Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 5, n.^{os} 1 y 2, 1989

Polyèdre Caractéristique et Éclatements Combinatoires

V. Cossart

Introduction

Soient R un anneau local régulier, J un idéal de R et $u = (u_1, \ldots, u_d)$ une suite R/J-régulière. A cette situation, Hironaka [8] attache un polyèdre $\Delta(J; u) \subset \mathbb{R}^d$ dont les côtés renferment des informations cruciales pour la désingularisation de R/J.

Le côté le plus intéressant est le «premier côté», c'est-à-dire celui qui a une équation du type

$$x(1) + \cdots + x(d) = \delta(J; u).$$

En effet, $\delta(J; u)$ est ce qu'on appelle l'exposant caractéristique [8, Introduction].

De plus, à chaque côté de $\Delta(J; u)$, Hironaka attache un gradué. Par exemple, en caractéristique 0, le gradué respectif au «premier côté» contient des informations concernant l'espace tangent strict de l'exposant idéaliste que Hironaka considère dans sa récurrence. En caractéristique p, ce gradué est essentiel ([4] pour la dimension 2 et [3] pour la dimension 3).

D'autres côtés de $\Delta(J; u)$ sont intéressants, ce sont ceux qui ont des équations

$$\lambda(1)x(1) + \cdots + \lambda(d)x(d) = c$$

vérifiant la condition suivante

$$(*) \qquad 0 < \lambda(i) \leqslant c, \qquad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

En effect, on verra en A.6 que, lorsque l'on effectue une suite d'éclatements permis, c'est parmi ces côtés que l'on trouvera les informations quant aux «premiers côtés» des points proches combinatoires.

Nous montrons ici que le polyèdre $\Delta(J; u)$ et les gradués associés a ses côtés peuvent être construits en n'utilisant que la seule donnée de $A = R/J$ et de la suite d'idéaux $u_1A, \ldots, u_dA$.

De plus dans B, nous donnons des interprétations géométriques des côtés de $\Delta(J; u)$ satisfaisant à $(*)$ ainsi que de leurs gradués, simplement en considérant des suites *d'éclatements permis* de $\operatorname{Spec} A[t]$. On peut en déduire que les algorithmes de désingularisation définis à l'aide de végétations idéalistes sont indépendants du plongement de la singularité.

Nous avons fait les démonstrations cruciales des sections B, C et D en nous plaçant dans le cas de la caractéristique 0, car on peut utiliser les résultats de [1] ce qui simplifie considérablement les calculs, mais les résultats annoncés sont vrais en toute généralité.

On peut noter que l'idée utilisée ici, qui est d'étudier une déformation équisingulière de la singularité est classique ([10] Appendice de B. Teissier, [7] où Hironaka utilise de telles déformations pour étudier l'exposant de contact).

A. VALUATION SUR UN ANNEAU LOCAL RÉGULIER

A.1. Décomposition barycentrique

Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{R}^q$ notée

$$(1)\quad L(x(1), \ldots, x(q)) = a(1)x(1) + \cdots + a(q)x(q), \quad a(i) \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leqslant i \leqslant q.$$

Soit $l(L)$ le cardinal de l'ensemble des valeurs prises par les $a(i)$. En général, on écrira l au lieu de $l(L)$. On définit par récurrence une famille décroissante de parties I_k, $1 \leqslant k \leqslant l(L)$ de $\{1, \ldots, q\}$ affectées d'un poids $m(k)$ par

$$(2)\quad \begin{aligned} I_1 &= \{1, \ldots, q\}, & m(1) &= \inf\{a(i) : 1 \leqslant i \leqslant q\}, \\ I_k &= \{i \in I_1 : a(i) > m(k-1)\}, & m(k) &= \inf\{a(i) : i \in I_k\}, \end{aligned}$$

$1 \leqslant k \leqslant l(L)$.

On pose alors

$$(3)\quad \begin{aligned} b(1) &= m(1), \\ b(k) &= m(k) - m(k-1), \qquad 2 \leqslant k \leqslant l, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$L(x(1), \ldots, x(q)) = \sum_{1 \leq k \leq l} b(k)\Big(\sum_{i \in I_k} x(i)\Big).$$

Désormais, pour simplifier, nous supposons que l'indexation est choisie de façon que

$$(4) \qquad 1 \leqslant a(1) \leqslant a(2) \leqslant \cdots \leqslant a(q).$$

On a donc

$$(5) \quad L(x(1), \ldots, x(q)) = b(1)(x(1) + \cdots + x(q)) + b(2)(x_{(\alpha(2))} + \cdots + x_{(q)}) + \cdots + b(l)(x_{(\alpha(l))} + \cdots + x_{(q)})$$

où

$$I_k = (\alpha(k), \ldots, q), \qquad 1 \leqslant k \leqslant l,$$

et

$$\begin{gathered} b(1) = a(1) \\ b(1) + b(2) = a(\alpha(2)) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b(1) + b(2) + \cdots + b(l) = a(\alpha(l)) = a(q). \end{gathered}$$

En un mot, $b(i)$ est la i-ème composante non nulle de L sur la base $(x(1) + \cdots + x(q), x(2) + \cdots + x(q), \ldots, x(q))$ de $\mathbb{Z}^{q*}$.

A.2. Valuations combinatoires

Soit R un anneau local régulier, M est son idéal maximal, $s = (s_1, \ldots, s_q)$ est un système régulier de paramètres (s.r.p.), $q = \dim R$, L est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^q$ qui satisfait aux conditions A.1. (1)(4).

Alors (L, s) définit une valuation $v_{L,s}$ sur R par

$$(1) \qquad v_{L,s}(\lambda s_1^{x(1)} \cdots s_q^{x(q)}) = L(x(1), \ldots, x(q))$$

où $\lambda \in R \backslash M$.

On note $gr_{L,s}(R)$ le gradué associé. D'après [8, Section 1], on a

$$(2) \qquad gr_{L,s}(R) = R/M[\mathrm{in}_{L,s}(s_1), \ldots, \mathrm{in}_{L,s}(s_q)].$$

A.3. Arbre combinatoire attaché à L et s

Posons

(1) $$Z(0,0) = \operatorname{Spec} R[t].$$

Soit

(2) $$\mathcal{E} = \{(i,j) : (i,j) = (0,0) \quad \text{ou} \quad 1 \leqslant i \leqslant l, \quad 1 \leqslant j \leqslant b(i)\}.$$

Nous munissons $\mathcal{E}$ de l'ordre lexicographique. Pour tour couple (i,j) de $\mathcal{E}$, on désigne par

(3) $(i,j)_- =$ l'élément de $\mathcal{E}$ qui précède (i,j) pour l'ordre lexicographique,
$(i,j)_+ =$ l'élément de $\mathcal{E}$ qui suit (i,j) pour l'ordre lexicographique,

s'il en existe.

Par exemple, on a

$$(1,1)_- = (0,0) \quad \text{et} \quad (0,0)_+ = (1,1).$$

Posons

(4) $$R(i,j) = R[t, s_1/t^{a(1)}, s_2/t^{a(2)}, \dots, s_{\alpha(i)-1}/t^{a(\alpha(i)-1)}, s_{\alpha(i)}/t^{a(\alpha(i)-1)+j}, \dots, s_q/t^{a(\alpha(i)-1)+j}]$$

et

$$Z(i,j) = \operatorname{Spec} R(i,j).$$

Posons $a(0) = 0$ et considérons l'idéal

(5) $$I((i,j)_-) = (t, s_{\alpha(i)}/t^{a(\alpha(i)-1)+j-1}, \dots, s_q/t^{a(\alpha(i)-1)+j-1})R((i,j)_-),$$

$(i,j) \geqslant (1,1)$.

A.3.1. Alors, $Z(i,j)$ est l'ouvert affine complémentaire du transformé strict de $\operatorname{div}(t)$ dans l'éclaté de $Z((i,j)_-)$ le long de l'idéal $I((i,j)_-)$.

A.3.2. On a donc construit un arbre

$$Z(0,0) \leftarrow Z(1,1) \leftarrow \cdots \leftarrow Z(i,j) \leftarrow \cdots \leftarrow Z(l, b(l))$$

de longueur

$$a(q) = b(1) + b(2) + \cdots + b(l).$$

A.4. Interprétation du gradué associé. Cas d'une seule forme linéaire.

Théorème. *Avec les hypothèses et notations de* A.1, A.2 *et* A.3, *notons* $E(i,j)$ *le diviseur exceptionnel de*

$$Z(0,0) \leftarrow Z(i,j), \qquad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad 1 \leqslant j \leqslant b(i).$$

Alors

(i) $E(i,j)$ *est irréductible dans* $Z(i,j)$, t *est une équation de* $E(i,j)$ *dans* $Z(i,j)$.

(ii) *Pour tout* g *dans* R, *on a*

$$\operatorname{ord}_{\nu(l,b(l))}(g) = v_{L,s}(g),$$

où $\nu(l,b(l))$ *est le point générique de* $E(l,b(l))$.

(iii) *L'application*

$$\operatorname{in}_{L,s}(g) \to t^{-N} g \operatorname{mod}(t)$$

où $N = v_{L,s}(g)$ *définit un isomorphisme entre* $gr_{L,s}(R)$ *et l'anneau de fonctions de* $E(l,b(l))$.

