Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 10, N.° 2, 1994

Bases orthonormées de paquets d'ondelettes

Eric Séré

1. Notations et énoncé du théorème principal.

Soit H un espace de Hilbert, muni d'une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. On considère deux filtres miroirs en quadrature, de fonctions de transfert

$$m_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k\, e^{ik\theta} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

et

$$m_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k\, e^{ik\theta} = e^{-i\theta}\, \overline{m_0(\theta+\pi)}\,.$$

On suppose que m_0 vérifie les conditions usuelles,

$$m_0(0) = 1\,, \qquad m_0(\theta) \neq 0\,, \quad \text{si } |\theta| \le \frac{\pi}{2}\,,$$

et

$$|m_0(\theta)|^2 + |m_0(\theta+\pi)|^2 = 1\,.$$

On pose

$$e_k^0 = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} h_{2k-\ell}\, e_\ell\,, \qquad e_k^1 = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} g_{2k-\ell}\, e_\ell\,.$$

On sait (voir [CMW]) que $(e_k^0)_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(e_k^1)_{k\in\mathbb{Z}}$ sont les bases hilbertiennes de deux sous-espaces orthogonaux H^0 et H^1, et que $H = H^0 \oplus H^1$.

On préfère noter $H = H_{[0,1]}$, $H^0 = H_{[0,1/2]}$, $H^1 = H_{[1/2,1]}$.

La décomposition de H en H^0 et H^1 est alors associée à la décomposition $[0,1] = [0,1/2] \cup [1/2,1]$. On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des intervalles dyadiques de $[0,1]$, c'est-à-dire du type

$$I = \left[\frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_j}{2^j}\,,\ \frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}\right] .$$

En itérant le procédé de décomposition décrit plus haut, on obtient une famille $(H_I)_{I\in\mathcal{I}}$ d'espaces de Hilbert munis chacun d'une base $(e_{k,I})_{k\in\mathbb{Z}}$, avec la propriété suivante

- Si I^0 et I^1 sont les moitiés gauche et droite d'un intervalle $I \in \mathcal{I}$, alors $H_I = H_{I^0} \oplus H_{I^1}$, et la somme est orthogonale.

Une conséquence de cette propriété est que, si $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ est une partition finie de $[0,1]$ constituée d'intervalles dyadiques, alors

$$H = H_{[0,1]} = \bigoplus_{\alpha\in A} H_{I_\alpha} \ ,$$

et la somme est orthogonale.

Il est naturel d'essayer d'étendre cette décomposition au cas de partitions infinies.

On note $\pi_I : H \to H_I$ la projection orthogonale de H sur H_I.

Pour $x \in H$, $\|x\| = 1$, on pose $\mu_x(I) = \|\pi_I(x)\|^2$. On sait (voir [CMW]) que μ_x s'étend en une mesure de probabilité *continue* sur les Boréliens de $[0,1]$.

En choisissant, par exemple,

$$\sigma = \frac{1}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\mu_{e_k}}{2^{|k|}}$$

on obtient immédiatement le résultat suivant

Théorème 1. *Il existe une mesure de probabilité continue σ sur $[0,1]$ telle que, si $(I_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'intervalles dyadiques deux à deux disjoints, les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

i) $H = \overline{\bigoplus_{n\geq 0}} H_{I_n}$, *et la somme est orthogonale,*

ii) $\sigma\Big([0,1] \setminus \bigcup_{n\geq 0} I_n\Big) = 0$.

Bien sûr, le choix de σ n'est pas unique, et toute mesure $d\sigma' = g\, d\sigma$ avec $g \in L^1([0,1], d\sigma)$ et $g > 0$ σ-p.p. conviendrait.

Le but de ce travail est de démontrer, dans le cas des filtres d'Ingrid Daubechies, un résultat plus fort, conjecturé par Yves Meyer.

