

# Morceaux de Graphes Lipschitziens et Intégrales Singulières sur une Surface

Guy David

## Introduction

Soit  $K$  un noyau, défini sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ,  $C^\infty$ , impair et homogène de degré  $-d$  pour un entier  $d \leq N$  (on pense par exemple au cas où  $K$  est le noyau de Cauchy quand  $N = 2$  et  $d = 1$ , ou le potentiel de double-couche quand  $d = N - 1$ ). On peut se demander pour quels objets  $d$ -dimensionnels  $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$  la formule

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int K(x - y)f(y) d\sigma(y),$$

où  $\sigma$  est la mesure de surface  $d$ -dimensionnelle sur  $\Sigma$ , définit un opérateur borné sur  $L^2(\Sigma, d\sigma)$ .

Un exemple important est donné par le théorème de Coifman, McIntosh et Meyer [CMM], qui dit que  $T$  est borné sur  $L^2$  lorsque  $K(z) = 1/z$  est le noyau de Cauchy et  $\Sigma \subset \mathbb{C}$  est le graphe d'une fonction lipschitzienne. Plus généralement, lorsque  $d = 1$ , on connaît les courbes rectifiables pour lesquelles  $T$  est borné sur  $L^2$  pour tout  $K$  comme ç-dessus: ce sont les courbes «régulières» d'Ahlfors (voir [D1]).

Quand  $d > 1$ , il paraît exclu pour le moment de trouver des conditions géométriques simples qui soient nécessaires et suffisantes pour que  $T$  soit borné. On connaît toutefois quelques conditions suffisantes:

- Lorsque  $\Sigma$  est le graphe d'une fonction lipschitzienne  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{N-d}$ , la continuité de  $T$  est une conséquence assez facile du théorème de Coifman, McIntosh et Meyer.
- Dans [S1], S. Semmes définit une classe d'hypersurfaces, qu'il appelle «corde-arc avec petite constante», et qui sont une généralisation à plusieurs dimensions des courbes corde-arc (avec une petite constante) au sens suivant. Ce sont les surfaces sur lesquelles la généralisation naturelle (en termes d'algèbres de Clifford) du noyau de Cauchy définit un opérateur continu sur  $L^2$  et presque anti-autoadjoint. Semmes caractérise ces surfaces, notamment par le fait que le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  est dans  $BMO(\Sigma)$  avec une petite norme. Pour ces surfaces, on prouve la continuité de  $T$  assez aisément à partir de leur caractérisation géométrique.
- On peut généraliser la notion de courbe régulière, et obtenir des «surfaces régulières», qui sont définies à partir d'un paramétrage lipschitzien, et pour lesquelles  $T$  est encore borné. (Voir la définition 1 au paragraphe B-II, ou [D2]). Un graphe lipschitzien, l'image de  $\mathbb{R}^d$  par une application bi-lipschitzienne de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^N$  sont des exemples de surfaces régulières. La technique utilisée pour prouver la continuité de  $T$  dans ce cas est de trouver une décomposition de chaque surface régulière du type suivant. On prouve l'existence, pour toute boule  $B$  de rayon  $R$  centrée en un point de  $\Sigma$ , d'un sous-ensemble  $E \subset \Sigma$ , de surface  $\geq \theta R^d$  pour un  $\theta > 0$ , et qui soit contenu dans une surface  $\Sigma'$  appartenant à une classe un peu plus restreinte de surfaces. Les méthodes classiques de variable réelle permettent alors de se ramener au cas où  $\Sigma$  fait partie de cette classe plus restreinte de surfaces. Après un nombre fini d'applications de ce stratagème, on est réduit au cas où  $\Sigma$  est un graphe lipschitzien.
- Dans [S2], Semmes prouve la continuité de  $T$ , lorsque l'hypersurface  $\Sigma$  vérifie certaines conditions géométriques relativement générales (voir la définition 2 du paragraphe B-IV), pour la plupart des noyaux  $K$ . L'idée de la démonstration est, cette fois, d'appliquer un critère de continuité d'un opérateur d'intégrale singulière (le «Théorème  $T(b)$ ») à l'espace de nature homogène  $\Sigma$ .

Nous nous proposons de reprendre l'approche de [D2], et de prouver un résultat qui permette, dans certains cas, de trouver une décomposition de  $\Sigma$  du type suivant. On veut trouver, pour chaque  $x \in \Sigma$  et chaque rayon  $R > 0$ , un ensemble  $E \subset \Sigma \cap B(x, R)$ , de surface  $\geq \theta R^k$ , et qui soit contenu dans l'image d'un graphe lipschitzien par une isométrie de  $\mathbb{R}^N$ . On demande que  $\theta$ , ainsi que la constante de Lipschitz du graphe, ne dépende pas de  $x$  ni de  $R$ . L'existence d'une telle décomposition entraîne la continuité de  $T$  sur  $\Sigma$  par des techniques classiques de variable réelle.

Déterminer pour quels  $\Sigma$  de telles décompositions existent ressemble beaucoup à un problème de rectifiabilité de  $\Sigma$  (si  $\Sigma$  est «totalement rectifiable»,

on sait que  $\Sigma$  peut être recouvert par un nombre dénombrable de surfaces de classe  $C^1$ , et donc l'une d'entre elle aura une intersection de mesure positive avec  $\Sigma \cap B(x, R)$ . La propriété que nous demandons est plus forte, et son caractère quantitatif, ainsi que son invariance par l'effet des dilatations, limite toutefois l'utilisation de certaines techniques de la théorie de la mesure géométrique. L'objet de cet article est de donner une construction un peu systématique qui permette, dans certains cas, d'obtenir la décomposition souhaitée de  $\Sigma$ .

Pour illustrer le lien entre les motivations de cet article et la théorie de la rectifiabilité, signalons une question à laquelle on aimerait pouvoir répondre (on en est sans doute encore loin): si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$  est tel que, pour tout  $x \in \Sigma$  et tout  $r > 0$ ,

$$C_0^{-1}r \leq |\Sigma \cap B(x, R)| \leq C_0r$$

et aussi

$$\int_{[0, \theta]} |\pi_\theta(\Sigma \cap B(x, R))| d\theta \geq C_0^{-1}r$$

(où  $|\pi_\theta(\Sigma \cap B(x, R))|$  est la mesure de la projection orthogonale de  $\Sigma \cap B(x, R)$  sur une droite de pente  $\theta$ ), est-ce que  $\Sigma$  a une décomposition comme plus haut?

On montrera que, dans certaines circonstances, si  $\Sigma$  est une surface de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^N$  contenue dans la boule unité, et si  $z: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une application lipschitzienne telle que  $|z(\Sigma)| \geq \delta > 0$ , alors on peut trouver un ensemble  $E \subset \Sigma$  de mesure  $\geq \theta > 0$  et tel que la restriction de  $z$  à  $E$  soit bi-lipschitzienne. (C'est le Théorème 1, dont la démonstration par un argument de temps d'arrêt occupe toute la partie A.)

Dans le cas où  $\Sigma = \mathbb{R}^d$ , on obtient le résultat suivant: si  $z$  est une application lipschitzienne du cube unité  $I_0 \subset \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$ , et si  $|z(I_0)| \geq \delta > 0$ , alors on peut trouver un ensemble  $E \subset I_0$  tel que  $|E| \geq \theta > 0$  et tel que la restriction de  $z$  à  $E$  soit bi-lipschitzienne (c'est le Théorème 2, qui est prouvé au paragraphe B-I). Signalons qu'il existe maintenant une démonstration nettement plus courte, due à P. Jones, de ce résultat (et même d'un résultat un peu meilleur). Voir l'article de P. Jones dans ce numéro.

On montre ensuite que l'on peut appliquer l'un des théorèmes précédents pour trouver une décomposition (comme plus haut) des surfaces régulières (paragraphe B-II), des hypersurfaces de Semmes, ou même de surfaces de dimension  $d < N - 1$  satisfaisant à une condition semblable à celle de Semmes (paragraphe B-III et B-IV). L'idée est de prendre pour fonction  $z$  la projection orthogonale sur un  $d$ -plan judicieusement choisi, l'ensemble  $E$  sur lequel  $z$  est bi-lipschitzienne est alors contenu dans l'image par une transformation orthogonale d'un graphe lipschitzien. Pour les surfaces régulières et les hyper-

surfaces de Semmes, l'existence de la décomposition est nouvelle, mais la continuité de  $T$  était connue. Signalons, dans le cas des surfaces de Semmes, l'existence d'une démonstration plus courte, et aussi un peu plus performante, due à D. Jerison et à l'auteur.

Celui-ci a le plaisir de remercier R. Coifman, P. Jones, M. Reimann, et S. Semmes pour de nombreuses discussions qui l'ont aidé. Il est honoré de pouvoir s'associer à l'excellente initiative de la «Revista» de dédier un numéro spécial à José-Luis Rubio de Francia, dont nous regrettons tous la disparition.

## A. L'ARGUMENT DE TEMPS D'ARRÊT

### 1. Énoncé du Théorème

On se donne un espace  $\Sigma$ , muni d'une distance que l'on notera  $\text{dist}$  (et pour laquelle  $\Sigma$  est, disons, localement compact), et d'une mesure de Radon positive  $\sigma$ . On se donne aussi un entier  $d \geq 1$ , que l'on considérera comme la dimension de  $\Sigma$  (on pense surtout à deux cas particuliers: celui de  $\mathbb{R}^d$ , muni de la mesure de Lebesgue, et celui d'une surface  $d$ -dimensionnelle  $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ , munie de la mesure de surface). On suppose que

- (1) si  $B$  est une boule de rayon  $r$  dans  $\Sigma$ ,  $\sigma(B) \leq C_0 r^d$ , et
- (2) si  $x \in \Sigma$  et  $r > 0$ , alors  $\sigma(B(x, r)) \geq C_0^{-1} r^d$ .

Afin de pouvoir aisément procéder à un argument de temps d'arrêt, supposons que l'on dispose d'un analogue des décompositions de  $\mathbb{R}^N$  en cubes dyadiques. Plus précisément, faisons l'hypothèse suivante:

- (Q) Il existe une suite  $\epsilon_j$  de réels  $> 0$ , tendant vers 0 et, pour chaque  $\epsilon$  dans la suite des  $\epsilon_j$  et pour chaque entier  $n \geq 0$ , une partition  $Q(n)$  de  $\Sigma$  en ensembles  $R$ ,  $R \in Q(n)$ , avec les propriétés suivantes (où l'on a fixé  $\epsilon$ ):
- (3) si  $n > n'$  et si  $R \in Q(n)$ ,  $R' \in Q(n')$  sont tels que  $R \cap R' \neq \emptyset$ , alors  $R \subset R'$ ;
- (4) pour tout  $n \geq 0$  et tout  $R \in Q(n)$ , le diamètre de  $R$  est  $\leq C_0 \epsilon^n$ ;
- (5) pour tout  $n \geq 0$  et tout  $R \in Q(n)$ ,  $\sigma(R) \geq C_0^{-1} \epsilon^{nd}$ ;
- (6) si  $n \geq 0$  et  $R \in Q(n)$ ,

$$\sigma(\{x \in \Sigma, \text{dist}(x, \partial R) \leq C \epsilon^{n+1}\}) \leq \tau \epsilon^{nd},$$

où, pour tout  $C$ ,  $\tau$  tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0.

Lorsque  $\Sigma = \mathbb{R}^d$  et  $\sigma$  est la mesure de Lebesgue, nous choisirons bien entendu les cubes  $\epsilon^{-1}$ -adiques, où  $\epsilon$  est l'inverse d'un entier; dans le cas où  $\Sigma$  est contenu dans  $\mathbb{R}^N$ , nous construirons les  $Q(n)$  au paragraphe B-III. Nous ne travaillerons en général qu'avec une seule valeur de  $\epsilon$  à la fois (nous aurons

seulement besoin de savoir que  $\tau$  est aussi petit que l'on veut), et nous appellerons les éléments de  $Q(n)$  des « $n$ -cubes».

On se donne encore une fonction  $z: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que l'on supposera  $C_0$ -lipschitzienne. On supposera en outre que

$$(7) \quad |z(A)| \leq C_0 \sigma(A) \text{ pour tout ensemble Borélien } A \subset \Sigma.$$

(On vérifiera plus tard que, au moins dans le cas où  $\sigma$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$  et  $\Sigma$  est son support, (7) est en fait une conséquence des hypothèses précédentes; pour le moment, considérons (7) comme une hypothèse supplémentaire.)