PREUVE. L'assertion (i) découle de A.3.1. Prouvons (ii). Si

$$g = s_1^{x(1)} \cdots s_q^{x(q)},$$

on a

$$g = t^{a(1)x(1) + \cdots + a(q)x(q)}(s_1 t^{-a(1)})^{x(1)} \cdots (s_q t^{-a(q)})^{x(q)}$$

et

$$\begin{aligned} N &= v_{L,s}(g) \\ &= a(1)x(1) + \cdots + a(q)x(q), \end{aligned}$$

on a (ii) en remarquant que

$$\operatorname{ord}_{\nu(l,b(l))}[(s_1 t^{-a(1)})^{x(1)} \cdots (s_q t^{-a(q)})^{x(q)}] = 0.$$

Pour prouver (iii), on remarque que notre application peut être ainsi définie

$$\begin{gathered} R/M[\operatorname{in} s_1, \ldots, \operatorname{in} s_q] \to R[t, st^{-a(1)}, \ldots, s_q t^{-a(q)}]/(t) = R/M[\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_q] \\ \bar{\lambda} \in R/M \to \lambda \operatorname{mod}(t) \\ \operatorname{in}_{L,s}(s_i) \to s_i t^{-a(i)} \operatorname{mod}(t) = \bar{s}_i . \end{gathered}$$

A.5. Interprétation du gradué associé: cas général.

Le théorème A.4 se généralise au cas où R est muni d'une filtration définie par $s = (s_1, \ldots, s_q)$ et une famille de formes linéaires L_i, $i \in I$, I fini,

$L_i(x_1, \ldots, x_q) = a(1,i)x_1 + \cdots + a(q,i)x_q$, $a(j,i) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i \in I$, $1 \leqslant j \leqslant q$,

on pose:

$$\Delta = \{(x_1, \ldots, x_q): L_i(x) \geqslant 1, i \in I\} \neq \emptyset, \qquad \Delta \subset \mathbb{R}^q_+ ,$$

oú

$$\mathbb{R}_+ = \{x \geqslant 0 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Chaque L_i définit un anneau

(1) $$R(L_i) = R[t, s_1/t^{a(1,i)}, \ldots, s_q/t^{a(q,i)}] = R[t, s^A t^{-\alpha}]$$

où $L_i(A) + \alpha \geqslant 0$ qui est l'anneau que nous avons noté $R(l, b(l))$ en A.3 (4).
Posons

(2) $$R(I) = \bigcap_{i \in I} R(L_i).$$

Alors on a

(3) $$R(I) = R[t, s^A t^{-\alpha}] \quad \text{où} \quad L_i(A) + \alpha \geqslant 0, \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

Alors, Δ et s définissent une filtration sur R (*cf.* [8, Section 1]), pour tout $b \in \mathbb{R}^+$, on pose

(4) $$I(\Delta, b)_s = \{g \in R: v_{L_i, s}(g) \geqslant b, i \in I\},$$
$$I^+(\Delta, b)_s = \{g \in R: v_{L_i, s}(g) > b, i \in I\}.$$

On définit

$$gr_{\Delta, s}(R) = \bigoplus_{b \in \mathbb{R}+} I(\Delta, b)_s / I^+(\Delta, b)_s .$$

la composante homogène $I(\Delta, b)_s / I^+(\Delta, b)_s$ n'étant différente de 0 que pour un ensemble discret de réels b qui sont d'ailleurs entiers puisque les L_i sont à coefficients entiers.

Pour tout $g \in R$, on note

(5) $$v_{\Delta, s}(g) = \inf_{i \in I} (v_{L_i, s}(g))$$
$$= \inf \{b: g \in I(\Delta, b)_s\}.$$

Théorème A.5.1.

1. *Soit* $g \in R$ *et soit* $N = v_{\Delta,s}(g)$ *alors* $t^{-N}g \in R(I)$.
2. *L'application* Φ

$$\mathrm{in}_{\Delta,s}(g) \to t^{-N}g \bmod (t), \qquad g \in R, \quad \textit{où} \quad N = v_{\Delta,s}(g)$$

définit un isomorphisme entre $gr_{\Delta,s}(R)$ *et* $R(I)/tR(I)$.

PREUVE. Pour tout L_i, on a $v_{L_i,s}(g) \geqslant N$ donc $t^{-N}g \in R(L_i)$, donc

$$t^{-N}g \in \bigcap_{i \in I} R(L_i) = R(I),$$

ce qui est 1.

Prouvons 2. Soit $g \in R$ avec $v_{\Delta,s}(g) \geqslant N$, $N \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$g = \sum_{A \in N\Delta} \nu_A s^A, \qquad \nu_A \in R$$

et

$$\Phi[cl^N_{\Delta,s}(g)] = \sum \nu_A s^A t^{-N} \bmod (t).$$

On en déduit

$$\Phi[cl^N_{\Delta,s}(g)] = \sum_{A \in N\Delta} \Phi[cl^N_{\Delta,s}(\nu_A s^A)]. \tag{1}$$

De (1) on tire facilement que Φ est un morphisme. Rappelons cependant une difficulté. On a, pour g, g' dans R

$$v_{\Delta,s}(gg') \geqslant v_{\Delta,s}(g) + v_{\Delta,s}(g')$$

avec parfois une inégalité stricte, ce qui implique alors

$$cl^{N+N'}_{\Delta,s}(gg') = 0 = cl^N_{\Delta;s}(g)cl^{N'}_{\Delta,s}(g')$$

où $N = v_{\Delta,s}(g)$, $N' = v_{\Delta,s}(g')$.

Avant de montrer la bijectivité de Φ, montrons le lemme suivant.

Lemme A.5.2.

$$(t^a R(I)) \cap R[t] = \sum_{b \leq a} t^{a-b} I(\Delta, b)_s R[t], \qquad a \in \mathbb{N}, \quad b \in \mathbb{N}.$$

On a $I(\Delta, b)_s R(I) \subset t^b R(I)$, donc l'inclusion du deuxième membre dans le premier est claire. Voyons l'inclusion inverse.

Soit

$$g \in (t^a R(I)) \cap R[t], \qquad g = t^a \sum \nu_A s^A t^{-v(A)}, \quad \nu_A \in R, \quad v(A) = v_{\Delta, s}(s^A).$$

Soit M un entier tel que $M \geqslant v(A)$ pour tout A avec $\nu_A \neq 0$.

$$t^M g = t^a \sum \nu_A s^A t^{M - v(A)}.$$

On a

$$t^M g \in t^M R[t] \cap \sum_A t^{a + M - v(A)} I(\Delta, v(A))_s .$$

En appliquant [8, (2.1)] à $R[t]$ et aux ensembles

$$E_i = \{ (x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{N}^{q+1} : x_0 + L_i(x) \geqslant a + M \}$$

et

$$E = \{ (x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{N}^{a+1} : x_0 \geqslant M \},$$

on a dans $R[t]$

$$t^M g \in I\Big(\bigcap_i E_i \cap E \Big) = \sum_{a - v(A) \geq 0} t^{a + M - v(A)} I(\Delta, \alpha(A))_s .$$

D'où le résultat en divisant par t^M.

A.5.3. Montrons l'injectivité de Φ.

Soit $G \in gr_{\Delta, s}(R)$ avec $\Phi(G) = 0$. On a

$$G = \sum_{i \in N} cl^i_{\Delta, s} \Big(\sum \mu_{A(i)} s^{A(i)} \Big)$$

avec $\mu_{A(i)} \in R$, $v_{\Delta, s}(s^{A(i)}) = i$,

$$\Phi(G) = \sum t^{-i} \Big(\sum \mu_{A(i)} s^{A(i)} \Big) \bmod (t) = 0 \bmod (t).$$

Donc

$$\sum_{i, A(i)} t^{-i} \mu_{A(i)} s^{A(i)} = tg \in tR(I).$$

Soit M un entier tel que $t^M g \in R[t]$ et $M \geqslant i$ pour tout i tels que

$$\sum_{A(i)} \mu_{A(i)} s^{A(i)} \neq 0.$$

On a

$$\sum t^{M - i} \mu_{A(i)} s^{A(i)} \in (t^{M+1} R(I)) \cap R[t].$$

Le lemme nous donne:

$$\sum_{i,A(i)} t^{M-i}\mu_{A(i)}s^{A(i)} = \sum \nu_c s^c t^{M+1-\alpha(c)}$$

où $\nu_c \in R$, $\alpha(c) = v_{\Delta,s}(s^c)$.

Comme $R[t]$ est une algèbre de polynômes, on a, pour tout i

$$\sum_{A(i)} t^{M-i}\mu_{A(i)}s^{A(i)} = \sum_{\alpha(c)=1+i} \nu_c s^c t^{M-i}$$

d'où

$$\sum_{A(i)} \mu_{A(i)}s^{A(i)} = \sum_{\alpha(i)=1+i} \nu_c s^c,$$

donc

$$cl^i_{\Delta,s}\Big(\sum_{A(i)} \mu_{A(i)}s^{A(i)}\Big) = 0, \qquad i \in \mathbb{N},$$

donc $G = 0$.

A.5.4. Montrons la surjectivité.

Soit g dans $R(I)$, cherchons un antécédent à $g \bmod (t)$. Comme $R(I)$ est un $R[t]$-module engendré par les $s^A t^{-v(A)}$ où $v(A) = v_{\Delta,s}(s^A)$, on a

$$g = \sum_{\mu A \in R} \mu_A s^A t^{-v(A)} + tg'$$

On a

$$g \bmod (t) = \sum \Phi(cl^{v(A)}(\mu_A s^A)).$$

A.5.5. Remarquons que, puisque I est fini, Δ est effectif, c'est-à-dire

$$\bigcup_{b \in \mathbb{R}+} b\Delta = \mathbb{R}^{+q} \backslash \{0\},$$

on a

$$(1) \qquad tR(I) = (t, s_1, \ldots, s_q)R(I).$$

C'est-à-dire que

$$\operatorname{div}(t) = f(I)^{-1}(M, t)$$

où $f(I)$ est le morphisme

$$\operatorname{Spec} R(I) \to \operatorname{Spec} R[t],$$

donné par l'inclusion des anneaux.