On suppose désormais (voir [D], [M]) que m_0 est la fonction de transfert d'un filtre à coefficients réels, de longueur finie $2N$, $N \geq 2$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\, m_0(\theta) = h_0 + h_1\, e^{i\theta} + \cdots + h_{2N-1}\, e^{i(2N-1)\theta}\,, \\ \sqrt{2}\, m_1(\theta) = h_0\, e^{-i\theta} - h_1\, e^{-2i\theta} + \cdots + (-1)^k\, h_k\, e^{-i(k+1)\theta} \\ \qquad\qquad + \cdots - h_{2N-1}\, e^{-2Ni\theta}\,, \end{cases}$$

et que $\hat{\varphi}(\theta) = m_0(\theta/2) \cdots m_0(\theta/2^j) \cdots$ est la transformée de Fourier d'une fonction φ de classe C^r, où

$$\gamma_1 N \leq r \leq \gamma_2 N\,, \qquad \gamma_2 > \gamma_1 > 0\,.$$

Ces filtres sont ceux qui sont utilisés dans la pratique en compression du signal.

L'énoncé du théorème principal de ce travail est alors le suivant

Théorème 2. *Si l'on travaille avec des filtres d'I. Daubechies, il existe une mesure de probabilité continue $d\sigma$ sur $[0,1]$, et un isomorphisme isométrique $J : H \longrightarrow L^2([0,1], d\sigma)$ ayant la propriété suivante*

- *Si $J(x) = f$, alors $J(\pi_I(x)) = f\,\chi_I$, où χ_I est la fonction indicatrice de l'intervalle I, et $\pi_I : H \longrightarrow H_I$ est l'opérateur de projection orthogonale.*

REMARQUE 1. Les propriétés des filtres d'I. Daubechies qui seront utilisées dans la démonstration du Théorème 2 sont

- Le fait que (h_k) et (g_k) sont de longueur finie $\leq 2N$.

- Le fait que

$$2^j e^{i2^j k\xi} m_0(\xi)\cdots m_0(2^{j-1}\xi) \underset{j\to\infty}{\rightharpoonup} 2\pi\,\varphi(k)\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\delta(\xi-2\pi\ell)\,,$$

où la convergence se fait au sens des distributions 2π-périodiques, à k fixé.

REMARQUE 2. Pour des filtres infinis, la question de savoir si J existe est encore ouverte.

Si, à la place des filtres d'I. Daubechies, on met des filtres de Haar, définis par

$$\begin{cases} m_0(\theta) = \dfrac{1+e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\,, \\ m_1(\theta) = \dfrac{1-e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\,, \end{cases}$$

on peut écrire pour tout $I\in\mathcal{I}$

$$\begin{cases} \pi_I(e_0) = 2^{|I|/2}\, e_{0,I}\,, \\ \pi_I(e_{-1}) = \pm\, 2^{|I|/2}\, e_{-1,I}\,, \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} \|\pi_I(e_0)\| = \|\pi_I(e_{-1})\|\,, \\ \langle \pi_I(e_0), \pi_I(e_{-1})\rangle_H = 0\,. \end{cases}$$

Si le Théorème 2 était vrai pour les filtres de Haar, on aurait donc

$$\begin{cases} |J(e_0)| = |J(e_{-1})|\,, & \sigma\text{ -p.p.} \\ J(e_0)\,J(e_{-1}) = 0\,, & \sigma\text{-p.p.} \end{cases}$$

d'où $J(e_0) = J(e_{-1}) = 0\quad \sigma$-p.p., ce qui est absurde. Donc dans le cas des filtres de Haar, le Théorème 2 est faux.

Pour éviter cet écueil, on considère l'espace de Hilbert H^+ engendré par la base $(e_n)_{n\geq 0}$.

H^+ est stable par les projections π_I. On note $H_I^+ = \pi_I(H^+)$.