Finalement, donnons-nous un 0-cube  $I_0 \in Q(0)$  et supposons que, pour un  $\delta > 0$ , on ait

$$(8) \quad |z(I_0)| \geq \delta \sigma(I_0).$$

On souhaite trouver un ensemble  $E \subset I_0$ , avec  $\sigma(E) \geq \theta > 0$ , et tel que  $z|_E$  soit bi-lipschitzienne. Notre hypothèse principale, qui nous permettra de nous ramener au cas où  $\delta$  est plus grand, est la suivante.

(9) On peut, pour toute constante  $C_1 \geq 0$ , trouver des constantes  $C_2$  et  $\eta > 0$  telles que, si  $x \in \Sigma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $T$  est l'union des  $n$ -cubes qui rencontrent  $B(x, C_2 \epsilon^n)$ , et si  $|z(T)| \geq \delta \sigma(T)/2$ , alors l'une des deux choses suivantes se produit:

- $z(T)$  contient la boule de centre  $z(x)$  et de rayon  $C_1 \epsilon^n$ ;
- on peut trouver un  $n$ -cube  $R \subset T$ , tel que

$$|z(R)| \geq (1 + 2\eta) \sigma(R) |z(T)| \sigma(T)^{-1}.$$

(Dans ce qui précède, on impose que les constantes  $\eta$  et  $C_2$  puissent être choisies indépendantes de  $\epsilon$  assez petit.)

**Théorème 1.** *Soient  $\Sigma$ ,  $\sigma$ ,  $z$  (une fonction  $C_0$ -lipschitzienne) et  $I_0$  (un 0-cube) tels que (1), (2), (Q), (7), (8) et (9) soient satisfaits. Alors, on peut trouver un fermé  $E \subset I_0$  tel que  $\sigma(E) \geq \theta$  et tel que  $|z(x) - z(y)| \geq M^{-1} \text{dist}(x, y)$  pour  $x, y$  dans  $E$ . Les constantes  $\theta \geq 0$  et  $M$  ne dépendent que de  $C_0$ ,  $\delta$ ,  $C_2$  et  $\eta$  (où  $C_1$  ne dépend que de  $C_0$ ).*

La démonstration du théorème occupera le reste de la partie A.

## 2. Description du Temps D'Arrêt

La démonstration repose sur l'énoncé suivant, qui nous permettra de nous ramener, par une itération, au cas où  $\delta$  est très grand.

**Lemme 1.** Soient  $\Sigma$ ,  $\sigma$ ,  $z$  et  $I_0$  comme dans le théorème. On peut trouver une constante  $\eta_0 > 0$  telle que, si  $\epsilon$  est assez petit et si l'on a de plus, pour un  $M_0 > 0$  et un  $\theta_0 > 0$ ,

(10) pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $n$ -cube  $Q$  tel que  $|z(Q)| \geq (1 + \eta_0)\delta\sigma(Q)$ , on peut trouver un fermé  $E(Q) \subset Q$  tel que  $\sigma(E(Q)) \geq \theta_0\epsilon^{nd}$  et pour lequel  $|z(x) - z(y)| \geq M_0^{-1} \text{dist}(x, y)$  pour  $x$  et  $y$  dans  $E(Q)$ ,

alors on peut trouver un fermé  $E \subset I_0$  tel que  $\sigma(E) \geq \theta$  et tel que

$$|z(x) - z(y)| \geq M^{-1} \text{dist}(x, y)$$

pour  $x, y$  dans  $E$ .

Avant de commencer la construction de l'ensemble  $E$  du lemme, signalons que nous utiliserons systématiquement la lettre  $C$  pour désigner des constantes qui dépendent de manière simple des constantes géométriques  $C_0$ ,  $\delta$ ,  $C_2$  et  $\eta$ . Plus précisément, les constantes seront choisies dans l'ordre suivant:  $C_1$ , puis  $C_4$ ,  $C_2$ ,  $\eta$ ,  $C_3$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_0$ , enfin  $\alpha$  et les constantes  $M$  et  $\theta$  (tout cela vaudra dès que  $\epsilon < \epsilon_0$ , où  $\epsilon_0$  sera choisi en fonction de  $\eta_0$ ).

Nous noterons  $\partial(A) = |z(A)|/\sigma(A)$ , pour tout  $A \subset \Sigma$  tel que  $\sigma(A) \neq 0$ .

Nous allons définir une suite d'ensembles  $E_0 = I_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_k \supset \dots$ , où chaque  $E_{k+1}$  est obtenu à partir de  $E_k$  en lui retirant une union finie de  $n$ -cubes (nous noterons cette union  $Q_k$ ). L'élimination des  $Q_k$  se fera en plusieurs générations; à la  $n$ -ième génération, les  $Q_k$  seront composés de  $n$ -cubes.

Supposons que nous ayons fini la  $(n-1)$ -ième génération d'éliminations, et décrivons la  $n$ -ième génération. A la fin de la génération  $(n-1)$ , on aura construit des ensembles  $E(n-1)$  et  $G(n-1)$ , où  $E(n-1)$  est le dernier  $E_k$  de la génération  $n-1$  (à propos, nous appellerons  $k(n-1)$  l'entier tel que  $E(n-1) = E_{k(n-1)}$ ), et  $G(n-1)$  est une partie de  $E(n-1)$ . Pour  $n=1$ , on pose  $E(0) = E_0$ ,  $k(0) = 0$ , et  $G(0) = \emptyset$ . Dans tous les cas, l'ensemble  $G(n-1)$  sera une union de  $m$ -cubes  $R$  (où  $m < n$ ) tels que

$$(11) \quad \partial(R) \geq (1 + \eta_0)\delta,$$

$$(12) \quad \text{dist}(R, E(n-1) \setminus R) \geq C_3\epsilon^m \text{ et } \text{dist}(z(R), z[E(n-1) \setminus R]) \geq \epsilon^m, \text{ où la valeur de la constante } C_3 \text{ sera décidée plus tard.}$$

Considérons l'ensemble  $E(n-1) \setminus G(n-1)$  (qui est une union de  $(n-1)$ -cubes) comme une union de  $n$ -cubes. La  $n$ -ième génération d'élimination se passe en plusieurs étapes, que nous allons maintenant décrire.

*Etape A.* On considère les  $n$ -cubes  $R$  de  $E(n-1) \setminus G(n-1)$  qui vérifient

$$(13) \quad \partial(R) \geq (1 + \eta_0)\delta.$$

On se donne un ensemble maximal de tels cubes  $R_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , tels que  $\text{dist}(z(R_i), z(R_j)) > \epsilon^n$  et  $\text{dist}(R_i, R_j) > C_3 \epsilon^n$  pour  $i \neq j$ . On élimine tous les  $n$ -cubes  $Q_k$  encore dans  $E_k \setminus G(n-1)$  tels que  $\text{dist}(z(Q_k), z(R_j)) \leq \epsilon^n$  ou  $\text{dist}(Q_k, R_j) \leq C_3 \epsilon^n$  pour l'un des  $R_j$ .

L'ensemble  $G(n)$  sera la réunion de  $G(n-1)$  et de l'union des  $n$ -cubes  $R$  vérifiant (13) qui n'ont pas été éliminés lors de l'étape  $A$ . On ne touchera plus à ces cubes au cours de la construction. Notons que, si  $Q_k \subset E(n-1)$  est éliminé lors de cette étape, alors il restera un  $n$ -cube  $Q$  de  $G(n)$  tel que  $\text{dist}(z(Q), z(Q_k)) \leq C' \epsilon^n$  (où  $C'$  ne dépend que de  $C_0$  et  $C_3$ ).

*Etape B.* On considère, pour  $x \in \Sigma$ , l'ensemble  $T(x)$  formé de l'union des  $n$ -cubes qui rencontrent  $B(x, C_2 \epsilon^n)$ . On élimine une famille maximale de  $T_i = T(x_i)$  deux à deux disjoints, entièrement contenus dans  $E_k \setminus G(n-1)$  à la fin de l'étape  $A$ , et tels que

$$(14) \quad \partial(T_i) \leq (1 - \eta/2)\delta.$$

*Etape C.* On élimine maintenant tous les  $n$ -cubes  $Q_k$  encore dans  $E_k \setminus G(n-1)$  et tels que  $\partial(Q_k) \leq (1 - \eta)\delta$ .

*Etape D.* On retire, aussi longtemps qu'on peut, un  $n$ -cube  $Q_k \subset E_k \setminus G(n-1)$  tel que l'on puisse trouver un  $n$ -cube  $S$ , encore dans  $E_k$ , différent de  $Q_k$ , et pour lequel

$$(15) \quad |z(Q_k) \cap z(S)| \geq \eta_1 \delta \sigma(Q_k).$$

*Etape E.* On élimine, aussi longtemps qu'on peut, un  $n$ -cube  $Q_k$  tel que l'on puisse trouver un autre  $n$ -cube  $R \subset E_k$ , tel que  $\text{dist}(R, Q_k) \geq C_3 \epsilon^n$ , mais  $\text{dist}[z(R), z(Q_k)] \leq \epsilon^n$ .

Notons qu'à la fin de cette étape, il ne reste plus de  $n$ -cubes  $R$  et  $S$  dans  $E_k \setminus G(n-1)$ , tels que  $\text{dist}(Q, R) \geq C_3 \epsilon^n$  mais  $\text{dist}[z(Q), z(R)] \leq \epsilon^n$ .

Nous venons de finir la  $n$ -ième génération de notre construction. On note  $k(n)$  le dernier des indices  $k$ , et  $E(n) = E_{k(n)}$ . L'ensemble  $G(n)$  a été défini à la fin de l'étape  $B$ ; tout a été fait pour qu'il satisfasse encore aux conditions (11) et (12). Notons aussi que l'on n'a pas touché à  $G(n-1)$ , de sorte que l'on a bien  $G(n) \supset G(n-1)$ .

On décide de continuer indéfiniment le processus que nous venons de décrire, sauf si l'un des événements suivants se produit:

- (i)  $\sigma(G(n)) \geq \alpha$ ;
- (ii)  $\partial(E_k) \geq (1 + 2\eta_0)\delta$ ;
- (iii)  $\sigma(E_k) \leq \sigma(E_0)/2$  ou  $\partial(E_k) \leq (1 - \eta_2)\delta$ .

Nous verrons plus tard ce qu'il convient de faire lorsque (i) ou (ii) se produit. Nous allons d'abord prouver que (iii) n'arrive jamais en premier.

### 3. La Condition (iii) ne se produit pas

On se place dans le cas où aucun des temps d'arrêt ne s'est encore produit. En particulier, on suppose que

$$(16) \quad (1 - \eta_2)\delta \leq \partial(E_k) \leq (1 + 2\eta_0)\delta,$$

et, compte tenu de (4) et à condition que  $\epsilon$  soit assez petit,

$$(17) \quad \sigma(E_0)/3 \leq \sigma(E_{k+1}) \leq \sigma(E_0),$$

ce qui donne

$$(18) \quad C^{-1}\delta \leq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) \leq C\delta.$$

On va essayer d'évaluer conjointement  $\partial(E_k)$  et  $\sigma(E_k)$  en prouvant que le premier augmente un peu chaque fois que l'on diminue le second. On veut donc, pour chaque  $k$ , évaluer la quantité  $\mu(k) = \partial(E_{k+1})\partial(E_k)^{-1}$  en fonction de  $\sigma(Q_k) = \sigma(E_k) - \sigma(E_{k+1})$ . On sera amené à distinguer plusieurs cas; le lemme suivant résume les estimations que nous utiliserons.

**Lemme 2.** *Dans tous les cas, on a*

$$(19) \quad \mu(k) \geq 1 - C\sigma(Q_k).$$

*Lorsque  $Q_k$  a disparu lors d'une des étapes B ou C,*

$$(20) \quad \mu(k) \geq 1 + C^{-1}\eta\sigma(Q_k).$$

*Lorsque  $Q_k$  a disparu lors de l'étape D,*

$$(21) \quad \mu(k) \geq 1 + C^{-1}\eta_1\sigma(Q_k).$$

*Finalement, si  $Q_k$  a disparu lors de l'étape E,*

$$(22) \quad \mu(k) \geq 1 - C\eta_2\sigma(Q_k).$$

Commençons par prouver (19). On utilise l'estimation brutale suivante:

$$(23) \quad \begin{aligned} |z(E_{k+1})| &\geq |z(E_k)| - |z(Q_k)| \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_k) - C_0\sigma(Q_k) \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) - C_0\sigma(Q_k) \\ &\geq [\partial(E_k)\sigma(E_{k+1})][1 - C\sigma(Q_k)] \end{aligned}$$

grâce à (18), ce qui donne (19).



