1–8.
13. U. JANNSEN, "*Mixed Motives and Algebraic K-Theory*," Lectures Not. in Math. **1400**, Springer-Verlag, 1990.
14. J. JURKIEWICZ, An example of algebraic torus action wich determines the nonfiltrable decomposition, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **25** (1977), 1089–1092.
15. F. KIRWAN, "*Cohomology of quotiens in symplectic and algebraic geometry*," Princeton Math. Notes **31**, 1984.

16. F. KIRWAN, Intersection homology and torus actions, *Jour. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 385–400.
17. H. SUMIHIRO, Equivariant completions, *J. Math. Kyoto Univ.* **14** (1974), 1–28.

Departament d'Àlgebra i Geometria
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
E-08007 Barcelona
SPAIN

Rebut el 17 de Gener de 1992