Yves Meyer a fait l'observation suivante

Théorème 2 bis. *Si l'on travaille avec les filtres de Haar, le Théorème 2 est vrai en remplaçant H par H^+ et H_I par H_I^+ dans son énoncé. De plus, la mesure $d\sigma$ est la mesure de Lebesgue.*

Ce résultat s'obtient par une *construction explicite* de l'isomorphisme J. Yves Meyer considère la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ des fonctions de Walsh, dont la première est $w_0 = \chi_{[0,1]}$.

Ces fonctions forment une base de $L^2([0,1],\mathbb{R})$, et vérifient les relations

$$\begin{cases} w_n(2x) = \dfrac{1}{2}\left(w_{2n}(x) + w_{2n+1}(x)\right), \\[2ex] w_n(2x-1) = \dfrac{1}{2}\left(w_{2n}(x) - w_{2n+1}(x)\right). \end{cases}$$

Il suffit alors de poser $J(e_n) = w_n$, et les relations ci-dessus permettent de vérifier les conclusions du Théorème 2 bis.

On serait tenté par une construction analogue dans le cas des filtres d'I. Daubechies. Malheureusement, la tâche semble difficile. Elle est - entre autres - compliquée par le fait de la mesure *$d\sigma$ n'est pas la mesure de Lebesgue* dans plusieurs cas.

L'auteur de cet article a en effet démontré, dans un travail non encore publié, que les filtres d'I. Daubechies de longueur inférieure ou égale à 10 ont une mesure $d\sigma$ associée singulière. On peut d'ailleurs conjecturer que c'est le cas pour tous les filtres d'I. Daubechies.

La démonstration du Théorème 2 que nous allons donner ne passera donc pas par une construction explicite de l'isomorphisme J. Elle reposera sur l'idée suivante

Pour $\xi \in [0,1]$ et $x \in H$, on essaie d'étudier la limite $l(\xi,x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ des coefficients sur la base $(e_{k,I})_{k\in\mathbb{Z}}$ de $\pi_I(x)/\|\pi_I(x)\|$, lorsque $(|I| \to 0\ ,\ \xi \in I)$.

Si l'on pose $f = J(x)$, l'information contenue dans $f\,\chi_I$ se réduit à un scalaire lorsque $|I| \to 0$. On peut donc s'attendre, si le Théorème 2 est vrai, à ce que $l(\xi,x)$, lorsqu'elle existe, soit indépendante de x (au signe près). Réciproquement, on peut espérer que l'existence de J se déduira des propriétés de l .

En fait, l'étude de $l(\xi, x)$ ne semble possible que pour ξ de la forme $k/2^j$, et x de la forme $\sum_{k\in K} \alpha_k e_k$, où K est une partie finie de $\mathbb{Z}$. Cette restriction sur les valeurs de ξ rendra un peu délicat le passage du local (étude de l) au global (existence de J).

2. Plan de la démonstration du Théorème 2.

Pour démontrer le Théorème 2, il nous suffira de prouver le résultat suivant

Théorème 3. *Soit $T : H \longrightarrow H$ un opérateur continu. Supposons que pour tout intervalle dyadique I, on ait $T \circ \pi_I = \pi_I \circ T$.*

Alors il existe une suite bornée $T_j : H \longrightarrow H$ d'opérateurs de la forme $T_j = \sum_{I\in E_j} \lambda_I \pi_I$, telle que $\langle T_j f, g\rangle \to \langle Tf, g\rangle$ pour tous $f, g \in H$.

Ici, les E_j sont des parties finies de $\mathcal{I}$, et les λ_I sont des scalaires.

En effet, d'après le Théorème 1, la famille (π_I) engendre une mesure spectrale $\tilde{\pi}$, c'est-à-dire une application de l'ensemble des Boreliens de $[0,1]$ dans celui des projecteurs orthogonaux de H, dénombrablement additive et telle que $\tilde{\pi}([0,1]) = 1_H$. De plus, le projecteur $\tilde{\pi}(\{a\})$ associé à un singleton $\{a\}$ est toujours nul, par continuité de σ. Le Théorème 3 implique que tout projecteur orthogonal commutant avec l'image de $\tilde{\pi}$ est lui-même dans cette image. Ceci entraîne le Théorème 2, d'après la théorie de la multiplicité spectrale dans les espaces de Hilbert (voir par exemple [H, Chapitre III]).