Supposons maintenant que  $Q_k$  ait été oté à l'étape  $B$ . On a

$$|z(Q_k)| \leq (1 - \eta/2)\delta\sigma(Q_k)$$

grâce à (14), de sorte que

$$\begin{aligned} |z(E_{k+1})| &\geq |z(E_k)| - |z(Q_k)| \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_k) - (1 - \eta/2)\delta\sigma(Q_k) \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) + \sigma(Q_k)[\partial(E_k) - (1 - \eta/2)\delta] \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) + \sigma(Q_k)[(1 - \eta_2)\delta - (1 - \eta/2)\delta] \end{aligned}$$

(à cause de (16))

$$\begin{aligned} &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) + \sigma(Q_k)[(\eta/2) - \eta_2]\delta \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1})[1 + C^{-1}\sigma(Q_k)[(\eta/2) - \eta_2]/2] \end{aligned}$$

(grâce à (18))

$$\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1})[1 + C^{-1}\eta\sigma(Q_k)]$$

si  $\eta_2$  est assez petit.

On en déduit (20) lorsque  $Q_k$  a été oté à l'étape  $B$ . Si  $Q_k$  a disparu au cours de l'étape  $C$ , on utilise l'inégalité  $|z(Q_k)| \leq (1 - \eta)\delta\sigma(Q_k)$  au lieu de (14), et on obtient (20) de la même manière.

Passons à l'inégalité (21). Donnons-nous un  $Q_k$  qui a été retiré à l'étape  $D$ , et écrivons

$$\begin{aligned} |z(E_{k+1})| &= |z(E_k)| - |z(Q_k)| + |z(E_{k+1}) \cap z(Q_k)| \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_k) - |z(Q_k)| + \eta_1\delta\sigma(Q_k). \end{aligned}$$

Notons que  $\partial(Q_k) \leq (1 + \eta_0)\delta$ , car sinon  $Q_k$  serait dans  $G(n)$  ou aurait disparu lors de l'étape  $A$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} |z(E_{k+1})| &\geq \partial(E_k)\sigma(E_k) + \sigma(Q_k)[\eta_1\delta - (1 + \eta_0)\delta] \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) + \sigma(Q_k)[(1 - \eta_2)\delta + \eta_1\delta - (1 + \eta_0)\delta] \\ &\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) + \eta_1\delta\sigma(Q_k)/3 \end{aligned}$$

si  $\eta_2$  et  $\eta_0$  sont assez petits par rapport à  $\eta_1$ . On en déduit (21) en divisant par  $\partial(E_k)\sigma(E_{k+1})$  et en utilisant (18).

Pour montrer (22), utilisons le fait que, si  $Q_k$  a disparu à l'étape  $E$ , on a encore

$$|z(Q_k)| \leq (1 + \eta_0)\delta\sigma(Q_k).$$

Il vient

$$\begin{aligned}
|z(E_{k+1})| &\geq |z(E_k)| - |z(Q_k)| \\
&= \partial(E_k)\sigma(E_k) - |z(Q_k)| \\
&\geq \partial(E_k)\sigma(E_k) - (1 + \eta_0)\delta\sigma(Q_k) \\
&\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+1}) - \sigma(Q_k)(\eta_2 + \eta_0),
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit aisément (22) si  $\eta_0 \leq \eta_2$ . Nous avons prouvé le Lemme 2.

Lorsque, au cours d'une des étapes  $A$  ou  $E$ , on retire un grand nombre de  $n$ -cubes  $Q_j$  (disons, pour  $k \leq j < k + L$ ) tels que les  $z(Q_j)$  soient contenus dans une même boule de rayon  $\leq C\epsilon^n$ , on utilisera l'estimation qui suit de préférence à celle du Lemme 2:

$$\begin{aligned}
|z(E_{k+L})| &\geq |z(E_k)| - C'\epsilon^{nd} \\
&\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+L}) + \partial(E_k)[\sigma(E_k) - \sigma(E_{k+L})] - C'\epsilon^{nd} \\
&\geq \partial(E_k)\sigma(E_{k+L}) + (\delta/2)[\sigma(E_k) - \sigma(E_{k+L})]
\end{aligned}$$

si les  $Q_j$  sont assez nombreux pour que

$$(24) \quad [\sigma(E_k) - \sigma(E_{k+L})] \geq 10 C'\delta^{-1}\epsilon^{nd}.$$

Dans ce cas, on divise par  $\partial(E_k)\sigma(E_{k+L})$ ; si l'on a de plus

$$(25) \quad [\sigma(E_k) - \sigma(E_{k+L})] \leq \sigma(E_0)/10,$$

on peut appliquer l'équivalent de (18), et il vient

$$(26) \quad \mu(k)\mu(k+1) \cdots \mu(k+L-1) \geq 1 + C^{-1}[\sigma(Q_k) + \cdots + \sigma(Q_{k+L-1})].$$

Notons que (25) n'est en fait jamais une restriction: il suffit, s'il y a trop de cubes  $Q_j$ , de faire plusieurs paquets, pour lesquels on aura (25), et auxquels on appliquera (26) séparément. D'autre part, quitte à modifier l'ordre dans lequel on retire les  $Q_j$ , on peut s'arranger pour que l'on puisse regrouper certains des  $Q_j$  en paquets de la forme  $B_s = \{Q_j : k(s) \leq j < k(s) + L(s)\}$  tels que (24) et (25) soient vrais, tout cela de manière à ce que l'on ait la propriété suivante:

$$(27) \quad \text{pour chaque boule } B \subset \mathbb{R}^d \text{ de rayon } \epsilon^n, \text{ la mesure totale pour } \sigma \text{ des ensembles } Q_j \text{ qui ont été otés à l'étape } A \text{ ou } E, \text{ tels que } z(Q_j) \text{ rencontre } B, \text{ et qui ne font partie d'aucun d'un des paquets } B_s, \text{ est inférieure à } C_4\epsilon^{nd} \text{ (où } C_4 \text{ dépend de } C_0 \text{ et de } \delta).$$

Nous supposons dans la suite que l'on a fait un tel choix de l'ordre des  $Q_j$ , et des  $B_s$ .

Nous utiliserons la convention suivante. Lorsque  $Q_k$  est dans l'un des paquets  $B_s$ , nous dirons que  $k \in O$ . Sinon, nous noterons  $k \in A$  (resp.  $BC, D, E$ )

le fait que  $Q_k$  a disparu à l'étape  $A$  (resp.  $B$  ou  $C, D, E$ ). Lorsqu'on peut appliquer l'une des inégalités (20), (21), ou (26), nous nous estimerons satisfaits parce que, dans ce cas, la diminution de  $\sigma(E_k)$  est clairement liée à une augmentation de  $\partial(E_k)$ . Lorsque  $k \in A$  ou  $k \in E$ , nous allons essayer d'associer à  $k$  un événement plus favorable.

Si  $Q_k$  est une victime de l'étape  $A$  qui ne fait pas partie d'un des blocs  $B_s$ , on note  $T(k) = Q$ , où  $Q$  est l'un des cubes de  $G(n) \setminus G(n-1)$  qui ont été sélectionnés lors de l'étape  $A$ , et qui est tel que  $\text{dist}(z(Q), z(Q_k)) \leq C'\epsilon^n$  (où  $C'$  est assez grand par rapport à  $C_0$  et à  $C_3$ : voir la remarque qui suit la définition de l'étape  $A$ ).

Le cas où  $k \in E$  est un peu plus compliqué. Donnons-nous un tel  $k$  et soit  $T$  l'union des  $n$ -cubes qui rencontrent  $B(x, C_2\epsilon^n)$  (où  $x$  est un point de  $Q_k$  pris au hasard). Nous allons distinguer cinq cas.

- (i)  $T$  n'est pas contenu dans  $E(n-1)$ . Il se peut que ce soit parce que  $Q_k$  est à distance  $\leq C\epsilon^n$  du bord de  $I_0$ . Dans ce cas, on notera  $T(k) = \emptyset$ . Sinon,  $Q_k$  est à distance  $\leq C\epsilon^n$  d'un des cubes  $R_j$  qui ont été otés lors d'une génération précédente; alors on pose  $T(k) = R_j$ .
- (ii)  $T$  est contenu dans  $E(n-1)$ , mais une partie de  $T$  a disparu lors de l'étape  $A$ . Dans ce cas, on note  $T(k) = Q_j$ , où  $Q_j$  est un  $n$ -cube de  $G(n)$  qui a été sélectionné à l'étape  $A$ , et tel que  $\text{dist}(z(Q_j), z(Q_k)) \leq C''\epsilon^n$  (où  $C''$  dépend de  $C_0, C_2$  et  $C_3$ ).
- (iii)  $T$  était encore contenu dans  $E_m$  à la fin de l'étape  $A$ , et  $\partial(T) < (1 - \eta/2)\delta$ . Alors,  $T$  n'a pas disparu non plus au cours de l'étape  $B$  (sinon  $Q_k$  ne serait plus là). On peut donc trouver un paquet  $T_i$  de cubes qui a été éliminé lors de la phase  $B$ , et qui est à distance  $\leq CC_2\epsilon^n$  de  $Q_k$ . On prend  $T(k) = T_i$ .
- (iv)  $T$  était encore contenu dans  $E_m$  à la fin de l'étape  $A$ ,  $\partial(T) \geq (1 - \eta/2)\delta$ , et  $z(T)$  ne contient pas la boule centrée en  $z(x)$  et de rayon  $C_1\epsilon^n/10$ . Dans ce cas, on peut appliquer (9), et trouver un  $n$ -cube  $R \subset T$ , tel que

$$|z(R)| \geq (1 + 2\eta)\sigma(R)\partial(T) \geq (1 + \eta_0)\delta\sigma(R).$$

Comme  $R$  n'a pas disparu à l'étape  $A$  puisque  $T$  était encore intact à la fin de cette étape,  $R$  est dans  $G(n)$ . Ce cas est impossible, car si  $R$  était dans  $G(n)$ , on aurait éliminé tous ses voisins lors de l'étape  $A$ .

- (v) Il reste le cas où  $T$  était encore contenu dans  $E_m$  à la fin de l'étape  $A$ , où  $\partial(T) \geq (1 - \eta/2)\delta$ , et  $z(T)$  contient la boule centrée en  $z(v)$  et de rayon  $C_1\epsilon^n/10$ . Soit  $S$  un des  $n$ -cubes encore contenu dans  $E_k$  tels que

$$\text{dist}(Q_k, S) \geq C_3\epsilon^n \quad \text{et} \quad \text{dist}(z(Q_k), z(S)) \leq \epsilon^n.$$

On choisit maintenant  $C_1$  assez grand par rapport à  $C_0$  pour que la dernière inégalité implique que  $z(S)$  est contenu dans  $z(T)$ . Comme il y a moins de  $C$   $n$ -cubes dans  $T$ , on peut trouver un cube  $Q$  dans  $T$  tel que

$|z(S) \cap z(Q)| \geq C^{-1} \delta \sigma(S) > \eta_1 \delta \sigma(S)$  si  $\eta_1$  est assez petit. Comme  $S$  est encore là, c'est que  $Q$  a disparu avant la fin de l'étape  $D$  (donc au cours de l'une des étapes  $B$ ,  $C$ , ou  $D$ ). On prend  $T(k) = Q$ .

Nous avons maintenant défini  $T(k)$  dans tous les cas qui nous intéressent, mais nous ne sommes pas encore sûrs que  $T(k)$  corresponde vraiment à un événement plus favorable. Définissons donc un autre ensemble  $U(k)$ . Si  $T(k) = \emptyset$ , si  $T(k)$  est l'un des cubes de  $G(n)$ , ou si  $T(k)$  est l'un des cubes pour lesquels on peut appliquer l'une des inégalités favorables (20), (21), ou (26), on garde  $U(k) = T(k)$ . Sinon,  $k \in E$  et l'on est dans le cas (i); on peut donc définir  $U(k)$  de manière récursive (génération par génération) par  $U(k) = U(j)$ , où  $T(k) = Q_j$ .

**Lemme 3.** *Si  $R$  est un  $n$ -cube, ou  $\emptyset$ , notons  $A(R)$  l'union des  $Q_k$  tels que  $U(k) = R$ ; notons aussi  $B(R)$  l'union des  $Q_k$  de  $A(R)$  qui ne sont pas de la même génération que  $R$  (dans le cas de  $\emptyset$ , prenons  $B(R) = A(R)$ ). Alors*

$$(28) \quad \sigma(B(R)) \leq \tau \sigma(R),$$

où  $\tau$  est aussi petit qu'on veut pourvu que  $\epsilon$  soit assez petit, et

$$(29) \quad \sigma(A(R)) \leq C \sigma(R).$$

Enfin,  $\sigma(A(\emptyset)) \leq \tau$ .