A.6. Polyèdre caractéristique

Soient R un anneau local régulier d'idéal maximal M et J un idéal non trivial de R. Alors, pour tout s.r.p. de R que l'on note

$$s = (s_1, \ldots, s_q) = (y_1, \ldots, y_r, u_1, \ldots, u_d) = (u, y)$$

et tel que $\mathrm{in}_M(y)$ est l'idéal de la directrice (espace tangent strict) de Spec R/J, Hironaka construit un polyèdre $\Delta(J; u; y) \subset \mathbb{R}^d$, [8]. Ce polyèdre est une projection du nuage de points de certains générateurs de J. Hironaka montre que, quitte à passer au complété $\hat{R}$ de R, on peut choisir $(y_1, \ldots, y_r)$ tel que $\Delta(J; u; y)$ soit minimal pour l'inclusion. On note $\Delta(J; u)$ ce polyèdre minimal et on l'appelle polyèdre caractéristique.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons construire $\Delta(J; u)$ avec la simple donnée de $R/J = A$ et de la suite d'idéaux $(u_1R/J, \ldots, u_dR/J)$. Faisons d'abord la remarque suivante.

A.7. La condition (*) est héréditaire

Avec les notations de A.5, supposons que le fermé

$$Y = V(y_1, \ldots, y_r, u_1, \ldots, u_k), \qquad 1 \leqslant k \leqslant d,$$

est permis pour J et que $\Delta(J; u; y) = \Delta(J; u)$. Effectuons l'éclatement centré en Y et plaçons nous à l'origine d'un des ouverts affines de l'éclaté. Posons par exemple

$$y_i = u_1 y'_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r; \qquad u_j = u_1 u'_j, \quad 2 \leqslant j \leqslant k,$$
$$u'_l = u_l, \quad k+1 \leqslant l \leqslant d; \qquad u_1 = u'_1.$$

Notons J' le transformé strict de J. Un calcul classique montre que le polyèdre $\Delta(J'; u')$ est obtenu à partir de $\Delta(J; u)$ en effectuant la transformation affine

$$(x(1), \ldots, x(d)) \to (x(1) + \cdots + x(k) - 1, x(2), \ldots, x(d))$$

et en prenant le monoidéal convexe engendré dans $\mathbb{R}^d_+$. Soit

$$\lambda(1)x(1) + \cdots + \lambda(d)x(d) = c$$

l'équation d'un côté de $\Delta(J'; u')$, ce côté est le transformé affine du côté de $\Delta(J; u)$ d'équation

$$\lambda(1)(x(1) + \cdots + x(k) - 1) + \cdots + \lambda(d)x(d) = c,$$

ce qui peut s'écrire:

$$\lambda(1)x(1) + (\lambda(1) + \lambda(2))x(2) + \cdots + (\lambda(1) + \lambda(k))x(k) + \cdots + \lambda(d)x(d) = c + \lambda(1).$$

On vérifie que, si on a $(*)$ pour le côté de $\Delta(J', u')$, c'est-à-dire

$$(*) \qquad 0 < \lambda(i) \leqslant c, \qquad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

alors on a $(*)$ pour le côté de $\Delta(J; u)$ dont il est le transformé.

Comme le «premier côté» de $\Delta(J'; u')$ vérifie $(*)$, on déduit de cette remarque que, dans une suite d'éclatements combinatoires (*i.e.* en restant aux origines des ouverts affines des éclatés, sans effectuer de translations sur les variables), les premiers côtés des polyèdres associés sont des transformés affines de certains côtés de $\Delta(J; u; y)$ satisfaisant à $(*)$.

B. COTÉS SATISFAISANT À $(*)$

B.1. Modifications attachées à un diviseur pondéré

B.1.1. Soit A un anneau local noethérien (qu'on ne suppose pas régulier) d'idéal maximal $\mathfrak{M}$; soient $v_1A, \ldots, v_dA$ des idéaux monogènes de A tels que,

$$(1) \qquad v_i \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^2$$

et, en posant

$$V_i = cl^1_{\mathfrak{M}}(v_i),$$

$k[V_1, \ldots, V_d]$ est l'anneau de la directrice du cône tangent de Spec A.

Soit Λ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$

$$(2) \qquad \Lambda(x(1), \ldots, x(d)) = \lambda(1)x(1) + \cdots + \lambda(d)x(d),$$

$0 < \lambda(i)$, $\lambda(i) \in \mathbb{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant d$.

Soit N un entier strictement positif multiple du dénominateur commun des $\lambda(i)$. Pour plus de commodité, on posera

$$(3) \qquad a(i) = N\lambda(i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Les v_i définissent un diviseur $V(v_1, \ldots, v_d)$ de Spec A et l'on a des poids $a(1), \ldots, a(d)$ pour chaque composante.

Etant donné (A, v, Λ, N), nous allons définir et étudier un arbre $X(i,j)$ sur $X(0,0) = \operatorname{Spec} A[t]$, la hauteur de l'arbre sera notée $L(A, v, \Lambda, N)$ ou plus simplement $l(\Lambda, N)$.

Dans un cas extrême, nous pourrons avoir

$$l(\Lambda, N) = \infty.$$

B.1.2. Effectuons la décomposition barycentrique de $N\Lambda$ et reprenons les notations de A.1. c'est-à-dire

$$\begin{aligned}(1)\quad N\Lambda(x(1),\ldots,x(d)) &= a(1)x(1) + \cdots + a(d)x(d)\\ &= b(1)(x(1) + \cdots + x(d)) + b(2)(x(\alpha(2)) + \cdots\\ &\quad + x(d)) + \cdots + b(l)(x(\alpha(l)) + \cdots + x(d)).\end{aligned}$$

Donc $b(i)$ est la i-ème composante non nulle de $N\Lambda$ sur la base

$$(x(1) + \cdots + x(d), x(2) + \cdots + x(d), \ldots, x(d))$$

de $\mathbb{Z}^*$, l est le nombre de composantes non nulles.

On pose, comme plus haut

$$(2)\qquad I_i = \{k : k \geqslant \alpha(i)\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant l,$$

et

$$(3)\qquad \begin{gathered} I_{l+1} = \varnothing \\ b(l+1) = +\infty. \end{gathered}$$

Soit

$$(4)\quad \mathcal{E}(\Lambda, N, \infty) = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : (i,j) = (0,0) \text{ ou } 1 \leqslant i \leqslant l+1,\ 1 \leqslant j \geqslant b(i)\}.$$

On munit $\mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$ de l'ordre lexicographique.

La suite $X(i,j)$ d'éclatements modifiés que nous allons construire est indexée par le segment $\mathcal{E}(A, v, \Lambda, N)$ de $\mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$ d'origine $(0,0)$ et de longueur $l(\Lambda, N)$, ce qui fait $l(\Lambda, N) + 1$ indices si on compte $(0,0)$.

Pour tout (i,j) de $\mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$, on note $(i,j)_-$ le couple qui le précède et $(i,j)_+$ celui que le suit pour l'ordre lexicographique. Par exemple, on a

$$(1,1)_- = (0,0) \quad \text{et} \quad (0,0)_+ = (1,1).$$

B.1.3. La récurrence. Pour tout (i,j) de $\mathcal{E}(\Lambda, N)$, nous allons définir un heptuplet

$$(1)\qquad H(i,j) = (\tilde{X}(i,j), X(i,j), E(i,j), V(i,j), T(i,j), D(i,j), x(i,j))$$

où

$\tilde{X}(i,j)$ est un schéma ou un espace analytique complexe,

$X(i,j)$ est un ouvert affine de $\tilde{X}(i,j)$,

$E(i,j)$ est un diviseur de $X(i,j)$,

$V_.(i,j)$ est un drapeau, c'est-à-dire une suite croissante de sous-schémas fermés de $X(i,j)$ notée

$$V_1(i,j) \subset V_2(i,j) \subset \cdots \subset V_l(i,j) \subset V_{l+1}(i,j) = X(i,j),$$

$T(i,j)$ est un fermé vide ou irréductible de $E(i,j)$, on notera $\eta(i,j)$ le point générique de $T(i,j)$ si $T(i,j) \neq \emptyset$,

$D(i,j)$ est une courbe irréductible de $X(i,j)$,

$x(i,j)$ est un point fermé de $D(i,j)$.

Pour $(i,j) = (0,0)$, on pose

(2)
$$\begin{aligned}
X(0,0) &= \tilde{X}(0,0) = \operatorname{Spec} A[t],\\
E(0,0) &= V(t),\\
V_0(0,0) &= V(\mathfrak{M}, t),\\
V_k(0,0) &= V(v_i A[t], i \in I_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant l \quad (\textit{cf.}\ \text{B.1.2(2)}),\\
V_{l+1}(0,0) &= X(0,0),\\
T(0,0) &= V(tA[t], v_i A[t], 1 \leqslant i \leqslant d),\\
D(0,0) &= V(\mathfrak{M}A[t]),
\end{aligned}$$

$x(0,0)$ est le point fermé correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{M} + t$.

Remarquons que par construction chaque $E(i,j)$ pour $(i,j) > (0,0)$ se trouve être un schéma affine sur le corps résiduel $A/\mathfrak{M}$, ce qui nous autorise à parler de point générique pour un fermé irréductible de $E(i,j)$, même dans le cas analytique complexe.