La convergence des T_j souhaitée étant une convergence faible, on va se ramener, pour démontrer le Théorème 3, à l'étude de $\langle T_j f, g\rangle$ pour $f, g \in H^{(j)}$, les $H^{(j)}$ étant une suite croissante d'espaces de dimension finie, avec $\overline{\bigcup_{j\geq 0} H^{(j)}} = H$.

Plus précisément, nous définissons $H^{(j)}$ comme l'espace engendré par $(e_k)_{-2^{j-1}<k\leq 2^{j-1}}$. Pour tout intervalle dyadique $I \subset [0,1]$, nous définissons de même l'espace $H_I^{(j)}$ engendré par $(e_{k,I})_{-2^{j-1}<k\leq 2^{j-1}}$.

La propriété remarquable des $H_I^{(j)}$, lorsqu'on travaille avec des filtres d'Ingrid Daubechies, est qu'il existe $j_0 \geq 0$ tel que pour $j \geq j_0$, on ait toujours $\pi_I(H^{(j)}) \subset H_I^{(j)}$.

On vérifie très simplement cette propriété par récurrence sur i, avec $2^{-i} = |I|$, pour un filtre $(h_k)_{0\le k\le 2N-1}$, en choisissant $2^{j_0} \ge 2N$. *C'est ici qu'on utilise le fait que les filtres sont finis.*

Maintenant, pour établir le Théorème 3, il suffira de démontrer la proposition suivante

Proposition 1. *Pour tous $j \ge j_0$ et $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $A_{j,\varepsilon}$ de $\mathcal{I}$, composée d'intervalles deux à deux disjoints, telle que, pour tout $x \in H^{(j)}$, on ait*

$$\Big\| x - \sum_{I\in A_{j,\varepsilon}} \langle x, \zeta_I\rangle\, \zeta_I \Big\| \le \varepsilon\, \|x\|\,,$$

où l'on a posé

$$\zeta_I = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)^2\Big)^{-1/2} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)\, e_{k,I}\Big)\,.$$

Nous prouverons la Proposition 1 au Paragraphe 3. Vérifions auparavant que cette proposition implique bien le Théorème 3.

On suppose donc la Proposition 1 vraie, et on considère T tel que (pour tout $I \in \mathcal{I}$) $T \circ \pi_I = \pi_I \circ T$. T laisse stable les espaces H_I, et on a toujours, par construction, $\zeta_I \in H_I$.

Par conséquent, si I, I' sont deux intervalles distincts (donc disjoints) de $A_{j,\varepsilon}$, on a $\langle T\zeta_I\,, \zeta_{I'}\rangle = 0$.

On pose maintenant $T_j = \sum_{I\in A_{j,1/j}} \lambda_I \pi_I$, avec $\lambda_I = \langle T\zeta_I, \zeta_I\rangle$. On a bien sûr $\|T_j\| \le \|T\|$, et pour $j \ge j_0$, $f, g \in H^{(j)}$, on écrit

$$\begin{aligned}
&|\langle Tf, g\rangle - \langle T_j f, g\rangle| \\
&\quad\le \Big|\langle Tf, g\rangle - \Big\langle T\Big(\sum_{I\in A_{j,1/j}} \langle\zeta_I, f\rangle\, \zeta_I\Big), \sum_{I\in A_{j,1/j}} \langle\zeta_I, g\rangle\, \zeta_I\Big\rangle\Big| \\
&\quad\quad + \Big|\langle T_j f, g\rangle - \Big\langle T_j\Big(\sum_{I\in A_{j,1/j}} \langle\zeta_I, f\rangle\, \zeta_I\Big), \sum_{I\in A_{j,1/j}} \langle\zeta_I, g\rangle\, \zeta_I\Big\rangle\Big| \\
&\quad\le \frac{4\,\|T\|}{j}\, \|f\|\, \|g\|\,.
\end{aligned}$$

L'union des $H^{(j)}$ étant dense dans H, la Proposition 1 implique donc bien le Théorème 3.