Pour prouver le lemme, commençons par estimer  $\sigma(A(R) \setminus B(R))$ . Si  $R$  est l'un des  $n$ -cubes de  $G(n)$ , tous les  $Q_k$  de la même génération que  $R$  tels que  $T(k) = R$  sont tels que  $\text{dist}(z(Q_k), z(R)) \leq C' \epsilon^n$ ; grâce à (27), leur mesure totale pour  $\sigma$  est inférieure à  $CC_4 \epsilon^{nd} \leq C \sigma(R)$  (à cause de (5)). Si  $R$  est l'un des  $Q_j$  qui ont disparu à la génération  $n$ , tous les  $Q_k$  de la même génération tels que  $T(k) = R$  sont à distance  $\leq C \epsilon^n$  de  $R$ , et par conséquent leur mesure totale pour  $\sigma$  est  $\leq C \sigma(R)$  à cause de (1).

Il nous faut encore traiter les  $Q_k$  des générations précédentes. Si  $T(k)$  est l'un des cubes  $S$  que nous venons de traiter, alors  $Q_k$  est contenu dans l'ensemble des points qui sont à distance  $\leq C \epsilon^{n+1}$  du bord de  $S$ . L'hypothèse (Q) nous dit que la mesure pour  $\sigma$  de cet ensemble est  $\leq \tau \epsilon^{nd}$ , où  $\tau$  est aussi petit que l'on veut pourvu que  $\epsilon$  soit assez petit. La mesure totale de l'union des  $Q_k$  tels que  $T(k)$  soit contenu dans l'un des  $S$  est donc  $\leq C \tau \sigma(R)$ . La même chose vaut pour les  $Q_m$  de la même génération que l'un des  $Q_k$  et tels que  $T(m) \subset Q_k$  (on applique notre première majoration à chaque  $Q_k$ ). On traite pareillement les cubes des générations suivantes dont l'une des images par  $T$  tombe dans  $R$ . On obtient ainsi (28) (avec la constante  $C\tau$ ); (29) s'ensuit aussitôt. La dernière inégalité se montre comme (28). On en déduit le lemme 3.

Nous allons bientôt pouvoir estimer  $P = \prod \mu(k)$ , où le produit porte sur  $k < k_0$  pour un  $k_0$  tel qu'aucun des temps d'arrêt ne s'est encore produit. On écrit  $P = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4 \Pi_5$ , où

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \prod_{k \in BC} \left[ \mu(k) \prod_{j \in U^{-1}(Q_k)} \mu(j) \right], & \Pi_2 &= \prod_{k \in D} \left[ \mu(k) \prod_{j \in U^{-1}(Q_k)} \mu(j) \right], \\ \Pi_3 &= \prod_{k \in O} \left[ \prod_{j \in U^{-1}(Q_k)} \mu(j) \right], & \Pi_4 &= \prod_{R \in G(n)} \prod_{j \in U^{-1}(Q_k)} \mu(j), \\ \Pi_5 &= \prod_{j \in U^{-1}(\emptyset)} \mu(j). \end{aligned}$$

Bien entendu, on ne fait porter les produits que sur  $j$  et  $k$  inférieurs à  $k_0$ . Notons qu'aucun des termes du produit n'a été oublié: certains ont seulement été regroupés avec d'autres pour faciliter le calcul qui va suivre. Nous allons maintenant minorer chacun des  $\Pi_i$  séparément.

En ce qui concerne  $\Pi_1$ , notons  $F(k)$ , pour  $k \in BC$ , l'ensemble des  $j \in U^{-1}(Q_k)$  tels que  $Q_j$  ait disparu à l'étape  $E$ . Pour ces  $Q_j$ , on utilisera (22). Si  $k \in BC$  et si  $j$  n'est pas dans  $F(k)$ , alors  $Q_j$  est d'une génération différente de celle de  $k$ . On notera  $H(k)$  l'ensemble des  $j \in U^{-1}(Q_k)$  qui ne sont pas dans  $F(k)$  (on leur appliquera (19)). Compte tenu de (20) et du Lemme 3,

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\geq \prod_{k \in BC} [1 + C^{-1} \eta \sigma(Q_k)] \prod_{j \in F(k)} [1 - C \eta_2 \sigma(Q_j)] \prod_{j \in H(k)} [1 - C \sigma(Q_j)] \\ &\geq \prod_{k \in BC} [1 + C^{-1} \eta \sigma(Q_k)] [1 - C' \eta_2 \sigma(Q_k)] [1 - C' \tau \sigma(Q_k)] \\ &\geq \prod_{k \in BC} [1 + \eta \sigma(Q_k) / C''] \end{aligned}$$

à condition que  $\eta_2$  et  $\tau$  soient assez petits par rapport à  $\eta$ .

Le même calcul donne  $\Pi_2 \geq \prod [1 + C^{-1} \eta_1 \sigma(Q_k)]$ , où le produit porte sur  $k \in D$ , et  $\Pi_3 \geq \prod [1 + C^{-1} \sigma(Q_k)]$ , avec un produit qui porte sur  $k \in O$  (la seule différence est que l'on applique (21) au lieu de (20) dans le premier cas; dans le second cas, on regroupe les termes en paquets correspondant aux  $B_s$ , et on applique (26).

Lorsque  $R \in G(n)$  et  $U(j) = R$ , on minore  $\mu(j)$  en utilisant (19). Il vient, en utilisant (29),  $\Pi_4 \geq \prod [1 - C \sigma(R)]$ , où le produit porte sur tous les cubes de  $G(n)$ . Puisque le temps d'arrêt (i) ne s'est pas encore produit, la somme des  $\sigma(R)$  est inférieure à  $\alpha$ ; en choisissant  $\alpha$  assez petit, on obtient  $\Pi_4 \geq (1 - \eta_2/10)$ .

Pour minorer  $\Pi_5$ , on utilise à nouveau (19) et le Lemme 3. Il vient  $\Pi_5 \geq 1 - C\tau \geq (1 - \eta_2/10)$  si  $\epsilon$  est assez petit.

Nous sommes enfin en mesure de prouver que le temps d'arrêt (iii) ne se produit pas en premier. Tout d'abord, notons que  $P = \prod \mu(k) \geq (1 - \eta_2/2)$ , et par conséquent que (iii) ne peut se produire que si  $\sigma(E_{k_0}) \leq \sigma(E_0)/2$ , ce qui entraîne  $\sum \sigma(Q_k) \geq \sigma(E_0)/2$ . Si c'était le cas, on aurait encore, en utilisant le

Lemme 3 et si  $\alpha$  est assez petit,  $\sum' \sigma(Q_k) \geq \sigma(E_0)/C$ , où la somme ne porte que sur les  $k < k_0$  tels que  $k \in BC$ ,  $k \in D$  ou  $k \in O$ . Comme nous venons de voir que  $P \geq (1 - \eta_2/2) \prod [1 + \eta_1 \sigma(Q_k)/C]$ , où le produit porte justement sur  $k \in (BC \cup D \cup O)$ ; on en déduit que  $P \geq 1 + 3\eta_0$ , si  $\eta_2$  et  $\eta_0$  sont assez petits par rapport à  $\eta_1$ . Dans ce cas, (ii) s'est produit en premier. Nous avons enfin montré que (iii) ne se produit pas.

#### 4. Fin de la Preuve du Théorème

Finissons d'abord la démonstration du Lemme 1. Si le temps d'arrêt (i) se produit en premier, choisissons  $E = \cup E(R)$ , où l'union porte sur tous les cubes  $R$  composant  $G(n)$ , et  $E(R)$  est donné par l'hypothèse (10). Comme  $\sigma(G(n)) \geq \alpha$ , il vient

$$\sigma(E) \geq \sum_{m \leq n} \sum_{R \in G(m) \setminus G(m-1)} \theta_0 \epsilon^{md} \geq \theta_0 C_0^{-1} \alpha = \theta.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la restriction de  $z$  à  $E$  est  $M$ -bi-lipschitzienne. Nous ferons cette vérification un peu plus loin.

Supposons maintenant que le temps d'arrêt (ii) se produise au cours de la  $n$ -ième génération. Soient  $V$  l'union des  $n$ -cubes de  $E_k \setminus G(n-1)$  tels que  $\partial(Q) \geq (1 + \eta_0)\delta$ ,  $W$  l'union des cubes de  $G(n-1)$ , et  $X$  l'union des autres cubes de  $E_k \setminus G(n-1)$ . On a

$$\begin{aligned} (1 + 2\eta_0)\delta\sigma(E_k) &\leq \partial(E_k)\sigma(E_k) \\ &= |z(E_k)| \\ &\leq |z(V)| + |z(W)| + |z(X)| \\ &\leq |z(V)| + C\sigma(W) + (1 + \eta_0)\delta\sigma(X) \\ &\leq |z(V)| + C\sigma(W) + (1 + \eta_0)\delta\sigma(E_k), \end{aligned}$$

d'où on déduit que  $\eta_0\delta\sigma(E_k) \leq |z(V)| + C\sigma(W)$ . Or  $\sigma(E_k) \geq \sigma(E_0)/2$ , et  $\sigma(W) \leq \alpha$ . Donc, si  $\alpha$  est assez petit,  $|z(V)| \geq \eta_0\delta\sigma(E_0)/3$ . On en déduit entre autres que  $\sigma(V) > \alpha$ , et par conséquent, le temps d'arrêt (ii) s'est produit au cours de l'étape  $A$  (sinon, (i) se serait produit en premier). On décide de finir l'étape  $A$  de la  $n$ -ième génération.

Nous avons vu lors de la définition de l'étape  $A$  que pour tout  $n$ -cube  $R$  dans  $V$ , on peut trouver un  $n$ -cube  $Q$ , qui reste sélectionné à l'issue de l'étape  $A$ , et tel que  $\text{dist}(z(Q), z(R)) \leq C'\epsilon^n$ . Donnons-nous une constante  $C'' \geq C'$ . Comme  $|z(V)| \geq \eta_0\delta\sigma(E_0)/3 \geq 1/C$ , l'ensemble  $z(V)$  ne peut pas être entièrement recouvert par moins de  $C^{-1}(C''\epsilon^n)^{-d}$  boules de rayon  $C''\epsilon^n$ , ce qui implique, par un facile argument de recouvrement, que si  $C''$  est assez grand, on peut trouver presque autant de  $n$ -cubes de  $V$  dont les images soient à distance

mutuelle  $> 2C'\epsilon^n$ . Il reste donc au moins  $C^{-1}(C''\epsilon^n)^{-d}$   $n$ -cubes dans  $G(n)$  à la fin de l'étape  $A$ . Alors, si  $\alpha$  est assez petit,  $\sigma(G(n)) \geq \alpha$ . On finit la construction comme quand (i) s'est produit en premier.

Finalement, dans le cas où aucun des temps d'arrêts ne se produit, nous pouvons nous permettre de jeter les  $G(n)$ , et de garder  $E = \cap [E(n) \setminus G(n)]$ . L'inégalité  $\sigma(E) \geq \sigma(E_0)/3$  est due à ce que ni (i) ni (iii) ne se sont produits.

Il nous reste encore à vérifier que, dans les trois cas, la restriction de  $z$  à  $E$  est bi-lipschitzienne. Lors des étapes  $A$  et  $E$  de notre processus d'élimination, nous nous sommes assurés que si les  $n$ -cubes  $Q$  et  $R$  sont encore dans  $E_k$  à la fin de la  $n$ -ième génération, et sont tels que  $\text{dist}(Q, R) \geq C_3\epsilon^n$ , alors on a  $\text{dist}(z(Q), z(R)) \geq \epsilon^n$ . Donnons-nous deux points  $x \neq y$  dans  $E$ . Soit  $m$  le plus petit entier tel que  $|x - y| > 2C_3\epsilon^m$ . Dans le cas où aucun temps d'arrêt ne se produit,  $x$  et  $y$  sont dans deux  $m$ -cubes lors de la génération  $m$  (parce qu'ils ne sont pas dans  $G(m - 1)$ ), et comme la distance entre ces cubes est  $\geq C_3\epsilon^m$ , il vient  $|z(x) - z(y)| \geq \epsilon^m \geq c\epsilon^{-1}|x - y|$ . Ce raisonnement reste valable dans les deux autres cas, à condition que le temps d'arrêt ne se soit pas encore produit avant la génération  $m$ , et que  $x$  et  $y$  soient dans des cubes de  $E(m)$  différents. Si aucun des temps d'arrêt ne s'est produit avant la génération  $m$  et si  $x$  et  $y$  sont dans un même cube  $R$  de  $E(m)$ , alors ce cube est un des cubes de  $G(m - 1)$  et l'inégalité  $|z(x) - z(y)| \geq M_0^{-1}|x - y|$  vient de la définition de  $E(R)$ . Il ne reste plus que le cas où l'un des temps d'arrêt s'est produit avant la génération  $m$  (disons, à la génération  $n < m$ ). Dans ce cas,  $x$  et  $y$  sont tous les deux dans des cubes de  $G(n)$ , et l'on peut supposer grâce à l'argument qui précède que ces cubes sont différents. Comme  $|x - y| \leq 2C_3\epsilon^{m-1}$ , ces cubes sont tous les deux des  $(m - 1)$ -cubes (donc en fait,  $n = m - 1$ ), et l'on s'est assuré lors de l'étape  $A$  que leurs images étaient distantes d'au moins  $\epsilon^{m-1}$ . Dans ce cas aussi, donc,  $|z(x) - z(y)| \geq c\epsilon^{-1}|x - y|$ . Ainsi, la restriction de  $z$  à  $E$  est  $M$ -bi-lipschitzienne pour un certain  $M$ , et nous avons fini de démontrer le Lemme 1.