Etant donné $H(i,j)$, définissons un test $OC(i,j)$ (OC signifie: on continue...), qui nous indique si (i,j) est le dernier indice pour lequel $H(i,j)$ est défini ou bien si $H((i,j)_+)$ existe; dans le premier cas on aura $OC(i,j) = F$ (on ne continue pas), dans le deuxième cas, on aura $OC(i,j) = V$ (on continue).

On pose, pour $(i,j) \neq (0,0)$

(3)
$$Y(i,j) = T(i,j) \cap V_{a(i,j)}(i,j), \qquad 1 \leqslant i \leqslant l+1.$$

où

$$\begin{aligned}
a(i,j) &= i \quad \text{si} \quad j \leqslant b(i) - 1,\\
a(i,j) &= i+1 \quad \text{si} \quad j = b(i).
\end{aligned}$$

Si $x(i,j) \notin T(i,j)$ ou si $Y(i,j)$ n'est pas permis pour $X(i,j)$ en $x(i,j)$ ou si $Y(i,j)$ est vide, ou si $Y(i,j)$ n'est pas irréductible, alors $OC(i,j) = F$. Sinon $OC(i,j) = V$.

Nous verrons plus tard qu'en fait $Y(i,j)$ est toujours irréductible (B.2.7.3.).

Pour $(i,j) = (0,0)$, posons

$$Y(0,0) = \{x(0,0)\} \tag{4}$$

et alors $OC(0,0) = V$.

Supposons $OC(i,j) = V$ et construisons $H((i,j)_+)$. On note

$$\tilde{\pi}(i,j) = \tilde{X}((i,j)_+) \to X(i,j) \tag{5}$$

l'éclatement de $X(i,j)$ le long de $Y(i,j)$.

On définit $X((i,j)_+)$ comme l'ouvert affine de $\tilde{X}((i,j)_+)$ complémentaire du transformé strict de $E(i,j)$ et on note

$$\pi(i,j) \colon X((i,j)_+) \to X(i,j)$$

la restriction de $\tilde{\pi}(i,j)$ à $X((i,j)_+)$.

Bien sûr, $E((i,j)_+)$ est le diviseur exceptionnel de $\pi(i,j)$, c'est-à-dire

$$E((i,j)_+) = \pi(i,j)^{-1}(Y(i,j)).$$

Pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant l+1$, $V_k((i,j)_+)$ est le transformé strict de $V_k(i,j)$. On a donc bien

$$V_{l+1}((i,j)_+) = X((i,j)_+),$$

on remarque que, pour $(i,j) \geqslant (1,1)$, on a $V_0(i,j) = \varnothing$.

Désignons par $\epsilon(i,j)$ le point générique de $Y(i,j)$. Alors $\tilde{\pi}(i,j)^{-1}(\epsilon(i,j))$ est canoniquement isomorphe à Proj $C_{\epsilon(i,j)}(X(i,j))$. Notons $\Gamma(i,j)$ la directrice de $C_{\epsilon(i,j)}(X(i,j))$, soit $\eta((i,j)_+)$ le point générique du fermé de $\pi(i,j)^{-1}(\epsilon(i,j))$ qui correspond au point générique de $\mathrm{Proj}_{\epsilon(i,j)}\Gamma(i,j)$ par l'isomorphisme canonique.

Si $\eta((i,j)_+) \notin X((i,j)_+)$, on pose $T((i,j)_+) = \varnothing$, sinon

$$T(i,j) = \{\overline{\eta(i,j)_+}\} \subset X(i,j)_+.$$

$D((i,j)_+)$ est le transformé strict de $D(i,j)$ et $x((i,j)_+)$ est le point fermé de $D((i,j)_+)$ au dessus de $x(i,j)$. (On verra en B.2 que $D(i,j)$ est transverse à $Y(i,j)$ en $x(i,j)$ et donc que $x((i,j)_+)$ est bien défini).

B.1.4. Remarquons qu'on a toujours

$$V_{l+1}(i,j) = X(i,j)$$

et donc, pour $l + 1 \leqslant i$, on a

$$Y(l+1,j) = T(l+1,j) \qquad 1 \leqslant j,$$

bien sûr, ceci sous réserve que $H(l+1,j)$ existe.

B.2. Explicitation

B.2.1. Nous nous plaçons dans le cas où $A = R/J$, R anneau local régulier, soit $u = (u_1, \ldots, u_d)$ un relèvement de $v = (v_1, \ldots, v_d)$ (*cf.* B.1.1.). Le théorème B.2.2. énoncé ci-dessous est alors vrai sans autre hypothèse. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où

$$R = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_r, u_1, \ldots, u_d\} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_r, u_1, \ldots, u_d]].$$

Par [7, Ch. I (6.4)(6.5)(6.6.1)], on peut trouver

$$y = (y_1, \ldots, y_d) \quad \text{et} \quad f = (f_1, \ldots, f_m)$$

tels que (f, u, y) est une donnée distinguée pour R, J et de plus

(1) $$W = V(y_1, \ldots, y_r)$$

contient la strate de Samuel relative à $\mathbb{C}\{u_1, \ldots, u_d\} \hookrightarrow R$ (*cf.* [6, (2.1)])

(2) $$\Delta(J; u; y) = \Delta(J; u) \quad (\textit{cf.}\ [1,\ \text{p. } 18])$$

et même

(3) $$\Delta(J; u) = \Delta(f; u; y) \quad (\textit{cf.}\ [1,\ \text{lemme } 3]).$$

Théorème B.2.2. *Reprenons les hypothèses et notations de* B.1. *Soit* $a \in \mathbb{Q}^+ \cup \{\infty\}$ *donné par*

(1) $$\Lambda[\Delta(J; u)] = [a, +\infty[.$$

1. *On a les équivalences*

$$a \geqslant \sup\{\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ *avec* $N\lambda(i) \in \mathbb{N}$ *et*

$$l(A, v, \Lambda, N) \geqslant \sup\{N\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

si et seulement si pour tout $N \in \mathbb{N}$ *avec* $N\lambda(I) \in \mathbb{N}$ *on a*

$$l(A, v, \Lambda, N) \geqslant \sup\{N\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

2. *Si*

$$a \geqslant \sup\{\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

alors

(*a*) $l(A, v, \Lambda, N) = \lfloor Na \rfloor$ (*en posant* $\infty = \lfloor \infty \rfloor$),

(*b*) $a = \lim_{N \to \infty} N^{-1} l(A, v, \Lambda, N)$,

(*c*) *Pour* $(i, j) \leqslant (l, b(l))$ *l'algorithme de* B.1.3. *défini par* (A, v, Λ, N) *est la restriction à* $X(0,0) = \operatorname{Spec}(R[t]/J)$ *et à ses transformés stricts* $X(i,j)$ *de la suite d'éclatements combinatoires définis en* A.3. *pour* $Z(0,0) = \operatorname{Spec} R[t]$,

$$s = (u, y),$$
$$a(i) = N\lambda(I), \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$
$$a(j) = N, \qquad d + 1 \leqslant j \leqslant q = r + d,$$

(*d*) *Fixons N, posons*

$$(\alpha, \beta) = \sup(\mathcal{E}(A, v, \Lambda, N)),$$

$\Lambda' = (N/\lfloor Na \rfloor)\Lambda$ *forme linéaire sur* $\mathbb{R}^d$, *alors pour tout* $y \in A = R/J$, *on a*

$$v_{\Lambda', u, y}(g) = \sup\{M/\lfloor Na \rfloor : t^{-M} g \in \Gamma(X(\alpha, \beta))\}$$

ou $\Gamma(X(\alpha, \beta))$ *est l'anneau de fonctions de* $X(\alpha, \beta)$. *De plus, l'application de* $gr_{\Lambda', u, y}(A)$ *vers l'anneau de fonctions de* $E(\alpha, \beta)$ *donné par* $\mathrm{in}_{\Lambda', u, y}(g) \to t^{-M} g$ *est un isomorphisme d'anneaux.*

B.2.3. Rappelons que si Λ' est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients strictement positifs, (u, y) étant fixé, on définit

$$v_{\Lambda', u, y}(u^D y^E) = |E| + \Lambda'(D).$$

Montrons que B.2.2.2.*d* est une conséquence des autres résultats su théorème B.2.2.

Puisque $a \geqslant \sup\{\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$, par B.2.2.1., on a

$$\Lambda'(D) + |E| = \lfloor Na \rfloor^{-1}(N\Lambda(D) + N|E|) = \lfloor Na \rfloor^{-1} L(\alpha, \beta)(D, E)$$

où $L(\alpha, \beta)$ est le forme linéaire sur $\mathbb{R}^{d+r}$ de coefficients

$$a(i) = N\lambda(i), \quad 1 \leqslant i \leqslant d; \qquad a(j) = N, \quad d + 1 \leqslant j \leqslant q = r + d.$$

Alors B.2.2.c et A.4 appliqués avec $L = L(\alpha, \beta)$ et $s = (u, y)$ nous donnent B.2.2.*d*.

B.2.4. Pour montrer les autres assertions de B.2.2., nous avons besoin de quelques notations.