3. Preuve de la Proposition 1.

Une idée "naïve" pour construire l'isomorphisme J, serait d'associer à tout vecteur de base e_k la fonction $e^{ik\theta} \in L^2((0,2\pi),\mathbb{C})$.

On obtient ainsi un isomorphisme

$$U : H_{\mathbb{C}} = \overline{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\, e_k} \longrightarrow L^2\big((0,2\pi),\mathbb{C}\big)\ .$$

Les $e_{k,I}$ deviennent $2^{j/2}\, e^{ik2^j\theta}\, m_I(\theta)$, avec

$$m_I(\theta) = m_{\varepsilon_1}(\theta)\, m_{\varepsilon_2}(2\theta)\cdots m_{\varepsilon_j}(2^{j-1}\theta)\,,$$

et

$$I = \left[\frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_j}{2^j}\,,\ \frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_j}{2^j} + \frac{1}{2^j}\right]\ .$$

L'espace $H^{(j)}$ devient l'espace des polynômes trigonométriques à coefficients réels $\sum_{-2^{j-1}<k\leq 2^{j-1}} c_k\, e^{ik\theta}$.

Malheureusement, la réalisation U de l'espace H ainsi obtenue diffère beaucoup de l'isomorphisme J cherché. Tout d'abord, les espaces naturels de départ et d'arrivée de U sont complexes, ceux de J sont réels. Mais surtout, les espaces $U(H_I)$ ne sont pas constitués de fonctions supportées par I. Cela vient du fait que m_I *n'est pas* la fonction indicatrice de I.

Ceci, outre le fait, déjà mentionné au Paragraphe 1, que les mesures $d\sigma$ sont souvent singulières, nous indique que J *a peu de parenté avec la transformée de Fourier.* Cependant, l'isomorphisme U va nous être très utile dans la démonstration de la Proposition 1.

Nous utiliserons en fait la réalisation relative U_J consistant à associer, pour $J \in \mathcal{I}$ fixé, $e^{ik\theta}$ au vecteur $e_{k,J}$.

On aura alors $U_J(e_{k,I}) = e^{ik2^{\tilde{j}}\theta}\, m_{\tilde{I}}(\theta)\, 2^{\tilde{j}/2}$, pour $I \subset J$, $\tilde{I}$ et $\tilde{j} = |\tilde{I}|$ étant définis par $I = \alpha\tilde{I} + \beta$, α et β étant tels que $J = \alpha[0,1] + \beta$.

Nous démontrons d'abord le

Lemme 1. *Si $x \in H_J^{(j)}$, et si l'on pose $U_J(x) = f(\theta)$, et $U_J \circ \pi_I(x) = f_I(\theta)$ pour*

$$\begin{cases} |I| = 2^{-j}|J|, \\ I \subset J, \end{cases}$$

alors

$$f(\theta) = \sum_{\substack{I \subset J \\ |I|=2^{-j}|J|}} 2^{j/2} M_{\tilde{I}}(\theta) f_I(\theta 2^j)$$

et l'on a $\|x\|^2 = \sum |f_I(0)|^2$.

PREUVE. Puisque $f \in \mathcal{P}^{(j)}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta \;=\; 2^{-j} \sum_{0 \leq k < 2^j} |f(2k\pi \, 2^{-j})|^2 \, .$$

Maintenant, nous remarquons que la théorie des filtres QMF peut s'appliquer en considérant le sous-groupe discret $\mathcal{U}^{(j)}$ des racines 2^j-ièmes de l'unité, au lieu du groupe $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Ainsi, le fait que la matrice

$$\begin{pmatrix} m_0(\theta) & m_1(\theta) \\ m_0(\theta+\pi) & m_1(\theta+\pi) \end{pmatrix}$$

soit unitaire pour $e^{i\theta} \in \mathcal{U}^{(j)}$ entraîne que

$$2^{-j} \sum_{0 \leq k < 2^j} |f(2k\pi \, 2^{-j})|^2 \;=\; \sum_{|I|=2^{-j}|J|} |f_I(0)|^2 \, .$$

Cette égalité est la version discrétisée de la formule

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \, d\theta \;=\; \sum_{|I|=2^{-j}|J|} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_I(2^j\theta)|^2 \, d\theta \, .$$

Le Lemme 1 est donc démontré.