Nous voulons maintenant déduire le Théorème 1 du Lemme 1. Notons d'abord que, par simple changement d'échelle, le théorème est encore valable pour tout  $m$ -cube  $I_0$  (même si  $m \neq 0$ ) dès qu'il est vrai pour tout 0-cube  $I_0$ . Ainsi, le Lemme permet de réduire la démonstration du théorème au cas où  $|z(I_0)| \geq (1 + \eta_0)\delta$ . Une nouvelle application du Lemme 1, avec une nouvelle valeur  $\delta_1 = (1 + \eta_0)\delta$  de  $\delta$ , permet de se réduire au cas où  $|z(I_0)| \geq (1 + \eta_0)^2\delta$ . Après un nombre  $N \leq C \text{Log}(C_0\delta^{-1})/\text{Log}(1 + \eta_0)$  d'applications du Lemme 1, nous pouvons nous contenter de prouver le théorème lorsque  $|z(I_0)| \geq 2C_0^3$ . (Tout cela est valable à condition que  $\epsilon$  soit assez petit pour que l'on puisse appliquer le Lemme 1 chaque fois.) Or le théorème est trivial lorsque  $|z(I_0)| \geq 2C_0^3$ , parce que l'hypothèse n'en est jamais satisfaite (à cause de (1), (4) et (7)). Nous avons donc entièrement prouvé le Théorème 1.

## B. Applications

### 1. Le cas de $\mathbb{R}^d$

Dans le cas où  $\Sigma$  est  $\mathbb{R}^d$  et  $\sigma$  la mesure de Lebesgue, la situation est un peu plus simple que dans le cas général. Les conditions (1), (2), (7) et (Q) sont trivialement satisfaites pour toute fonction lipschitzienne  $z$  (on prend pour  $n$ -cubes les cubes  $\epsilon^{-1}$ -adiques, où  $\epsilon$  est l'inverse d'un entier assez grand). Nous allons aussi prouver que (9) est toujours vrai, ce qui donnera le résultat suivant.

**Théorème 2.** Soit  $I_0$  le cube unité de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $z: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction lipschitzienne. On suppose que  $|z(I_0)| \geq \delta$  pour un  $\delta > 0$ . Alors on peut trouver un ensemble compact  $E \subset I_0$ , tel que  $|E| > \theta$  et, pour tous  $x, y$  dans  $E$ ,

$$|z(x) - z(y)| \geq M^{-1}|x - y|.$$

Les constantes  $\theta > 0$  et  $M$  ne dépendent que de  $\delta$  et de la constante de Lipschitz de  $z$ .

Pour prouver le théorème, on peut bien sûr se ramener au cas où  $z$  est 1-lipschitzienne. Nous ferons appel au Théorème 1, avec pour  $\sigma$  la mesure de Lebesgue. Les hypothèses (1), (2), (Q) et (7) sont satisfaites, (8) est l'hypothèse du Théorème 2, de sorte qu'il ne nous reste plus qu'à vérifier que (9) est toujours vrai. Nous utiliserons le lemme qui suit.

**Lemme 4.** Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\tau > 0$  et  $\gamma > 0$  tels que l'on ait le résultat suivant. Soit  $Q$  un cube de  $\mathbb{R}^d$  et  $z: Q \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction 1-Lipschitzienne. Supposons que  $\partial(Q) = |z(Q)|/|Q| \geq \delta$ . Alors l'une des affirmations suivantes est vraie:

(30)  $z(Q)$  contient une boule de centre  $z(v)$  et de rayon  $\tau r$  (où  $v$  est le centre de  $Q$  et  $r$  en est le côté);

(31) on peut trouver un cube  $R$  de côté  $\geq \tau r$  tel que  $\partial(R) \geq (1 + \gamma) \partial(Q)$ .

Supposons pour le moment que nous ayons prouvé le Lemme 4, et montrons la propriété (9). Donnons-nous un  $n \geq 0$ , un point  $x \in \mathbb{R}^d$ , une constante  $C_2$ , et soit  $T$  l'union des  $n$ -cubes qui rencontrent  $B(x, C_2 \epsilon^n)$ . Supposons qu'aucune des deux conclusions de (9) ne soit vraie. Nous voulons montrer que si  $C_2$  est assez grand par rapport à  $C_1$ , et si  $\eta$  est assez petit, alors on a une contradiction.



D'abord, on peut supposer par changement d'échelle que  $n = 0$ . On peut aussi supposer que  $C_1$  est aussi grand que l'on veut. Soit  $S$  un cube, centré en un point  $v \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $|v - x| \leq d$ , et de côté  $2[d^{-1}C_2]$  (en notant  $[\cdot]$  la partie entière). Il est clair que  $z(S)$  ne contient pas la boule centrée en  $z(v)$  et de rayon  $C_1 + d$ . D'autre part, puisque  $T$  ne vérifie pas la seconde conclusion et  $S$  est une union de 0-cubes,

$$|z(S)| \leq (1 + 2\eta)|S|\partial(T),$$

et aussi

$$|z(T \setminus S)| \leq (1 + 2\eta)|(T \setminus S)|\partial(T),$$

d'où

$$\begin{aligned} |z(S)| &\geq |z(T)| - |z(T \setminus S)| \\ &\geq [|T| - (1 + 2\eta)|(T \setminus S)|]\partial(T) \\ &\geq (1 - C\eta)|S|\partial(T). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\partial(S) \geq \delta/3$  et, si  $R$  est un 0-cube contenu dans  $S$ , alors

$$\partial(R) \leq (1 + 2\eta)\partial(T) \leq (1 + 2\eta)(1 - C\eta)^{-1}\partial(S).$$

Soit maintenant  $R$  un cube quelconque contenu dans  $S$ , mais dont le côté est  $\geq N$  (où  $N$  sera décidé dans un instant). On obtient, en approchant  $R$  par une union de 0-cubes contenus dans  $R$ ,

$$|z(R)| \leq (1 + 2\eta)(1 - C\eta)^{-1}\partial(S)|R| + C|R|^{(d-1)/d} \leq (1 + C\eta)\partial(S)|R|$$

si l'on choisit  $N \geq \eta^{-1}$ , par exemple. En résumé, si  $r$  est le côté de  $S$ , tous les cubes de côté  $\geq [CC_2^{-1}\eta^{-1}]r$  contenus dans  $S$  sont tels que

$$|z(R)| \leq (1 + C\eta)|R|\partial(S),$$

et d'autre part  $z(S)$  ne contient pas la boule de centre  $z(v)$  et de rayon  $[CC_1C_2^{-1}]r$ . On obtient une contradiction avec le Lemme 4 (appliqué avec  $\delta/3$ , avec l'hypothèse un peu plus faible que  $z$  est  $C_0$ -lipschitzienne, et après changement d'échelle) dès que  $C\eta \leq \gamma$  et que  $C_2$  est assez grand pour que  $[CC_2^{-1}\eta^{-1}] + [CC_1C_2^{-1}] \leq \tau$ . Donc (9) est bien une conséquence du Lemme 4.

Pour finir de prouver le Théorème 2, il ne nous reste plus qu'à établir le Lemme 4. On peut voir ce lemme comme une estimation de distortion, que nous allons prouver par contradiction et par compacité. L'idée est, grossièrement, que si le lemme n'est pas vrai, alors on peut trouver une application lipschitzienne  $z$ , telle que  $|z(A)| = \delta|A|$  pour tout  $A$  (car (31) est faux), mais qui n'est pas un homéomorphisme (car (30) n'a pas lieu).

Par translation et changement d'échelle, on peut ramener la preuve du lemme au cas où  $Q$  est le cube unité  $I_0$ . On peut aussi supposer que  $\partial(I_0) = \delta$  (si non, on peut toujours considérer  $z^*(x) = [\partial(I_0)^{-1}\delta]^{1/d}z(x)$ ).

Supposons que l'on ait une suite  $z_n$  de fonctions 1-lipschitziennes, définies sur le cube unité  $I_0$ , telles que  $|z_n(I_0)| = \delta$ , telles que la boule de centre  $z_n(v)$  (si  $v$  est le centre de  $I_0$ ) et de rayon  $1/n$  ne soit pas contenue dans  $z_n(I_0)$ , et telles que, pour tout cube  $R \subset I_0$  de côté  $\geq 1/n$ , on ait  $|z_n(R)| \leq (1 + 1/n)\delta$ . On veut arriver à une contradiction. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $z_n$  converge uniformément vers une fonction  $z$  (qui est donc, elle aussi, 1-lipschitzienne).

**Lemme 5.** *Si  $R \subset I_0$  est un cube (compact),  $\limsup |z_n(R)| \leq |z(R)|$ .*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver un ouvert  $U$  contenant  $z(R)$ , et tel que  $|U| \leq |z(R)| + \epsilon$ . Comme  $\text{dist}(z(R), U^c) > 0$ ,  $z_n(R)$  est contenu dans  $U$  pour  $n$  assez grand, et on en déduit le lemme.

**Lemme 6.** *Si  $R$  est un cube dyadique contenu dans  $I_0$ ,  $|z(R)| \geq \delta|R|$ .*

DÉMONSTRATION. Compte tenu du Lemme 5, il suffit de montrer que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $|z_n(R)| \geq \delta|R| - \epsilon$  pour  $n$  assez grand. Écrivons  $I_0 = \cup R_j$ , où l'union porte sur tous les cubes dyadiques de la même taille que  $R$  et, disons, où  $R = R_0$ . Alors,

$$\delta = |z_n(I_0)| \leq \sum |z_n(R_j)| \leq |z_n(R)| + \sum_{j \neq 0} (1 + 1/n)\delta|R_j|,$$

donc  $|z_n(R)| \geq \delta|R| - 1/n$ , d'où on déduit le lemme.

Notons que, comme la fonction  $z$  est lipschitzienne, elle est différentiable presque-partout (voir [ST], p. 242).

**Lemme 7.** *Soit  $x_0$  un point de différentiabilité de  $z$ , et  $Jz(x_0)$  le déterminant Jacobien de  $z$  en  $x_0$ . Alors  $|Jz(x_0)| = \delta$ .*

DÉMONSTRATION. Si  $x_0$  est un point de différentiabilité de  $z$ , le rapport  $|z(R)| / |R|$  a une limite supérieure  $\leq |Jz(x_0)|$  lorsque le cube  $R$  tend vers  $x_0$ . En particulier, à cause du Lemme 6,  $|Jz(x_0)| \geq \delta$ . Supposons que l'inégalité soit stricte. Donnons-nous  $\epsilon > 0$ , et un cube dyadique  $R \subset I_0$  contenant  $x_0$  et assez petit pour que, sur  $R$ ,  $|z(x) - z(x_0) - M(x - x_0)| \leq \epsilon|x - x_0|$  (où  $M$  est l'application linéaire tangente à  $z$ ). Soit  $B$  l'image du cube  $(1 - C\epsilon)R$  par l'application  $x \rightarrow z(x_0) + M(x - x_0)$ ; pour tout point  $Z \in B$ , considérons l'applica-

tion  $t \rightarrow (z(t) - Z)|z(t) - Z|^{-1}$ , du bord  $\partial R$  de  $R$  dans la sphère unité. Si  $C$  est assez grand et  $\epsilon$  assez petit,

$$|z(t) - Z| \geq |z(x_0) + M(t - x_0) - Z| - |z(t) - z(x_0) - M(t - x_0)| > 0$$

pour tout  $t \in \partial R$ , de sorte que cette application est bien définie, et de degré  $\pm 1$  (par continuité du degré, et parce que le résultat est vrai lorsqu'on remplace  $z(t)$  par  $z(x_0) + M(t - x_0)$ ). Comme  $\text{dist}(B, z(\partial R)) > 0$ , l'application

$$t \rightarrow (z_n(t) - Z)|z_n(t) - Z|^{-1}$$

est encore définie et de degré  $\pm 1$  pour  $n$  assez grand et pour tout  $Z \in B$ . On en déduit que  $Z$  est dans  $z_n(R)$ , car sinon l'application

$$t \rightarrow (z_n(t) - Z)|z_n(t) - Z|^{-1}$$

pourrait être contractée en une constante (en utilisant une contraction de  $z_n(R)$ ), ce qui est impossible. Comme  $|Jz(x_0)| > \delta$ , on peut choisir  $\epsilon$  assez petit pour que  $|B| > \delta|R|$ , et ensuite  $n$  assez grand pour que

$$|z_n(R)| \leq (1 + 1/n)\delta|R| < |B|.$$

Ceci contredit le fait que  $B \subset z_n(R)$ ; on en déduit le lemme.

