

EXISTENCIA DE INYECTORES EN GRUPOS FINITOS RESPECTO DE CIERTAS CLASES DE FITTING

M. J. IRANZO Y F. PÉREZ MONASOR

Abstract

In this paper we prove that all finite groups have F -injectors with respect to a saturated and extensible Fitting formation F .

Todos los grupos considerados en este trabajo son finitos. Las componentes de un grupo son sus subgrupos subnormales cuasisimples. El producto de todas las componentes de un grupo G es el radical semisimple de G , denotado $E(G)$. Las propiedades de las componentes de un grupo pueden encontrarse en ([2, X.13]).

Para las definiciones y primeras propiedades sobre clases de Fitting e inyectores ver [1].

Denotamos por N, N^*, S, E_π las clases de los grupos nilpotentes, cuasinilpotentes, resolubles, π -grupos, siendo π un conjunto de números primos.

En 1985 encontramos un test para la obtención de F -inyectores en cualquier grupo finito. Dicho test es en esencia el siguiente:

1. Existencia de F -inyectores de $E(G)$.
2. Sea I un F -inector de $E(G)$. Si J es un F -inector de $N_G(I)$, entonces J es un F -inector de G .
3. Si G es F -constricto, ($N_G(I) = G$), entonces G posee F -inyectores.

La eficacia de dicho test fue comprobada para el caso en que $N \subseteq F \subseteq N^*$, siendo F una clase de Fitting cerrada para cocientes centrales y extensiones centrales. ([4]). Asimismo cuando $F = \{G \mid E(G/O_{\pi'}(G)) \in H, H \text{ clase de Fitting}, \pi = \text{car } H\}$ ([5]).

El motivo de este trabajo es probar que si F es una formación de Fitting saturada y extensible, todo grupo finito admite F -inyectores. En este caso la última fase del test no parece utilizable de forma inmediata, puesto que no es conocido que todo grupo F -constricto tenga F -inyectores. Por ello ha sido necesario modificar algo la técnica de la demostración.

Lema 1. *Sea F un homomorfo de Fitting. Si G es producto directo de grupos simples no abelianos G_i , $i = 1, \dots, n$, entonces G posee F -inyectores que son exactamente los productos de los subgrupos F -maximales de los factores.*

Demostración: Vale la misma que la del lema 1 de [4]. ■

En lo que sigue y siempre que no se manifieste lo contrario, F será una formación de Fitting saturada.

Lema 2. *Un grupo G posee F -inyectores si y solo si los posee $G/Z(G)$.*

Demostración: Simple comprobación. ■

Corolario 1. *Dado un grupo cualquiera G , $E(G)$ posee F -inyectores.*

Demostración: Basta tener en cuenta que $E(G)/Z(E(G))$ es producto directo de grupos simples no abelianos y aplicar los dos lemas anteriores. ■

Corolario 2. *Sea $G = G_1 G_2$ donde G_i es semisimple $i = 1, 2$ y $[G_1, G_2] = 1$. Si J es un F -inyector de G , entonces $J = (J \cap G_1)(J \cap G_2)$.*

Demostración: Vale una demostración análoga a la del Corolario 2 de [4]. ■

Notas.

1. Evidentemente los F -inyectores de una componente de G son sus subgrupos F -maximales.

2. En virtud de los resultados anteriores, los F -inyectores de $E(G)$ son exactamente los productos de los F -inyectores de sus componentes.