Le Lemme 1 nous fournit un isomorphisme isométrique

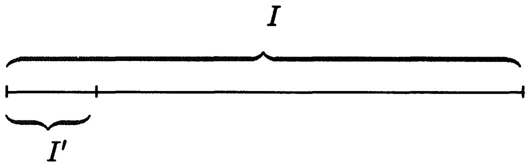
$$\begin{aligned} b_J^{(j)} : H_J^{(i)} &\to \mathbb{R}^{2^j} \\ x &\mapsto (\xi_I)_{\{I \subset J : \, |I|=2^{-j}|J|\}} \end{aligned}$$

avec

$$\xi_I = f_I(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_{k,I} \rangle \,.$$

Pour relier cet isomorphisme à l'approximation cherchée de la Proposition 1, nous démontrons le

Lemme 2. *On considère un intervalle dyadique $I \subset [0,1]$, de longueur 2^{-m}. On désigne par $I' \subset I$ l'intervalle dyadique de longueur 2^{-n_0-m} inclus dans I, et situé le plus à gauche possible dans I.*



On pose $\alpha = \left(\sum \varphi(k)^2\right)^{1/2}$, et on reprend les vecteurs $\zeta_{I'}$ définis dans la Proposition 1. *Alors, pour tout $x \in H_I^{(j)}$ avec $j \geq j_0$, on a*

$$\left\| \pi_{I'}(x) - \alpha\, 2^{-n_0/2} \Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle x, e_{k,I} \rangle \Big) \zeta_{I'} \right\| \leq \eta(j, n_0)\, 2^{-n_0/2}\, \|x\| \,,$$

où, pour tout j fixé, $\lim_{n_0 \to +\infty} \eta(j, n_0) = 0$, et où $\eta(j, n_0)$ ne dépend pas de J, ni de m.

Avant de démontrer le Lemme 2, observons que le facteur de normalisation $2^{-n_0/2}$ est naturel, puisqu'il exprime la répartition moyenne de l'énergie $\|x\|^2$ entre les 2^{n_0} sous-intervalles dyadiques de I de longueur $2^{-n_0}|I|$. Quant au coefficient α, il peut, s'il est différent de 1, fausser cette répartition. Cet argument sera développé dans un prochain article, et donnera des critères permettant d'affirmer qu'une mesure $d\sigma$ trouvée par le Théorème 1 ou 2 est singulière.

Démonstration du Lemme 2. Le fait que les filtres sont finis sera fondamental ici.

On va travailler avec la réalisation U_I. On identifie donc

$$x = \sum_{2^{j-1} < q \leq 2^j} \alpha_q \, e_{q,I}$$

à $f(\theta) = \sum \alpha_q \, e^{iq\theta}$.

Dans cette réalisation, $e_{q,I'}$ devient

$$2^{n_0/2}\, e^{ik2^{n_0}\theta}\, m_0(\theta)\cdots m_0\big(2^{n_0-1}\theta\big) \;=\; 2^{-n_0/2}\, G_{n_0,k}(\theta)\,.$$

On remarque alors que

$$G_{n_0,k}(\theta) \underset{n_0\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi\,\varphi(k) \sum_{l\in\mathbf{Z}} \delta(\theta-2\pi l)\,,$$

où la convergence se fait au sens des distributions 2π-périodiques, pour k fixé.