Pour tout (i,j), $1 \leqslant i \leqslant l+1$, $1 \leqslant j \leqslant b(i)$ (*cf.* B.1.2), on note $L(i,j,\Lambda,N)$ ou plus simplement $L(i,j)$ la forme linéaire

$$(1) \qquad \begin{aligned} L(i,j)(x(1),\ldots,x(q)) = a(1)(x(1) + \cdots + x(q)) + \cdots \\ + b(\alpha(i)-1)(x(\alpha(i)-1) + \cdots + x(q)) \\ + (b(\alpha(i)-1)+j)(x(\alpha(i)) + \cdots + x(q)). \end{aligned}$$

Pour simplifier, on pose

$$(2) \qquad h(i,j) = a(\alpha(i)-1) + j$$

ce qui, par définition de $\alpha(i)$ (*cf.* B.1.2) donne

$$(3) \qquad h(i,j) = \#\left\{(a,b) : 1 \leqslant a \leqslant l+1, 1 \leqslant b \leqslant b(a), (a,b) \underset{lex}{\leqslant} (i,j)\right\}$$

Alors, pour $i \geqslant l+1$, (1) devient

$$(4) \qquad \begin{aligned} L(l+1,j)(x(1),\ldots,x(q)) = N\Lambda(x(1),\ldots,x(q)) \\ + h(l+1,j)(x(d+1) + \cdots + x(q)). \end{aligned}$$

Lemme B.2.5. *Soit*

$$X = (x(1),\ldots,x(d),x(d+1),\ldots,x(q)) \in \mathbb{R}^{+q}$$

avec

$$(1) \qquad x(1) + \cdots + x(q) > 1 \quad \text{et} \quad x(d+1) + \cdots + x(q) < 1.$$

Alors la suite

$$v(i,j)(X) = L(i,j)(X) - h(i,j), \qquad (i,j) \in \mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$$

est d'abord strictement croissante, puis éventuellement stationnaire, puis strictement décroissante.

PREUVE. Par B.2.4 (1)(2), on a

$$\begin{aligned} v(i,j)(X) = a(1)(x(1) + \cdots + x(q) - 1) + \cdots \\ + b(\alpha(i)-1)(x(\alpha(i)-1) + \cdots + x(q) - 1) \\ + (b(\alpha(i)-1)+j)(x(\alpha(i)) + \cdots + x(q) - 1) \end{aligned}$$

$$v(i,j)(X) - v((i,j)_-)(X) = x(\alpha(i)) + \cdots + x(q) - 1,$$

où $(i,j)_-$ est l'élément de $\mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$ qui précède (i,j) pour l'ordre lexicographique.

On constate qu'on a croissance stricte de $v(i,j)(X)$ tant que $x(\alpha(i)) + \cdots + x(q) > 1$, ce qui se réalise au moins pour $i = 1$ et qu'on a décroissance stricte dès que $x(\alpha(i)) + \cdots + x(q) < 1$, ce qui se réalisera pour $i > d$.

Lemme B.2.6. *Reprenons les notations de* B.2.1. *Notons M l'idéal maximal de R.*

1. *Si* $\Delta(f; u; y) = \emptyset$, *pour tout* k, $1 \leqslant k \leqslant m$ *et pour tout* $(i,j) \in \mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$, *on a*

$$v_{L(i,j),u,y}(f_k) - n(k)h(i,j) = 0,$$

où

$$n(k) = \operatorname{ord}_M(f_k), \qquad cl^{n(k)h(i,j)}_{L(i,j),u,y}(f_k) \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_r],$$

où $Y_a = cl^{h(i,j)}_{L(i,j),u,y}(y_a)$, $1 \leqslant a \leqslant r$.

2. *Si* $\Delta(f; u; y) \neq \emptyset$ *alors il existe* $(\alpha', \beta') \in \mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$, $(\alpha', \beta') \geqslant (1, 1)$ *et* $\beta < \infty$ *tel que*

$$\begin{aligned}
(i,j) \leqslant (\alpha', \beta') \quad &\textit{implique} \quad v_{L(i,j),u,y}(f_k) - n(k)h(i,j) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,\\
(i,j) < (\alpha', \beta') \quad &\textit{implique} \quad cl^{n(k)h(i,j)}_{L(i,j),u,y}(f_k) \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_r],\\
(\alpha', \beta') < (i,j) \quad &\textit{implique} \quad v_{L(i,j),u,y}(f_k) - n(k)h(i,j) < 0.
\end{aligned}$$

B.2.6.1. Développons f_k, $1 \leqslant k \leqslant m$

$$f_k = \sum_{|c| = n(k)} \lambda_{c,k} y^c + \sum_{|E| < n(k)} \lambda_{D,E,k} y^E u^D \operatorname{mod} (y)^{1+n(k)} \tag{1}$$

$\lambda_{c,k} \in \mathbb{C}\{u, y\}$ ou $\mathbb{C}[[u, y]]$, $\lambda_{D,E,k} \in \mathbb{C}\{u, y\}$ ou $\mathbb{C}[[u, y]]$, avec $\lambda_{c,k}$ nul our inversible, $\lambda_{D,E,k}$ nul ou inversible, avec, par définition de $\Delta(f; u; y)$

$$\lambda_{D,E,k} \neq 0 \quad \text{implique} \quad (n(k) - |E|)^{-1} D \in \Delta(f; u; y).$$

Si $\Delta(f; u; y) = \emptyset$ alors tous les $\lambda_{D,E,k}$ sont nuls et la première assertion est claire.

B.2.6.2. Pour tout D, E, k avec $\lambda_{D,E,k} \neq 0$, on applique B.2.5 pour

$$X = n(k)^{-1}(D, E).$$

On a

$$v_{L(1,1)}(y^E u^D) = |E| + |D|$$

et, par définition des données distinguées, on a

(2) $$\mathrm{in}_M(f_k) = \sum_{|c| = n(k)} \bar{\lambda}_{c,k} Y^c, \qquad \bar{\lambda}_{c,k} = \mathrm{in}_M \lambda_{c,k}$$

donc $v_{L(1,1),u,y}(\lambda_{D,E,k} y^E u^D) - n(k) \times 1 > 0$,

$$v_{L(i,j),u,y}(f_k) = n(k).$$

De plus, pour $(i,j) \in \mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$, on a $v_{L(i,j),u,y}(Y^c) = |c| h(i,j)$, les variations de $v(i,j)[n(k)^{-1}(D,E)]$ donnés en B.2.5. montrent la deuxième assertion.

Lemme B.2.7. *Avec les hypothèses et notations de* B.2.2. *et* B.2.6., *on a les assertions suivantes, en posant*

$$(\alpha, \beta) = \sup \mathcal{E}(A, v, \Lambda, N).$$

1. $$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') = \sup \mathcal{E}(A, v, \Lambda, N) \quad si \quad \Delta(J; u) \neq \varnothing,$$
$$(\alpha, \beta) = (\alpha(l), \infty) \quad si \quad \Delta(J; u) = \varnothing.$$

2. *De plus, pour tour* $(i,j) \leqslant (\alpha', \beta')$, *on a*

   (*a*) $X(i,j) = \mathrm{Spec}\,[R(i,j)/J(i,j)]$ *où*

   $R(i,j) = R[t, s_1 t^{-a(1)}, \ldots, s_{\alpha(i)-1} t^{-a(\alpha(i)-1)}, s_{\alpha(i)} t^{-h(i,j)}, \ldots, s_q t^{-h(i,j)}]$,
   $J(i,j) = (f_k t^{-n(k)h(i,j)}, 1 \leqslant k \leqslant m)$,
   $s = (s_1, \ldots, s_q) = (u_1, \ldots, u_d, y_1, \ldots, y_r)$,

   (*b*) $E(i,j) = V(t + J(i,j)) \subset Z(i,j) = \mathrm{Spec}\, R(i,j)$.

   (*c*) *pour* $1 \leqslant r \leqslant l + 1$,

   $$V_r(i,j) = V(J(i,j) + (s_a(i,j), a \in I_r))$$

   où

   $s(i,j){:} = (s_1(i,j), \ldots, s_q(i,j))$
   $= (s_1 t^{-a(1)}, \ldots, s_{\alpha(i)-1} t^{-a(\alpha(i)-1)}, s_{\alpha(i)} t^{-h(i,j)}, \ldots, s_q t^{-h(i,j)})$,

   (*d*) $x(i,j)$ *est le point fermé de* $Z(i,j)$ *de paramètres* $(t, s_a(i,j), 1 \leqslant a \leqslant q)$.

   (*e*) $D(i,j) = V(s_a(i,j), 1 \leqslant a \leqslant q)$.

   (*f*) $\mathrm{ord}_{x(i,j)}(f_k t^{-n(k)h(k,j)}) = n(k)$,

   $$\mathrm{in}_{x(i,j)}(J(i,j)) = \mathrm{in}_{x(i,j)}(f_k t^{-n(k)h(i,j)}; 1 \leqslant k \leqslant m).$$

3. *Pour* $(i,j) < (\alpha', \beta')$, *on a*

   (*a*) $$\mathrm{ord}_{\epsilon(i,j)}(f_k t^{-n(k)h(i,j)}) = n(k),$$
   $$\mathrm{in}_{\epsilon(i,j)}(J(i,j)) = \mathrm{in}_{\epsilon(i,j)}(f_k(i,j)),$$

4. *Pour* $(i,j) \leqslant (\alpha', \beta')$

(*a*) *si on a*

(1) *pour tout* k, $1 \leqslant k \leqslant m$, $cl^{n(k)h(i,j)}_{L(i,j),u,y}(f_k) \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_r]$,

où

$$Y_a = cl^{h(i,j)}_{L(i,j),u,y} y_a, \qquad 1 \leqslant a \leqslant r,$$

alors

$$T(i,j) = V(t, y_1 t^{-h(i,j)}, \ldots, y_r t^{-h(i,j)}),$$
$$Y(i,j) = V(t, s_k(i,j); a(k) > h(i,j)).$$

(*b*) *Si on n'a pas* (1) *pour* (i,j), *alors* $T(i,j) = \varnothing$.