**Lemme 8.** *Ou bien  $Jz(x) = \delta$  p.p., ou bien  $Jz(x) = -\delta$  p.p.*

Supposons qu'en un point  $x_0$  de l'intérieur de  $I_0$ ,  $z$  soit différentiable et  $Jz(x_0) = \delta$ ; on veut montrer que  $Jz$  garde ce signe. Soit  $Q$  un petit cube centré en  $x_0$ ; si  $Q$  est assez petit, l'application  $F$ , de  $\partial Q$  dans la sphère unité, définie par

$$F(t) = (z(t) - z(x_0))|z(t) - z(x_0)|^{-1},$$

est de degré 1. Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme 9.** *Si  $x_0$  est un point de différentiabilité de  $z$  intérieur à  $I_0$  et si  $y \neq x_0$ , alors  $z(y) \neq z(x_0)$ .*

Nous prouverons ce lemme un peu plus tard; pour le moment, finissons la démonstration du Lemme 8. Le Lemme 9 nous assure que  $z(t) - z(x_0)$  ne s'annule pas pour  $t \neq x_0$ . On peut par conséquent déformer la sphère topologique  $\partial Q$  en n'importe quelle sphère  $S \subset I_0$  ayant  $x_0$  dans son intérieur, et l'application  $G$ , de  $S$  dans la sphère unité, telle que

$$G(t) = [z(t) - z(x_0)]|z(t) - z(x_0)|^{-1} \quad \text{pour } t \in S,$$

est encore de degré 1.

Si  $y_0$  est un autre point intérieur où  $z$  est différentiable et si l'on peut trouver un chemin qui joigne  $z(x_0)$  à  $z(y_0)$  sans rencontrer  $z(S)$ , alors le degré de l'application  $H$  définie sur  $S$  par

$$H(t) = (z(t) - z(y_0))|z(t) - z(y_0)|^{-1}$$

est encore 1. En appliquant le début de notre argument à  $y_0$  au lieu de  $x_0$ , on voit que  $Jz(y_0) = \delta$ .

Supposons maintenant que l'on puisse trouver un autre point intérieur  $x'$ , tel que  $Jz(x') = -\delta$ . Par connexité, le signe de  $Jz(x)$ , restreint aux points de différentiabilité de  $z$ , ne peut pas être localement constant sur l'intérieur de  $I_0$ , et donc on peut trouver un point  $T$  qui soit dans l'adhérence à la fois de l'ensemble  $U$  des points de différentiabilité  $x$  tels que  $Jz(x) = \delta$  et de l'ensemble  $V$  des points de différentiabilité  $y$  tels que  $Jz(y) = -\delta$ . Donnons-nous  $\epsilon > 0$ , et soient  $x \in U \cap B(T, \epsilon)$  et  $y \in V \cap B(T, \epsilon)$ . Pour tout rayon  $r$  compris entre  $\epsilon$  et  $\text{dist}(T, \partial I_0)$ , l'image par  $z$  du segment qui joint  $x$  à  $y$  rencontre l'image  $z(S(T, r))$  de la sphère centrée en  $T$  et de rayon  $r$ , car sinon on pourrait appliquer la remarque précédente et on aurait  $Jz(x) = Jz(y)$ . Prenons des valeurs de  $r$  espacées de  $\epsilon$  (on peut en trouver  $(C\epsilon)^{-1}$ , où  $C$  ne dépend que de  $T$ ); pour chacune, on peut trouver un point  $t_r$  de  $S(T, r)$  tel que  $z(t_r)$  soit dans  $B(z(T), \epsilon)$ . Par conséquent, on peut trouver  $(C\epsilon)^{-1}$  cubes dyadiques disjoints  $Q_r$  de côté  $\geq C^{-1}\epsilon$  tels que  $z(Q_r)$  soit contenu dans  $B(z(T), 2\epsilon)$ . Si  $n$  est assez grand, on a encore

$$z_n(Q_r) \subset B(z(T), 3\epsilon) \quad \text{et} \quad \left| z\left[\bigcup Q_r\right] \right| \leq (6\epsilon)^d,$$

alors que

$$\left| \bigcup Q_r \right| \geq C^{-1}\epsilon^{d-1},$$

si  $\epsilon$  est assez petit, alors

$$\left| z\left[\bigcup Q_r\right] \right| \leq (\delta/2) \left| \bigcup Q_r \right|.$$

On peut conclure comme au Lemme 6: si

$$K = I_0 \setminus \bigcup Q_r,$$

on a

$$\delta \leq \left| z\left(\bigcup Q_r\right) \right| + |z(K)| < (\delta/2) \left| \bigcup Q_r \right| + (1 + 1/n)|K| < \delta$$

si  $n$  est assez grand. Finalement, le point  $T$  n'existait pas, et le Jacobien garde un signe constant.

Pour finir la démonstration du Lemme 8, il ne nous reste plus qu'à prouver le Lemme 9. Donnons-nous donc  $x_0$  et  $y$  comme dans ce lemme. Choisissons

un cube  $Q$  centré en  $x_0$ , de diamètre  $\leq |x - y|/2$ , et sur lequel on ait

$$|z(x) - z(x_0) - M(x - x_0)| \leq \epsilon |x - x_0|$$

(où  $M$  est l'application linéaire tangente). Si  $\epsilon$  est assez petit et si le point  $Z$  est assez près de  $z(x_0)$ , alors l'application  $t \rightarrow (z(t) - Z)|z(t) - Z|^{-1}$ , du bord  $\partial Q$  de  $Q$  dans la sphère unité, est de degré  $\pm 1$ . La même chose vaut pour  $z_n$  si  $n$  est assez grand, et donc, par la même argument que lors de la preuve du Lemme 7,  $Z$  est dans  $z_n(Q)$ . On en déduit que, si  $Q'$  est un cube assez petit contenant  $y$ , alors  $z_n(Q') \subset z_n(Q)$  pour  $n$  assez grand. La même chose est encore vraie si l'on remplace  $q$  par un cube dyadique plus grand qui ne rencontre pas  $Q'$ , et  $Q'$  par un cube dyadique plus petit. On a encore une contradiction parce que

$$\delta = |z_n(I_0)| \leq \sum |z_n(R_j)|$$

(où la somme porte sur tous les cubes dyadiques  $R_j$  de la même taille que  $Q'$ , sauf justement  $Q'$ ), d'où on déduit que

$$\delta \leq \sum (1 + 1/n)\delta |R_j| < \delta$$

si  $n$  est assez grand.

Les Lemmes 8 et 9 sont enfin prouvés, et nous sommes maintenant en mesure de conclure. Comme  $z$  est ACL (et même lipschitzienne), et que sa dérivée est bornée et a presque-partout un Jacobien égal à  $\delta$  (ou  $-\delta$ , auquel cas on peut toujours changer le signe d'une coordonnée),  $z$  est quasirégulière, et par conséquent est ouverte (voir [R], ou [MRV]).

Vérifions que  $z$  est un homéomorphisme sur l'intérieur de  $I_0$ , c'est à dire que  $z(x) \neq z(y)$  pour  $x \neq y$ . Si ça n'était pas le cas, on pourrait trouver une boule  $B$  contenant  $y$ , mais à distance positive de  $x$ , telle que  $z(B)$  contienne un voisinage de  $z(x)$ . En particulier,  $z(B)$  contiendrait  $z(x_0)$ , où  $x_0$  est un point de différentiabilité de  $z$  et n'est pas dans  $B$ . Le Lemme 9 nous assure que cela n'est pas possible. Donc,  $z$  est un homéomorphisme (et même quasiconforme).

Montrons pour finir que cela contredit notre supposition que la boule de centre  $z_n(v)$  (où  $v$  est le centre de  $I_0$ ) et de rayon  $1/n$  n'est pas contenue dans  $z_n(I_0)$ . L'application

$$F(t) = (z(t) - z(v))|z(t) - z(v)|^{-1},$$

définie sur le bord de  $I_0$ , est de degré  $\pm 1$ ; soit  $\epsilon > 0$  tel que  $|z(t) - z(v)| > \epsilon$  pour tout  $t$ . Si  $n$  est assez grand pour que  $|z_n(t) - z(t)| < \epsilon/4$  et si  $u \in B(z(v), \epsilon/2)$ , l'application définie par

$$G(t) = (z_n(t) - u)|z_n(t) - u|^{-1}$$

est encore de degré 1, d'où l'on conclut que  $u$  est dans l'image de  $z_n$  ce qui est une contradiction si  $n$  est assez grand).

Nous avons donc fini de prouver le Lemme 4 et, par conséquent, le Théorème 2.

*Remarque.* Le Théorème 2 peut être généralisé de la manière suivante. Donnons-nous un poids  $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$  dans la classe de Muckenhoupt. Pour  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^d$ , soit

$$D(x, y) = \{\omega[B((x+y)/2, |x-y|)]\}^{1/d} = \left\{ \int_{B((x+y)/2, |x-y|)} \omega(x) dx \right\}^{1/d}.$$

**Théorème 2 Bis.** Soit  $z: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction telle que

$$|z(x) - z(y)| \leq CD(x, y)$$

(autrement dit, telle que  $|\nabla f(x)| \leq C\omega(x)^{1/d}$ ), et telle que  $|z(I_0)| \geq \delta\omega(I_0)$ . Alors on peut trouver un ensemble compact  $E \subset I_0$ , tel que  $\omega(E) > \theta\omega(I_0)$ , et tel que

$$|z(x) - z(y)| \geq M^{-1}D(x, y)$$

pour  $x, y$  dans  $E$ . Les constantes  $\theta$  et  $M$  ne dépendent que de  $C$ ,  $\delta$ , et de  $\omega$ .

Nous nous contenterons d'esquisser la démonstration de ce résultat. On veut appliquer le Théorème 1 à  $\mathbb{R}^d$ , muni de la mesure  $\omega dx$ , et de  $D(x, y)$  (le fait que  $D$  ne soit pas une distance n'est pas gênant). On choisit cette fois pour  $n$ -cubes des cubes dyadiques  $Q$ , pas nécessairement de rayon  $\epsilon^n$ , mais tels que  $\omega(Q) \approx \epsilon^{nd}$ . Les propriétés (1), (2) et (7) sont des conséquences faciles du fait que  $\omega \in A_\infty$ , et le même argument que dans le cas où  $\omega = 1$ , combiné avec les propriétés élémentaires de  $A_\infty$ , montre qu'on peut se contenter de prouver l'analogie suivant du Lemme 4.

**Lemme 4 Bis.** On peut trouver  $\tau > 0$  et  $\gamma > 0$  (qui ne dépendent que de  $\omega$  et de  $\delta$ ) tels que, si  $Q$  est un cube,  $z: Q \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction telle que  $|z(x) - z(y)| \leq D(x, y)$  pour  $x, y$  dans  $Q$ , et si  $\delta(Q) = |z(Q)|/\omega(Q) \geq \delta$ , l'une des affirmations suivantes est vraie:

- $z(Q)$  contient une boule de centre  $z(v)$  et de rayon  $\tau\omega(Q)^{1/d}$  (où  $v$  est le centre de  $Q$ );
- on peut trouver un cube  $R$  de côté  $\geq \tau r$  (où  $r$  est le côté de  $Q$ ) tel que  $\delta(R) \geq (1 + \gamma)\delta(Q)$ .