Dans notre réalisation, $\pi_{I'}(x)$ est devenu

$$2^{-n_0} \sum_{-2^{j-1}<k\leq 2^{j-1}} \langle f, G_{n_0,k}\rangle\, G_{n_0,k}\,,$$

où le crochet $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le crochet de dualité entre fonctions C^∞, 2π-périodiques et distributions 2π-périodiques.

Par ailleurs, $\zeta_{I'}$ est devenu

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{-2^{j-1}<k\leq 2^{j-1}} \varphi(k)\, 2^{-n_0/2}\, G_{n_0,k}\,.$$

Il est alors immédiat de calculer

$$\big\|\pi_{I'}(x) - \alpha\, 2^{-n_0/2} f(0)\, \zeta_{I'}\big\|^2 = \sum_{k=-2^{j-1}+1}^{2^{j-1}} 2^{-n_0} \big|\langle f, G_{n_0,k}\rangle - f(0)\,\varphi(k)\big|^2\,.$$

Pour terminer la preuve du Lemme 2, on remarque que, pour j fixé, et $x\in H_I^{(j)}$, $\|x\|\leq 1$, f est un polynôme de $\mathcal{P}^{(j)}$, avec $\|f\|\leq 1$: l'ensemble de ces polynômes est un compact dans $C^\infty(0,2\pi)$, d'où la convergence

$$\langle f, G_{n_0,k}\rangle \underset{n_0\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)\,\varphi(k)$$

uniforme sur cet ensemble. On peut donc construire $\eta(j,n_0)$ vérifiant les conclusions du Lemme 2.

Enonçons maintenant un corollaire évident des lemmes 1 et 2.

Corollaire. *Avec les notations du Lemme 2, on a*

$$\left\|\pi_{I'}(x) - \langle x, \zeta_{I'}\rangle \zeta_{I'}\right\| \;\leq\; \eta\, 2^{-n_0/2}\, \|\pi_I(x)\|\,,$$

pour tout $x \in H^{(j)}$. De plus,

$$\sum_{|I|=2^{-j}} \|\pi_{I'}(x)\|^2 \;\geq\; c\, 2^{-n_0}\, \|x\|^2\,,$$

où $c > 0$ est une constante indépendante de j, ε.

La première inégalité résulte du Lemme 2, la deuxième résulte du Lemme 1 combiné au Lemme 2. (On peut choisir par exemple $c = \alpha^2/2$).

Ce corollaire nous montre qu'on peut "manger" une partie de x, de norme $2^{-n_0/2}\sqrt{c}\,\|x\|$, approximer cette partie avec la précision $\eta\, 2^{-n_0/2}\|x\|$, par un vecteur de type $\sum\langle x, \zeta_I\rangle\zeta_I$. On est alors tenté d'appliquer de nouveau ce procédé à la partie restante, et d'arriver finalement à approximer x tout entier, par itérations.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1 PAR ITÉRATIONS. On définit trois suites E_m, F_m, G_m d'intervalles dyadiques, par récurrence,

$E_0 = [0,1]$, F_0 est l'ensemble des 2^j intervalles dyadiques de type $\left[k/2^j\,,\,(k+1)/2^j\right] = J$,

G_0 est l'ensemble des 2^j intervalles de type $\left[k/2^j\,,\,(k+2^{-n_0})/2^j\right] = J'$ associés aux intervalles J.

Supposons maintenant E_m, F_m, G_m construits, et que G_m est constitué d'intervalles J' associés aux intervalles J de F_m (c'est-à-dire que $J' \subset J$, $|J'| = 2^{-n_0}|J|$, et J' le plus à gauche possible).

On décompose alors chaque intervalle $J \setminus J'$ en n_0 intervalles dyadiques. On appelle E_{m+1} la collection des intervalles dyadiques ainsi obtenus; on subdivise chaque intervalle de E_{m+1} en 2^j intervalles dyadiques égaux, et on obtient la collection F_{m+1}; enfin, la collection G_{m+1} est constituée des intervalles J' associés aux intervalles J de F_{m+1}.