B.2.7.1. Remarquons que, pour $i = 1$, on a $h(i,j) = j$, on déduit de B.2.7 3.(*c*) que les éclatements

$$X(0,0) \leftarrow X(1,1) \leftarrow \cdots \leftarrow X(1, a(1))$$

sont centrés en les $\{x(1,j)\}$, $0 \leqslant j \leqslant a(1) - 1$.

B.2.7.2. Montrons que B.2.7 termine la preuve de B.2.2. Remarquons d'abord que pour $h(i,j) \geqslant \sup\{N\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$, c'est-à-dire, pour $(i,j) \geqslant (l, b(l))$, on a

$$L(i,j)(D,E) = N\Lambda(D) + h(i,j)|E|,$$

d'où

(1) $$v_{L(i,j),u,y}(y^E u^D) - n(k)h(i,j) = N\Lambda(D) + h(i,j)(|E| - n(k)).$$

Or, par définition de $a = \inf\{\Lambda(\Delta(f; u; y))\}$ dans le dévelopement de f_k, on a pour $\lambda_{D,E,k} \neq 0$ avec $\Lambda(D) \geqslant a(n(k) - |E|)$,

(2) $$v_{L(i,j),u,y}(y^E u^D) - n(k)h(i,j) \geqslant (Na - h(i,j))(n(k) - |E|)$$

avec égalité pour au moins un (D, E, k).

Donc, si $a < \sup\{\lambda(i)\}$, on a $Na < h(i,j)$, d'où en appliquant (2), pour au moins un $n(k)$, on a

$$v_{L(i,j),u,y}(f_k) - n(k)h(i,j) < 0,$$

d'où

$$a < \sup\{\lambda(i)\} \quad \text{implique} \quad ((l, b(l)) > (\alpha, \beta)).$$

Réciproquement, si $a \geqslant \sup\{\lambda(i)\}$, d'après (2),

$$v_{L(i,j),u,y}(f_k) - n(k)h(i,j) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad h(i,j) \leqslant Na,$$

donc en ce cas

$$l(A, v, \Lambda, N) \geqslant h(l, b(l)) = \sup\{N\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$$

ce qui prouve B.2.2.1.

Si $a \geqslant \sup\{\lambda(i) : 1 \leqslant i \leqslant d\}$, alors on remarque que (2) implique

$$(\alpha, \beta) = \sup\{(i,j) : h(i,j) < Na\},$$

comme $h(\alpha, \beta) = l(A, v, \Lambda, N)$, B.2.2. 1.(*a*) est clair et il implique B.2.2. 2.(*b*). Quant à B.2.2. 2.(*c*), c'est une conséquence de B.2.7. 2.(*a*). On a déjà vu (B.2.3) que B.2.2. 2.(*d*) est une conséquence des autres assertions de B.2.2.

B.2.7.3. Remarquons que la condition (1) de B.2.7 est vérifiée pour $(i,j) < (\alpha', \beta')$, en effet, d'après B.2.5 appliqué à $X = n(k)^{-1}(D, E)$, pour $(i,j) < (\alpha', \beta')$, $v_{L(i,j),u,y}(y^E u^D) > n(k)h(i,j)$ pour tout (D, E) tel qu'un $\lambda_{D,E,k} \neq 0$.

B.2.8. Prouvons B.2.7.

Nous allons d'abord prouver 2,3 et 4 par récurrence sur (i,j), ce qui entraînera l'existence de $H(i,j)$ pour $(i,j) \leqslant (\alpha', \beta')$. On prouvera ensuite 1.

B.2.9. Supposons 2, 3 et 4 vérifiés à l'étage (i,j) et prouvons 2, 3 et 4 à l'étage $((i,j)_+)$ si $((i,j)_+) < (\alpha', \beta')$, et 2 et 4 si $((i,j)_+) = (\alpha', \beta')$. Remarquons qu'on a

$$(1) \quad f_k(i,j) = \sum_{|c| = n(k)} \lambda_{c,k} y(i,j)^c$$
$$+ \sum_{|E| < n(k)} \lambda_{D,E,k} y(i,j)^E u(i,j)^D t^{L(i,j)(D,E) - n(k)h(i,j)} \bmod (y(i,j))^{1+n(k)},$$

$1 \leqslant k \leqslant m$, $(1, 1) \leqslant (i,j)$, $\lambda_{c,k}$ et $\lambda_{D,E,k}$ étant définis en B.2.6.1 (1).

Par B.2.7. 2.(*f*) (i,j), $x(i,j)$ est un point proche de $x(0,0)$, de plus, on voit que $\mathrm{in}_{x(i,j)}(f_k(i,j)) \in \mathbb{C}[Y_1, \ldots, Y_r]$, donc $W((i,j)_-)$, le transformé strict de

$$W(0,0) = V(y_1, \ldots, y_r) \subset Z(0,0)$$

épouse $X(i,j)$ en $x(i,j)$ [6, (3.9)], donc $x(i,j)$ est très proche de $x(0,0)$ et $(f(i,j), u(i,j), y(i,j))$ est une donnée distinguée de $J(i,j)$. Si $(i,j) < (\alpha', \beta')$, alors par $3(i,j)$, $Y(i,j)$ est permis pour $X(i,j)$ en $x(i,j)$ (rappelons qu'on a (1) pour (i,j) d'après B.2.7.3).

Effectuons l'éclatement $\tilde{\pi}(i,j): \tilde{X}((i,j)_+) \to X(i,j)$ le long de $Y(i,j)$. Les règles usuelles de calcul des transformées stricts nous donnent 2.$(a)(b)(c)(d)(e)$ pour $((i,j)_+)$. On obtient 2.(f) en regardant l'expression de $f_k((i,j)_+)$.

Maintenant, remarquons que, si on a (1) en $((i,j)_+)$ alors, pour tout D, E, k avec $\lambda_{D,E,k} \neq 0$,

$$L((i,j)_+)(B,E) - h((i,j)_+)n(k) > 0$$
$$L(i,j)(B,E) + b_{k'} + \cdots + b_d + |E| - h((i,j)_+)n(k) > 0$$

où $k' = \inf\{x: a(x) \geqslant h((i,j)_+)\}$ or $h((i,j)_+) = 1 + h(i,j)$, d'où

$$L(i,j)(B,E) - h(i,j)n(k) + b_{k'} + \cdots + b_d + |E| > n(k)$$

on remarque que

$$\operatorname{ord}_{\epsilon(i,j)}(u^B y^E) = L(i,j)(B,E). \tag{2}$$

$$\begin{aligned} L(i,j)(B,E) - h(i,j)n(k) + b_{k'} + \cdots + b_d + |E| \\ = L((i,j)_+)(B,E) - h((i,j)_+)n(k) + n(k). \end{aligned}$$

donc

$$\operatorname{in}_{\epsilon(i,j)}(f_k(i,j)) \in K[Y_1, \ldots, Y_r],$$
$$Y_a = \operatorname{in}_{\epsilon(i,j)}(y_a(i,j)), \qquad 1 \leqslant a \leqslant r,$$

où K est le corps résiduel de $\epsilon(i,j)$, donc

$$T_{X(i,j),\,\epsilon(i,j)} \supset V[Y_1, \ldots, Y_r]$$

mais par semi-continuité de $\dim T_{X,\epsilon} - \dim O_{X(i,j),\epsilon}$ le long de la strate de Samuel [5, I.5.3.3.(9)] on a égalité. Alors, $\eta((i,j)_+)$ étant le point au-dessus de $\epsilon(i,j)$ qui correspond au point générique de $\operatorname{Proj}_{\epsilon(i,j)}(T_{X(i,j)\epsilon(i,j)})$, 4.$(a)$ (i,j) est clair.

Prouvons 4.(b) (i,j). Si on n'a pas B.2.7 (1) alors par (2) on a

$$\begin{aligned} \operatorname{in}_{\epsilon(i,j)}(f_k(i,j)) &\in K[T, Y_1, \ldots, Y_r] \\ &\notin K[Y_1, \ldots, Y_r] \end{aligned}$$

où $T = \operatorname{in}_{\epsilon(i,j)}(t)$.

Alors $W(i,j)$ n'épouse pas $X(i,j)$ en $\epsilon(i,j)$ [6, (3.9)] et

$$T_{X(i,j),\,\epsilon(i,j)} = V(T, Y_1, \ldots, Y_r)$$

et le point de $\tilde{X}((i,j)_+)$ qui correspond au point générique de

$$\operatorname{Proj}_{\epsilon(i,j)}(T_{X(i,j),\,\epsilon(i,j)})$$

est sur le transformé strict de $E(i,j)$, donc pas dans $X((i,j)_+)$, ce qui prouve 4.(*b*) $((i,j)_+)$. Maintenant, prouvons 3 à l'étage $((i,j)_+)$, dans le cas où $((i,j)_+) < (\alpha', \beta')$. Par (2), pour tout (D,E,k) tel que $\lambda_{D,E,k} \neq 0$,

$$\operatorname{ord}_{\epsilon((i,j)_+)} u^D y^E t^{L((i,j)_+)(D,E) - n(k)h((i,j)_+)}$$
$$= L(((i,j)_+)_+)(D,E) - h(((i,j)_+)_+)n(k) + n(k).$$

Or $(((i,j)_+)_+) \leqslant (\alpha', \beta')$, donc, par définition de (α', β') (*cf.* B.2.6), et par B.2.5., on a $\operatorname{ord}_{\epsilon((i,j)_+)}(f_k(i,j)_+)) = n(k)$.

B.2.10. Prouvons 1. Il n'y a plus qu'à montrer que l'algorithme s'arrête en (α', β').