Teorema. *Sea F una formación de Fitting saturada y extensible, entonces todo grupo posee F -inyectores.*

Demostración: En la demostración del teorema por inducción, suponemos que la afirmación vale para todos los grupos de orden menor que el orden de un grupo dado G . Puesto que es fácil comprobar que si $G/O_{\pi'}(G)$ posee F -inyectores entonces G posee F -inyectores, siendo $\pi = \text{car } F$, podemos suponer que $O_{\pi'}(G) = 1$. Sea I un F -inyector de $E(G)$. Si $N_G(I) < G$, entonces por hipótesis de inducción $N_G(I)$ posee F -inyectores, sea J uno de ellos. Veamos que J es F -inyector de G . Sea $N \trianglelefteq G$ y $J \cap N \leq W \leq N$ con $W \in F$. Denotemos con L_1 el producto de las componentes de G contenidas en N y L_2 el producto de las componentes fuera de N . Entonces $E(G)$ es producto central de L_1 por L_2 y por el corolario 2, $I = (I \cap L_1)(I \cap L_2)$. Además $W \cap L_1 \trianglelefteq W$ luego $W \cap L_1 \in F$ y como $I \cap L_1 \leq J \cap L_1 \leq W \cap L_1$ y por el carácter F -maximal de $I \cap L_1$ en L_1 se sigue $I \cap L_1 = W \cap L_1$ así W normaliza a $I \cap L_1$ y centraliza a $I \cap L_2$, luego W normaliza a I . Ahora

tenemos $J \cap N_N(I) \leq J \cap N \leq W \leq N_N(I)$. Además $N_N(I)$ es subnormal en $N_G(I)$ luego $J \cap N_N(I)$ es F -maximal en $N_N(I)$, luego $J \cap N = W$, lo que prueba que J es un F -inyector de G .

Podemos suponer por tanto que $N_G(I) = G$. Entonces $E(G) = IR$ con $[I, R] = 1$, R semisimple, así $I \cap R \leq Z(R)$ y como $O_{\pi'}(G) = 1$, $Z(R)$ es π -grupo luego F -grupo. Dado que $I \cap R$ es F -inyector de R se deduce que $I \cap R = Z(R)$. Por el lema 2 se sigue ahora que 1 es F -inyector de $R/Z(R)$ deduciéndose que éste no posee π -elementos y en consecuencia es un π' -grupo y como $O_{\pi'}(G) = 1$ y R es semisimple se sigue $R = Z(R) = 1$. Así $E(G) \in F$, es decir G es F -constricto [3]. Entonces los normales minimales de G son F -grupos. Sea N uno de ellos. Como $|G/N| < |G|$, por inducción G/N posee F -inyectores. Sea S/N uno de ellos, entonces $S \in F$. Supongamos que $G^* \trianglelefteq G$ y $G^* \cap S \leq W \leq G^*$ con $W \in F$, entonces $(S \cap G^*)N/N \leq WN/N \leq G^*N/N$ y $WN/N \in F$, luego como $S/N \cap G^*N/N$ es F -maximal en G^*N/N se sigue: $(S \cap G^*)N = WN \leq S$ y por tanto $W = S \cap G^*$.

Notas.

1. Cada grupo no resoluble posee al menos dos clases de conjugación de S -inyectores.

2. Observar que no se obtiene un resultado análogo para la clase E_π , es decir un grupo con una única clase de conjugación de E_π -inyectores no es necesariamente un π -grupo. Basta considerar $\pi = \{p\}$ y aplicar teoría de Sylow.

Bibliografía

1. K. DOERK, T. HAWKES, Finite Soluble Groups, *Preprint*.
2. B. HUPPERT, N. BLACKBURN, Finite Groups III, "Springer-Verlag, Berlin," 1982.
3. M.J. IRANZO, F. PÉREZ MONASOR, F -constraint with respect to a Fitting, class, *Arch. Math.* **46** (1986), 205-210.
4. M.J. IRANZO, Fitting classes F such that all Finite Groups have F -injectors, *Israel J. Math.* **56** (1986), 97-101.
5. M.J. IRANZO, On the existence of certain injectors in Finite Groups, *Communications in Algebra*.

Departamento de Algebra
 Facultad de Ciencias Matemáticas
 Universidad de Valencia
 C/ Doctor Moliner s/n. Burjasot
 (Valencia), SPAIN.

Rebut el 19 d'Agost de 1986