Il résulte de cette construction que la famille $\bigcup_{m\geq 0} G_m$ est constituée d'intervalles dyadiques deux à deux disjoints. On va poser $A_{j,\varepsilon} = \bigcup_{m=0}^{m_0} G_m$, pour m_0 bien choisi.

On peut écrire

$$\begin{cases} x &= x_0 + y_1 \,, \\ y_1 &= x_1 + y_2 \,, \\ \quad \vdots & \\ y_{m_0} &= x_{m_0} + y_{(m_0+1)} \,, \end{cases}$$

où $x_m = \sum_{J' \in G_m} \pi_{J'}(x)$ et $y_m = \sum_{I \in E_m} \pi_I(x)$.

D'après le Corollaire, on a $\|x_m\|^2 \geq c\,2^{-n_0}\|y_m\|^2$. Par ailleurs, on a $\|y_{m+1}\|^2 = \|y_m\|^2 - \|x_m\|^2$. Donc, par récurrence, $\|y_m\|^2 \leq (1 - c\,2^{-n_0})^m \|x\|^2$.

On peut donc écrire $x = x_0 + \cdots + x_{m_0} + \text{Reste}$, avec

$$\|\text{Reste}\|^2 \leq (1 - c\,2^{-n_0})^{m_0+1} \|x\|^2 \,.$$

Maintenant, on applique la première partie du Corollaire à chaque y_m, ce qui permet d'écrire

$$\|\pi_{I'}(y_m) - \langle y_m, \zeta_{I'} \rangle\, \zeta_{I'}\| \leq \eta(j, n_0)\, 2^{-n_0/2}\, \|\pi_I(y_m)\| \,,$$

pour chaque $I \in F_m$.

Cette inégalité entraîne, par orthogonalité des H_I,

$$\begin{aligned} \Big\|x_m - \sum_{I' \in G_m} \langle x, \zeta_{I'} \rangle \zeta_{I'}\Big\| &\leq \eta(j, n_0)\, 2^{-n_0/2}\, \|y_m\| \\ &\leq \frac{\eta(j, n_0)}{\sqrt{c}}\, \|x_m\| \,. \end{aligned}$$

Comme ces erreurs sont localisées dans les espaces $\bigoplus_{J' \in G_m} H_{J'}$, deux à deux orthogonaux pour deux valeurs de m distinctes, et orthogonaux au Reste, on a

$$\begin{aligned} &\Big\|x_m - \sum_{I' \in \cup_{m=0}^{m_0} G_m} \langle x, \zeta_{I'} \rangle\, \zeta_{I'}\Big\|^2 \\ &\qquad\qquad \leq \left(\frac{\eta(j, n_0)^2}{c} + (1 - c\,2^{-n_0})^{m_0+1}\right) \|x\|^2 \,. \end{aligned}$$

On conclut en prenant n_0 tel que

$$\frac{\eta(j,n_0)^2}{c} \leq \frac{\varepsilon^2}{2},$$

puis en choisissant m_0 tel que $(1-c\,2^{-n_0})^{m_0+1} \leq \varepsilon^2/2$. La Proposition 1 est démontrée, le Théorème principal est donc vrai.

Remerciements. L'auteur remercie Yves Meyer pour l'avoir introduit à ce problème, et pour ses encouragements.

Bibliographie.

[D] Daubechies, I., Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909-996.

[M] Meyer, Y., *Ondelettes et Opérateurs I.* Hermann, 1990.

[CMW] Coifman, R. R., Meyer Y. et Wickerhauser, V. M., Size properties of wavelet packets, dans *Wavelets and their applications*, ed. par Beylkin, etc., Jones and Bartlett (1991), 453-470.

[H] Halmos, P. R., *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity.* Chelsea, 1957.

Recibido: 22 de marzo de 1.993

Eric Séré
CEREMADE
Université Paris-Dauphine
75775 Paris Cedex 16, FRANCE