Si on n'a pas B.2.7 (1) en (α', β') alors par B.2.7. 4.(*b*) déjà prouvé,

$$T(\alpha', \beta') = Y(\alpha', \beta') = \varnothing \quad \text{et} \quad OC(\alpha', \beta') = F.$$

Si on a B.2.7 (1) en (α', β'), il existe k, $1 \leqslant k \leqslant m$ tel que

$$\operatorname{ord}_{\epsilon(\alpha', \beta')}(f_k(\alpha', \beta')) < n(k).$$

Alors par [9, Ch. III, Sect. 4, Lemma 14], $\epsilon(\alpha', \beta')$ n'est pas dans la strate de Samuel de $x(\alpha', \beta')$, donc n'est pas permis et $OC(\alpha', \beta') = F$.

B.3. Comment se ramener à un algorithme fini

B.3.1. Soit (A, v, Λ) vérifiant la condition $(*)$, soit $a = \inf \Lambda(\Delta(J; u))$. Le théorème B.2.2 nous permet de calculer a par un passage à la limite car $a = \lim (L(A, v, \Lambda, N)/N)$.

Cepedant par B.2.2., pour les entiers N tels que $Na \in \mathbb{N}$, on a

$$a = l(A, v, \Lambda, N)/N.$$

Grâce à la proposition suivante, on peut aussi déterminer a en testant seulement un nombre fini de valeurs de N.

Proposition B.3.2. *Soit N tel que $N\lambda(i)$ soit entier pour $1 \leqslant i \leqslant d$. Soit*

$$(\alpha, \beta) = \sup \mathcal{E}(A, v, \Lambda, N)$$

(l'indice qui correspond au sommet de l'arbre). Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) $a = l(A, v, \Lambda, N)/N$.
(ii) *Il n'y a pas d'isomorphisme entre $E(\alpha, \beta)$ et $C_x(X)$ qui envoie $x(\alpha, \beta)$ sur le sommet de $C_x(X)$.*

Lemme B.3.2.1.

(i) *Pour tout couple* $(i,j) \in \mathcal{E}(A, v, \Lambda, N)$, $(i,j) \neq (0,0)$ *avec* $h(i,j) < Na$, *il y a un isomorphisme entre* $E(i,j)$ *et* $C_x(X)$, *l'image de* $x(i,j)$ *étant le sommet de* $C_x(X)$.

(ii) *Si, pour* $(\alpha, \beta) = \sup \mathcal{E}(A, v, \Lambda, N)$ *on a* $h(\alpha, \beta) = Na$, *alors il n'y a pas d'isomorphisme entre* $E(\alpha, \beta)$ *et* $C_x(X)$ *tel que l'image de* $x(\alpha, \beta)$ *est le sommet de* $C_x(X)$.

B.3.2.2. Montrons que ce lemme implique B.4.2. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) de la proposition est une conséquence de B.4.2.1. (ii). Par B.2.2., on a $l(A, v, \Lambda, N) = \lfloor Na \rfloor$, ce qui s'écrit aussi $h(\alpha, \beta) = \lfloor Na \rfloor$. Donc, si B.3.2. (ii) est vrai, par B.3.2.1 (i), c'est que $h(\alpha, \beta) \geqslant Na$ et donc $h(\alpha, \beta) = Na$, ce qui est B.3.2.(i). Il n'y a plus qu'à prouver le lemme.

B.3.3. Prouvons (i). Choisissons (R, f, u, y) tel que (f, u, y) est une donnée distinguée pour $R/J = A$. Alors nous pouvons appliquer B.2.7. et donc pour $(i,j) \leqslant (\alpha, \beta)$

$$E(i,j) = \operatorname{Spec}[R(i,j)/(t) + (f_k t^{-n(k)h(i,j)}), 1 \leqslant k \leqslant m]. \tag{1}$$

Par B.2.9. (1) on a

$$\begin{aligned} f_k t^{-n(k)h(i,j)} = &\sum_{|c| = n(k)} \lambda_{c,k} y(i,j)^c \\ &+ \sum_{|E| < n(k)} \lambda_{D,E,k} y(i,j)^E u(i,j)^E t^{L(i,j)(D,E) - h(i,j)n(k)} \\ &\cdot \operatorname{mod}(y_1(i,j), \ldots, y_r(i,j))^{1+n(k)} \end{aligned} \tag{2}$$

et $\lambda_{D,E,k} \neq 0$ implique $\Lambda(D) \geqslant a(n(k) - |E|)$ puisque $\Lambda(x) = a$ est l'équation d'un côté de $\Delta(J; u)$. D'après les variations de $L(i,j)(D,E) - h(i,j)n(k)$ décrites en B.2.9, pour $(i,j) < (\alpha, \beta)$, on a

$$L(i,j)(D,E) - h(i,j)n(k) > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda_{D,E,k} \neq 0. \tag{3}$$

Pour $i = \alpha$, on remarque que, par définition de $L(i,j)$, on a

$$L(\alpha, j)(D, E) = N\Lambda(D) + h(\alpha, j)|E|.$$

Or $\Lambda(D) \geqslant a(n(k) - |E|)$ d'où

$$N\Lambda(D) + h(\alpha, j)|E| - h(\alpha, j)n(k) \geqslant (Na - h(\alpha, j))(n(k) - |E|) \geqslant 0 \tag{4}$$

avec positivité stricte si $h(\alpha, j) < Na$ ou si $\Lambda(D) > a(n(k) - |E|)$. De (3) et (4), on déduit que si $h(i,j) < Na$

(5) $$f_k t^{-n(k)h(i,j)} = \sum_{|c|=n(k)} \lambda_{c,k} y(i,j)^c \bmod (t).$$

Maintenant, remarquons que

(6) $C_x(X) = \operatorname{Spec}[(R/M)[\bar{u},\bar{y}]/\mathrm{in}_M(f)]$ où $\bar{u} = \mathrm{in}_M(u)$, $\bar{y} = \mathrm{in}_M(y)$.

Par (1) et (5) on a un isomorphisme

$$\begin{aligned}
&(R/M)[\bar{u},\bar{y}]/\mathrm{in}_M(f) \to \Gamma(E(i,j))\\
&\bar{u} = \mathrm{in}_M(u) \to u(i,j) \bmod (t, f(i,j))\\
&\bar{y} = \mathrm{in}_M(y) \to y(i,j) \bmod (t, f(i,j))\\
&\bar{\lambda} \in R/M \to \lambda \bmod (t, f(i,j)).
\end{aligned}$$

B.3.4. Prouvons (ii). D'après (4) et puisque $h(\alpha,\beta) = Na$, on a

(7) $$\begin{aligned} f_k t^{-n(k)k(\alpha,\beta)} = &\sum_{|c|=n(k)} \lambda_{c,k} y(\alpha,\beta)^c \\ &+ \sum_{(D,E)\in\mathcal{E}} \lambda_{D,E,k} y(\alpha,\beta)^E u(\alpha,\beta)^D \bmod (t) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \{(D,E) \mid \Lambda(D) = a(n(k) - |E|)\}\\
&= \{(D,E) \mid L(\alpha,\beta)(D,E) = n(k)h(\alpha,\beta)\}.
\end{aligned}$$

Posons $g_k = f_k t^{-n(k)h(\alpha,\beta)} \bmod (tR(\alpha,\beta))$, $g_k \in R(\alpha,\beta)/tR(\alpha,\beta)$, $1 \leqslant k \leqslant m$,

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= u(\alpha,\beta) \bmod (tR(\alpha,\beta))\\
\tilde{y} &= y(\alpha,\beta) \bmod (tR(\alpha,\beta)).
\end{aligned}$$

Supposons que l'on ait un isomorphisme

$$\theta\colon (R/M)[\bar{u},\bar{y}]/\mathrm{in}_M(f) = \Gamma(C_x(X)) \to (R/M)[\tilde{u},\tilde{y}]/(\tilde{y}) = \Gamma(E(\alpha,\beta))$$

envoyant l'idéal $(\bar{u},\bar{y})$ sur l'idéal $(\tilde{u},\tilde{y})$.

Un tel isomorphisme respecte les directrices des cônes tangents aux points ω et $x(\alpha,\beta)$ correspondants aux idéaux $(\bar{u},\bar{y})$ et $(\tilde{u},\tilde{y})$. On a donc

$$\theta(\bar{y}_j) = l_j(\tilde{y}) + \varphi_j(\tilde{u},\tilde{y}), \qquad 1 \leqslant j \leqslant r$$

où l_j est une forme linéaire et $\varphi_j(\tilde{u},\tilde{y}) \in (\tilde{u},\tilde{y})^2$, on a donc

(8) $$g_k = \sum_{|c|=n(k)} \lambda_{c,k} [l(\tilde{y}) + \varphi(\tilde{u},\tilde{y})]^c,$$

or par B.2.2.c, g_k est la forme initiale de f_k pour la graduation définie par $(N\Lambda, u, y)$ (ou (Λ, u, y), le fait de changer Λ en $N\Lambda$ ne modifie pas le gradué) et (8) veut dire que le côté d'équation $\Lambda(x) = a$ de $\Delta(f; u; y)$ est soluble [8, (3,9)], c'est-à-dire que $\Delta(f; u; y)$ n'est pas minimal, ce qui contredit B.2.1 (2), donc θ n'existe pas. Q.E.D.

C. LE PREMIER CÔTÉ EST DETERMINÉ PAR LA SEULE DONNÉE DE $A = R/J$

Le premier côté de $\Delta(J; u)$ est le côté d'équation

$$x(1) + \cdots + x(d) = \delta(J; u)$$

c'est-à-dire que tous nos $\lambda(i)$ sont égaux à 1. Ce côté satisfait à $(*)$ puisque $\delta(J; u) > 1$ (*cf.* [7, p. 3]).