On peut reprendre la preuve du Lemme 4, pratiquement sans modification. On commence par remarquer que, si les poids  $\omega_n$  sont uniformément dans  $A_\infty$

et si  $\omega_n(I_0) = 1$  pour tout  $n$ , alors on peut extraire une sous-suite des  $\omega_n$  qui converge faiblement vers un poids  $\omega \in A_\infty$ . Si  $z_n$  est une suite de fonctions telle que  $|z_n(x) - z_n(y)| \leq D_{\omega_n}(x, y)$  pour tout  $n$ , alors on peut extraire une sous-suite, convergeant uniformément vers une fonction  $z$ , qui vérifie encore  $|z(x) - z(y)| \leq D(x, y)$ , et qui est donc différentiable presque-partout (voir [ST], p. 242). On peut utiliser les mêmes arguments de degré pour montrer que  $Jz(x_0) = \delta\omega(x_0)$  presque partout (ou bien  $Jz(x_0) = -\delta\omega(x_0)$  p.p.). On en déduit pareillement que  $z$  est un homéomorphisme, ce qui donne la contradiction souhaitée, le Lemme 4 Bis et le Théorème 2 Bis.

## 2. Surfaces Régulières

Nous nous proposons d'appliquer le Théorème 2 pour trouver des morceaux de graphes lipschitziens dans toute «surface régulière». Rappelons ce que nous entendons par surface régulière.

**Définition 1.** Soient  $N \geq d \geq 1$  des entiers. On appellera «paramétrage régulier» une application  $z: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$  telle que, pour une constante  $C_0 \geq 0$ ,  $z$  est  $C_0$ -lipschitzienne, et

(32) pour tout  $R > 0$  et toute boule  $B \subset \mathbb{R}^N$  de rayon  $R$ ,

$$|\{x \in \mathbb{R}^d: z(x) \in B\}| \leq CR^d.$$

L'image de  $\mathbb{R}^d$  par  $z$  sera appelée une «surface régulière».

**Proposition 1.** Soit  $z: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$  un «paramétrage régulier». Alors il existe des constantes  $M$  et  $\theta > 0$  telles que, si  $Q \subset \mathbb{R}^d$  est un cube, on puisse trouver un sous-ensemble compact  $E \subset Q$  tel que  $|E| \geq \theta|Q|$ , une transformation orthogonale  $U$  sur  $\mathbb{R}^N$ , et une fonction  $M$ -lipschitzienne  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{N-d}$  telles que  $z(E)$  soit contenu dans l'image par  $U$  du graphe de  $F$ , et que la restriction de  $z$  à  $E$  soit  $M$ -bi-lipschitzienne.

Avant de démontrer la proposition, rappelons comment on peut utiliser un tel résultat (appelons cela une décomposition de  $z(\mathbb{R}^d)$  en graphes lipschitziens). Donnons-nous un noyau  $K(z)$ , défini sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , impair, homogène de degré  $-d$ , et indéfiniment dérivable. Alors, si  $z$  est régulière, on peut définir un opérateur borné sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par

$$(33) \quad Tf(x) = \text{v.p.} \int K(z(x) - z(y))f(y) dy.$$

La démonstration de la continuité de  $T$  donnée dans [D2] utilise des décompositions semblables à celle de la Proposition 1, mais l'image de  $z$  n'y est pas

directement décomposée en graphes lipschitziens, mais en des classes successives de surfaces, dont chaque élément se décompose dans la classe suivante, la dernière classe étant celle des graphes lipschitziens. La Proposition 4 de [D2] dit justement que si  $z(\mathbb{R}^d)$  admet une décomposition dans une classe de «surfaces régulières»  $z^*(\mathbb{R}^d)$  (avec une constante  $C_0$  qui ne dépend pas de  $z^*$ ), la continuité de l'opérateur  $T$  défini par (33) découle de la continuité, uniforme en  $z^*$ , des opérateurs  $T^*$  associés aux  $z^*$ . On se ramène ainsi, en plusieurs étapes, au cas des graphes lipschitziens, pour lesquels la continuité de  $T$  est une conséquence assez facile du théorème de Coifman, McIntosh, et Meyer ([CMM]) sur la continuité de l'intégrale de Cauchy sur les graphes lipschitziens (voir par exemple [D2], Lemme 16).

La Proposition 1, en conjonction avec la Proposition 4 de [D2] et [CMM], donne une démonstration plus directe de la continuité de  $T$  lorsque  $z$  est un «paramétrage régulier». D'un autre côté, cette nouvelle preuve de la continuité de  $T$  a l'inconvénient d'utiliser (par deux fois) un argument de compacité. Nous n'insistons pas plus.

Pour prouver la proposition, considérons la fonction  $Z = p \circ z$ , où  $p$  est la projection orthogonale de  $\mathbb{R}^N$  sur un sous-espace de dimension  $d$  de la forme  $\{x \in \mathbb{R}^N, x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_{N-d}} = 0\}$ , où  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-d} \leq N$  est un choix de  $N - d$  coordonnées sur  $\mathbb{R}^N$ . Le lemme suivant va nous permettre d'appliquer le Théorème 2 à  $Z$ .

**Lemme 10.** *Si  $z$  est un paramétrage régulier et  $Q \subset \mathbb{R}^d$  est un cube, on peut trouver  $N - d$  coordonnées  $1 \leq i_1 < \dots < i_{N-d} \leq N$  telles que  $|p(z(Q))| \geq \delta |Q|$ , où  $\delta$  ne dépend que de  $C_0$ .*

Supposons que nous ayons prouvé ce lemme. Le Théorème 2 nous donne un ensemble  $E \subset Q$  tel que  $|E| \geq \theta |Q|$ , et tel que la restriction de  $Z$  à  $E$  soit bilipschitzienne. Cela signifie exactement que le paramétrage de  $z(E)$  par sa projection est bi-lipschitzien équivalent au paramétrage par  $z$ , et aussi que  $z(E)$  est (après changement de l'ordre des coordonnées sur  $\mathbb{R}^N$ ) contenu dans un graphe lipschitzien.

Pour prouver le lemme, on utilisera encore un argument de compacité. Supposons que l'on puisse trouver  $C_0$  tel que  $\delta$  n'existe pas. Cela veut dire que l'on peut trouver une suite de paramétrages  $z_n$ , réguliers avec la constante  $C_0$ , et de cubes  $Q_n$ , tels que pour tout choix de  $i_1, \dots, i_{N-d}$ , on ait  $|p(z_n(Q_n))| \leq 1/n$ . Par changement d'échelle, on se ramène au cas où  $Q_n$  est, pour tout  $n$ , le cube unité. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $z_n$  converge, uniformément sur le cube unité, vers une fonction  $z$ . Il est clair que  $z$  est encore un «paramétrage régulier». Montrons que, si  $x_0$  est un point de différentiabilité de  $z$ , la dérivée de  $z$  en  $x_0$  est de rang  $d$ . Sinon, pour  $\epsilon$  assez petit, tout point de l'image de  $B(x_0, \epsilon)$  serait à distance  $\leq t(\epsilon)\epsilon$  d'une boule de



dimension  $\leq d - 1$  et de rayon  $\leq C\epsilon$ , où  $t(\epsilon)$  tend vers 0 avec  $\epsilon$ . On pourrait alors recouvrir  $z(B(x_0, \epsilon))$  par moins de  $Ct(\epsilon)^{-(d-1)}$  boules de rayon  $Ct(\epsilon)\epsilon$  et, comme  $z$  est régulière, la mesure de l'image réciproque par  $z$  de chacune de ces boules serait  $\leq C[t(\epsilon)\epsilon]^d$ . La contradiction vient de ce que  $B(x_0, \epsilon)$  devrait être contenue dans la réunion de ces images réciproques, dont la masse totale est pourtant inférieure à  $Ct(\epsilon)\epsilon^d$ . Donc, la dérivée de  $z$  en  $x_0$  est de rang  $d$ , et l'on peut trouver des coordonnées  $i_1, \dots, i_{N-d}$  telles que la dérivée de  $Z = p \circ z$  en  $x_0$  soit bijective. Le même argument de degré que dans la démonstration du Lemme 7 montre que, pour  $n$  assez grand,  $p \circ z_n(Q)$  contient un voisinage fixe de  $p \circ z(x_0)$ . Ceci est contradictoire avec notre supposition que  $|p \circ z_n(Q)| \leq 1/n$ . Nous avons fini de prouver le Lemme 10 et, du même coup, la Proposition 1.

*Remarque.* On peut appliquer le Théorème 2 Bis, et la démonstration qui précède, pour prouver directement la continuité de l'opérateur d'intégrale singulière défini par le noyau  $K$  sur une «surface  $\omega$ -régulière».

Nous appellerons «surface  $\omega$ -régulière» l'image de  $\mathbb{R}^d$  par une application  $z: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$ , telle qu'il existe un poids  $\omega \in A_\infty(\mathbb{R}^d)$  pour lequel

$$|z(x) - z(y)| \leq C_0 D(x, y)$$

pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , où

$$D(x, y) = \{\omega[B((x+y)/2, |x-y|)]\}^{1/d},$$

et pour lequel  $\omega[z^{-1}(B(w, R))] \leq C_0 R^d$  pour tout  $w \in \mathbb{R}^N$  et tout  $R > 0$ . Comme précédemment, on dira que  $z$  est un «paramétrage  $\omega$ -régulier».

On vérifie aisément que la classe des paramétrages  $\omega$ -réguliers est stable par passage à la limite, de sorte que l'argument de compacité ci-dessus montre aussi que, si  $Q \subset \mathbb{R}^d$  est un cube et  $z$  est un paramétrage  $\omega$ -régulier, on peut trouver  $N - d$  coordonnées  $1 \leq i_1 < \dots < i_{N-d} \leq N$  telles que, si  $p$  est la projection orthogonale sur le  $d$ -plan défini par  $x_{i_1} = \dots = x_{i_{N-d}} = 0$ , alors  $|p(z(Q))| \geq \delta\omega(Q)$ . On peut appliquer le Théorème 2 Bis au cube  $Q$  et à l'application  $Z = p \circ z$ ; on obtient la variante suivante de la Proposition 1.

**Proposition 1 Bis.** *Si  $z: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^N$  est un paramétrage  $\omega$ -régulier, il existe des constantes  $M$  et  $\theta > 0$  telles que, si  $Q \subset \mathbb{R}^d$  est un cube, on peut trouver un sous-ensemble compact  $E \subset Q$  tel que  $\omega(E) \geq \theta\omega(Q)$ , une transformation orthogonale  $U$  sur  $\mathbb{R}^N$ , et une fonction  $M$ -lipschitzienne  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{N-d}$  tels que  $z(E)$  soit contenu dans l'image par  $U$  du graphe de  $F$ , et que la restriction à  $E$  de  $\omega(Q)^{-1/d}z(x)$  soit  $M$ -bilipschitzienne.*

En fait, le Théorème 2 Bis donne un compact  $E' \subset Q$  tel que  $\omega(E') \geq \theta'\omega(Q)$  et tel que  $|Z(x) - Z(y)| \geq D(x, y)/M'$  pour  $x, y$  dans  $E'$ . On utilise alors le fait

que, comme  $\omega \in A_\infty$ , si  $F = \{x \in Q: \text{il existe } y \in Q \text{ tel que } D(x, y) > \lambda \omega(Q)^{1/d} \text{ ou } D(x, y) < \lambda^{-1} \omega(Q)^{1/d}\}$ , alors  $\omega(F)/\omega(Q)$  est aussi petit que l'on veut pourvu que  $\lambda$  soit assez grand. On choisit  $E = E' \cap F^c$ .

La Proposition 1 Bis, en conjonction avec la Proposition 4 de [D2], donne une nouvelle démonstration de la continuité sur  $L^2(\mathbb{R}^d, \omega dx)$  de l'opérateur  $T$  défini par

$$Tf(x) = \text{v.p.} \int K(z(x) - z(y))f(y)\omega(y) dy.$$

Nous n'entrons pas dans les détails (on pourra en trouver certains dans [D2]).

### 3. Le cas d'une surface dans $\mathbb{R}^N$ : Construction des $n$ -cubes

Nous nous proposons d'appliquer le Théorème 1 dans le cas où  $\Sigma$  est contenu dans  $\mathbb{R}^N$ . La situation est alors un peu plus simple que dans le cas général, et nous allons montrer que dans ce cas, les hypothèses (Q) et (7) sont vérifiées automatiquement.