L'ensemble $\mathcal{E}(\Lambda, N, \infty)$ de B.1.2. se réduit à

$$\mathcal{E}(\Lambda, N, \infty) = \{(0,0)\} \cup \{(1,j): 1 \leqslant j \leqslant N\} \cup \{(2,j): 1 \leqslant j\}.$$

Pour $i = 1$, $1 \leqslant j \leqslant N-1$, l'éclatement

$$\pi(i,j): \tilde{X}((i,j)_+) \to X(i,j)$$

est l'éclatement centré en $Y(i,j) = \{\overline{x(i,j)}\}$ (B.2.7. 1.).

Pour $i = 2$, $1 \leqslant j$, on a $Y(2,j) = T(2,j)$ (B.1.4).

Bref, pour définir $Y(i,j)$, il n'y a nul besoin de $V_.(i,j)$. Dans ce cas particulier, la connaissance de $V_.(i,j)$ est superflue pour construire l'algorithme de B.1.3, or les v_i ne servent qu'à définir $V_.(i,j)$, donc ils sont inutiles pour connaître le premier côté.

D. LES AUTRES CÔTÉS

D.1. Soit Λ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^d$ à coefficients rationnels strictement positifs

$$\Lambda(x(1), \ldots, x(d)) = \lambda(1)x(1) + \cdots + \lambda(d)x(d).$$

(A, v) étant donné (B.1.1), supposons que l'algorithme de B nous dise que le côté du polyèdre $\Delta(J; u)$ associé à Λ pour R, J, u satisfaisant à (B.2) ne vérifie pas la condition $(*)$ c'est-à-dire que

$$\Lambda[\Delta(J; u)] = [c(J, u, \Lambda), +\infty[$$

avec

$$c(J, u, \Lambda) < \operatorname{Sup}\{\lambda(i): 1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

Choisissons alors $M \in \mathbb{N}^*$ tel que $M\lambda(i) \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Posons

$$S_{M\Lambda} = \mathbb{Z}[T, X_1, \ldots, X_d]$$
$$S'_{M\Lambda} = \mathbb{Z}[T, X_1 T^{-n\lambda(1)}, \ldots, X_d T^{-M\Lambda(d)}].$$

Bien sûr $A[t]$ est une $S_{M\Lambda}$-algèbre par

$$T \to t, \quad X_i \to v_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

et $R[t]$ est aussi une $S_{M\Lambda}$-algèbre par

$$T \to t, \quad X_i \to u_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

On a, en omettant d'écrire les indices $M\Lambda$

$$A[t] \underset{S}{\otimes} S' = A[t, v_1 t^{-M\lambda(1)}, \ldots, v_d t^{-M\lambda(d)}]$$

noté $A_{M\Lambda}$,

$$R[t] \underset{S}{\otimes} S' = R[t, u_1 t^{-M\lambda(1)}, \ldots, u_d t^{-M\lambda(d)}]$$

noté $R_{M\Lambda}$.

On a la suite exacte

$$J[t] \underset{S}{\otimes} S' \to R[t] \underset{S}{\otimes} S' \to A[t] \underset{S}{\otimes} S' \to 0.$$

Ce qui implique que le noyau du morphisme surjectif $R_{M\Lambda} \to A_{M\Lambda}$ est $JR[t, u_1 t^{-M\lambda(1)}, \ldots, u_d t^{-M\lambda(d)}]$ noté $J_{M\lambda}$.

Soit (f, u, y) tel que f est une base standard de J totalement préparée relativement à (u, y) [8, Section 4]. Ce qui implique que $\Delta(f; u; y) = \Delta(J; u)$. (Par exemple on peut prendre (f, u, y) donnée distinguée).

En reprenant les notations de B, on a

$$f_k = \sum \lambda_{c,k} y^c + \sum \lambda_{D,E,k} y^E u^D \operatorname{mod} (y)^{1+n(k)}$$
$$= \sum \lambda_{c,k} y^c + \sum \lambda_{D,E,k} y^E u'^D t^{M\Lambda(D)} \operatorname{mod} (y)^{1+n(k)}$$

où $u'_i = u_i t^{-M\lambda(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant d$.

Pour tout triplet (D, E, k), définissons $w \in \mathbb{R}^d_+$ par $D = (n(k) - |E|)w$. Alors, on a dans $\mathbb{R}^{d+1}_+$, $(D, M_\Lambda(D)) = (n(k) - |E|)(w, M\Lambda(w))$.

On en déduit que, pour tout sommet s de $\Delta(f; u', t; y)$, il existe un sommet w de $\Delta(J; u)$ tel que $s = (w, M\Lambda(w))$.

D.2. Montrons que $(f; u', t; y)$ est une donnée distinguée pour $R_{M\Lambda}$, $J_{M\Lambda}$. En fait, le seul point difficile est de montrer que les formes initiales de f relativement à $\mathfrak{M}'$ engendrent $gr_{\mathfrak{M}'}(J_{M\Lambda})$, où $\mathfrak{M}'$ est le maximal de $R_{M\Lambda}$.

Pour tout $(D, E, c) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+$

$$y^E u^D t^c = y^E u'^D t^{c + M\Lambda(D)},$$

donc $\mathrm{ord}_{\mathfrak{M}'}(y^E u^D t^c) = |E| + |D| + c + M_\Lambda(D)$. Soit L la forme linéaire sur $\mathbb{R}^{1+d}$ donnée par $L(D, c) = c + |D| + M\Lambda(D)$, alors on a $v_{L,y,u,t}(f_i) = n(i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ et par [8, (2-21d)],

$$\mathrm{in}_{L,y,u,t}(J) = \mathrm{in}_{L,y,u,t}(f) \subset gr_{L,y,u,t}(R). \tag{1}$$

Soit $g \in J_M$, pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, $t^n g \in JR[t]$, donc par (1),

$$t^n g = \sum_{i=1}^m a(i) f_i,$$

$$v_L(a(i)) + v_L(f_i) = v_L(t^n g),$$
$$a(i) \in R[t].$$

On en déduit que

$$T^n_{\mathrm{in}_{\mathfrak{M}'}}(g) = \mathrm{in}_{\mathfrak{M}'}(t^n g) = \sum_{i=1}^m \mathrm{in}_{\mathfrak{M}'}(a(i))\, \mathrm{in}_{\mathfrak{M}'}(f_i).$$

On en déduit le résultat par le fait que R_M est une algèbre de polynômes en t.

D.3. On dèduit de D.2 que

$$\Delta(f; u', t; y) = \Delta(J_{M\Lambda};, u').$$

Soit Λ' la forme linéaire sur $\mathbb{R}^{1+d}$ donnée par

$$\Lambda'(x(0), x(1), \ldots, x(d)) = (M+1)^{-1}[x(0) + \Lambda(x(1), \ldots, x(d))].$$

On a

$$\Lambda'[\Delta(J_{M\Lambda}; u')] = \Lambda'[\Delta(f; u', t; y)] = [c(J, u, \Lambda), +\infty[.$$

Si on prend M suffisamment grand, c'est-à-dire tel que

$$(M+1)^{-1}\lambda(I) \leqslant c(J, u, \lambda), \qquad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

le côté de $\Delta(J_{M\Lambda}; u', t)$ défini par Λ' vérifie $(*)$. D'où

$$\inf \Lambda'[\Delta(J_{M\Lambda}; u'; t)] = (M+1)c(J, u, \Lambda) = \lim_{N\to\infty} N^{-1} l(A_{M\Lambda}, (v', t), \Lambda', N)$$

ce qui nous donne une expression de $c(J, u, \Lambda)$ déterminée par (A, v) uniquement.

Maintenant, on remarque que

$$gr_{\Lambda,u,y}(A) = gr_{\Lambda'}(A_{M\Lambda,v',t})/(T-1),$$

et pour tout $g \in A \subset A_{M\Lambda}$, on a

$$\mathrm{ord}_{\Lambda,v}(g) = \mathrm{ord}_{\Lambda',v'}(g).$$

Ainsi (A, v) nous permet de construire $A_{M'\Lambda}$ grâce auquel on peut reconstituer la filtration associée à (R, J, Λ, u, y).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cossart, V. Sur le polyèdre caractéristique d'une singularité, *Bull. S.M.F.* **103**(1975).

[2] Cossart, V. Desingularization of embedded excellent surfaces, *Math. Journ.*, Tohoku (1981).

[3] Cossart, V. Forme normale d'une fonction en caractéristique positive dans «Polyèdre caractéristique d'une singularité», Thèse, Orsay (1987).

[4] Cossart, V., Giraud, J. and Orbanz, U. Resolution of surface singularities. *Lecture Notes in Mathematics* 1101, Springer-Verlag.

[5] Giraud, J. Etude locale des singularités, Orsay, **26**(1971-1972).

[6] Giraud, J. Sur la théorie du contact maximal, *Math. Z.* **137**(1974), 285-310.

[7] Hironaka, H. Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space. Miméographié Univ. Warwick (1972).

[8] Hironaka, H. Characteristic polyhedra of singularities, *J. Math. Kyoto Univ.* **7**(1967), 251-293.

[9] Hironaka, H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic O, *Annals of Math.* **79**(1964).

[10] Zariski, O. Le problème des modules pour les branches planes. Cours de l'Ecole Polytechnique (1973).

Recibido: 20 de abril de 1989.

V. Cossart
Université P. et M. Curie, UA 123,
Département de Mathématiques
Couloir 45-46, 5ème étage,
4, place Jussieu
75005 PARIS