**Lemme 11.** *Donnons-nous un entier  $N \geq d$ . Soit  $\sigma$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  (muni de la distance euclidienne), et soit  $\Sigma$  son support. Si  $\sigma$  satisfait à (1) et (2), alors les hypothèses (Q) et (7) sont vérifiées (peut-être avec une constante  $C_0$  différente).*

Commençons par vérifier (7). Soit  $A \subset \Sigma$  un Borélien. Donnons-nous un ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}^N$  contenant  $A$ , et tel que  $\sigma(O) \leq 2\sigma(A)$ . Pour chaque point  $x$  de  $A$ , donnons-nous une boule ouverte  $B(x)$  contenue dans  $O$  et centrée en  $x$ . Le Théorème de Besicovitch (voir par exemple [G], p. 2) nous permet de trouver un sous-recouvrement de  $A$  par les  $B_i = B(x_i)$ ,  $i \in I$ , tel que  $\sum_i \chi_{B_i}(y) \leq C$  pour tout  $y$ . Alors, en notant  $R(B_i)$  le rayon de  $B_i$ ,

$$\begin{aligned} |z(A)| &\leq \sum_i |z(B_i)| \leq C \sum_i R(B_i)^d \leq C \sum_i \sigma(B_i) \\ &\leq C \int \sum_i \chi_{B_i}(y) d\sigma(y) \\ &\leq C\sigma(O) \leq C\sigma(A), \end{aligned}$$

ce qui prouve (7).

Montrons maintenant que (Q) est vraie. Prenons pour  $\epsilon$  l'inverse d'un entier. Nous allons commencer par construire une première approximation des 0-cubes, en modifiant légèrement les cubes de côté 1 à sommets entiers.

Nous remplacerons les hyperplans  $\{x_i = k\}$ , où  $1 \leq i \leq N$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , par des hypersurfaces  $S_{i,k}$ , qui seront définies à l'aide de fonctions  $f_{i,k}$  par

$$S_{i,k} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_i = f_{i,k}(x^i)\},$$

où l'on utilise la notation

$$x^i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N).$$

Montrons que, si  $C'$  et  $\tau$  sont donnés à l'avance et si  $\epsilon$  est assez petit, on peut choisir  $f_{i,k}$  telle que

$$(34) \quad \|\nabla f_{i,k}\|_\infty \leq \tau, \quad |f_{i,k}(x^i) - k| \leq \tau/10 \text{ et}$$

$$(35) \quad \text{pour tout cube } T \text{ de côté } 2, \quad \sigma(\{x \in T : \text{dist}(x, S_{i,k}) \leq 2C'\epsilon\}) \leq \tau/2N.$$

On va chercher  $f_{i,k}$  sous la forme

$$f_{i,k} = k + g_1 + \dots + g_{8^{N-1}},$$

où les fonctions  $g_m$ ,  $1 \leq m \leq 8^{N-1}$ , sont définies de la manière qui suit. On se donne des représentants  $a_1, \dots, a_{8^{N-1}}$  de  $\mathbb{Z}^{N-1}/8\mathbb{Z}^{N-1}$ , et une fonction  $\varphi(x^i)$ , de classe  $C^1$ , telle que  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ , telle que  $\varphi(x^i) = 1$  sur  $J$  (où  $J$  est le cube de centre 0 et de côté 4), et  $\varphi(x^i) = 0$  hors de  $2J$ . Pour  $1 \leq m \leq 8^{N-1}$ , la fonction  $g_m$  sera de la forme

$$\sum_j \lambda_{j,m} \varphi(x^i - j - a_m),$$

où la somme porte sur  $j \in 8\mathbb{Z}^{N-1}$ , et les  $\lambda_{j,m}$  seront tels que

$$(36) \quad |\lambda_{j,m}| \leq C_1^{-m} \tau^m,$$

pour une constante  $C_1$  que l'on choisira plus tard. Supposons que nous ayons déjà construit  $g_1, \dots, g_{m-1}$ . Montrons que l'on peut choisir  $\lambda_{j,m}$  tel que, si  $T_{m,j}$  est l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^N$  tels que  $x^i$  est dans le cube de côté 4 centré en  $j + a_m$ , alors

$$(37) \quad \sigma(\{x \in T_{m,j} : |x_i - k - g_1(x^i) - \dots - g_m(x^i)| \leq 3C_1^{-m-1} \tau^{m+1}\}) \leq \tau/2N.$$

Grâce à la définition de  $\varphi$ , les ensembles

$$\{x \in T_{m,j} : |x_i - k - g_1(x^i) - \dots - g_m(x^i)| \leq 3C_1^{-m-1} \tau^{m+1}\}$$

qui correspondent à des valeurs de  $\lambda_{j,m}$  qui diffèrent de plus de  $7C_1^{-m-1} \tau^{m+1}$  sont disjoints et, à cause de (1), on ne peut pas en trouver plus de  $CC_0(\tau/2N)^{-1}$  qui ne vérifient pas l'inégalité souhaitée; on en déduit que, si

$$C_1^{-m} \tau^{-m} \geq 7C_1^{-m-1} \tau^{m+1} CC_0(\tau/2N)^{-1}$$

(c'est-à-dire si  $C_1 \geq CC_0$ ), on peut choisir  $\lambda_{j,m}$  tel que (36) et (37) soient vrais. Faisons, pour tout  $m$ , un tel choix des  $\lambda_{j,m}$ .

Vérifions que la fonction  $f_{i,k}$  que nous venons de définir satisfait à (34) et (35). On déduit de (36) que  $|g_m(x^i)| \leq C_1^{-m} \tau^m$ , ce qui donne (34) si  $C_1$  est assez grand. De plus, on déduit de (37) que, pour tout  $m$  et tout  $j$ ,

$$\sigma(\{x \in T_{m,j} : |x_i - f_{i,k}(x^i)| \leq C_1^{-m-1} \tau^{m+1}\}) \leq \tau/2N,$$

ce qui donne (35) si  $\epsilon$  est assez petit.

Pour tout  $n \geq 0$ , on peut faire la même construction à l'échelle  $\epsilon^n$ . On trouve, pour  $1 \leq i \leq N$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , une fonction  $f_{n,i,k}$  telle que

$$(38) \quad \|\nabla f_{n,i,k}\|_\infty \leq \tau, \quad |f_{n,i,k}(x^i) - k\epsilon^n| \leq \tau\epsilon^n/10 \quad \text{et,}$$

si  $S_{n,i,k}$  est définie par l'équation  $x_i = f_{n,i,k}(x_i)$ ,

(39) pour tout cube  $T$  de côté  $2\epsilon^n$ ,

$$\sigma(\{x \in T : \text{dist}(x, S_{n,i,k}) \leq 2C'\epsilon^n\}) \leq \tau\epsilon^{nd}/2N.$$

On peut maintenant définir, pour  $n \in \mathbb{N}$ , une famille  $Q_1(n)$  d'ensembles ressemblant à des cubes de taille  $\epsilon^n$ : ce sera la famille des ensembles

$$\begin{aligned} R &= R_{n,k(1), \dots, k(N)} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : f_{n,i,k(i)}(x^i) \leq x_i < f_{n,i,k(i)+1}(x^i) \text{ pour } 1 \leq i \leq N\}, \end{aligned}$$

où  $(k(1), \dots, k(N)) \in \mathbb{Z}^N$ . On déduit de (38) que

(40) si  $R \in Q_1(n)$ , on peut trouver un cube  $T$  de côté  $\epsilon^n$  tel que

$$(1 - \tau/2)T \subset R \subset (1 + \tau/2)T.$$

Regroupons les éléments de  $Q_1(n)$  en paquets. Chaque paquet  $S$  sera la réunion de moins de  $C$  éléments de  $Q_1(n)$ , choisis de manière à ce que le diamètre de  $S$  soit  $\leq C\epsilon^n$ . Appellons  $Q_0(n)$  l'ensemble des  $S$ . Grâce à (2), si  $C$  est assez grand par rapport à  $C_0$ , on peut choisir les paquets  $S$  de façon que

$$(41) \quad \sigma(S) \geq C^{-1}\epsilon^n \quad \text{pour tout } S \in Q_0(n),$$

et que les  $S \cap \Sigma$ ,  $S \in Q_0(n)$ , forment une partition de  $\Sigma$ . Faisons un tel choix de  $Q_0(n)$ .

Donnons-nous maintenant une application  $\varphi$ , de l'ensemble des  $Q_0(n+1)$  dans l'ensemble des  $Q_0(n)$  telle que, si  $Q \in Q_0(n+1)$ ,  $\varphi(Q)$  soit l'un des  $R \in Q_0(n)$  tels que  $R \cap Q \neq \emptyset$ . Pour chaque  $n$  et chaque  $R \in Q_0(n)$ , on définit une suite d'ensembles  $R_m$  par  $R_0 = R$ , et  $R_m = \cup Q$ , où l'union porte sur tous les  $Q \in Q_0(n+m)$  tels que  $\varphi^m(Q) = R$ . Il est clair que la distance de Hauss-

dorff entre  $R_m$  et  $R_{m+1}$  est inférieure à  $C\epsilon^{m+n+1}$ , donc la suite des adhérences  $(\overline{R_m})$  converge (pour la topologie de Hausdorff) vers un compact que nous noterons  $A(R)$ , et dont la distance de Hausdorff à  $R$  est inférieure à  $C\epsilon^{n+1}$ . Les  $A(R)$ , lorsque  $R$  parcourt  $Q_0(n)$ , sont presque notre partition  $Q(n)$ ; nous devons encore les modifier un peu pour qu'ils forment une partition de  $\Sigma$ . Nous savons déjà que leur union contient  $\Sigma$  tout entier: si  $x \in \Sigma$ ,  $x$  est pour tout  $m$  dans l'un des  $R_m$ , où  $R$  parcourt un ensemble fini; alors  $x$  est encore dans  $A(R)$ , où  $R$  est tel que  $x \in R_m$  pour une infinité de  $m$ .

Pour retirer certains points des  $A(R)$  de manière cohérente, donnons-nous un ordre (que nous noterons  $<$ ) sur chaque  $Q_0(n)$ , de telle sorte que si  $Q$  et  $Q'$  sont dans un  $Q_0(n+1)$  et si  $\varphi(Q) < \varphi(Q')$ , alors  $Q < Q'$ . On pose, pour  $R \in Q_0(n)$ ,

$$(42) \quad B(R) = A(R) \cap \left\{ \bigcup_{R' \in Q_0(n), R' < R} A(R') \right\}^c$$

(notons que l'union en question est localement finie). Montrons que la famille  $Q(n) = \{B(R) \cap \Sigma : R \in Q_0(n)\}$  convient.

Pour chaque  $n$ ,  $Q(n)$  est une partition de  $\Sigma$ . D'autre part, si  $S \in Q_0(n)$  et  $m \geq 1$ , alors  $A(S) = \bigcup A(Q)$ , où l'union porte sur les  $Q \in Q_0(n+m)$  tels que  $\varphi^m(Q) = S$ . Montrons maintenant que, si  $R \in Q_0(n+m)$ , alors  $B(R) \subset B(\varphi^m(R))$ : il est certainement contenu dans  $A(\varphi^m(R))$  à cause de la remarque précédente et, s'il recontraît  $A(R')$  pour un  $R' \in Q_0(n)$  tel que  $R' < \varphi^m(R)$ , alors il rencontrerait aussi  $A(R'')$  pour un  $R'' \in Q_0(n+m)$  tel que  $\varphi^m(R'') = R'$ ; dans ce cas, grâce à la manière dont on a choisi l'ordre  $<$ , on aurait  $R'' < R$ , et  $B(R)$  ne pourrait pas rencontrer  $A(R'')$  (contradiction). On en déduit (3) parce que, puisque  $B(R) \subset B(\varphi^m(R))$ , il ne rencontre aucun autre  $B(Q)$ , où  $Q \neq \varphi^m(R)$  est dans  $Q_0(n)$ .

Si  $S \in Q_0(n)$ ,  $S$  est une union d'objets  $R \in Q_1(n)$ , et pour chaque  $R$  on peut trouver un  $T$  comme dans (40), alors  $A(S)$  est la réunion d'un nombre  $\leq C$  d'ensembles  $R'$  tels que  $(1-\tau)T \subset R' \subset (1+\tau)T$  pour des (vrais) cubes  $T$ , car la distance de Hausdorff de  $S$  à  $A(S)$  est inférieure à  $C\epsilon^{n+1}$ . De plus, si  $T$  est associé à l'un des morceaux  $R$  de  $S$  et si  $S' \neq S \in Q_0(n)$ , alors  $A(S')$  ne rencontre pas  $(1-\tau)T$ , de sorte que  $B(S)$  est aussi une union d'ensembles  $R''$  tels que  $(1-\tau)T \subset R'' \subset (1+\tau)T$ . On en déduit aussitôt (4). De plus, la frontière de  $B(S)$  est à distance  $\leq C\epsilon^{n+1}$  de celle de  $S$ , et par conséquent  $B(S)$  vérifie (5) et (6). On a fini de prouver le Lemme 11.

*Remarque.* Notre dernière manipulation, destinée à transformer les  $A(S)$  en une partition, n'est pas vraiment nécessaire: on vérifierait aisément que la frontière de  $A(S)$  est de  $\sigma$ -mesure nulle.

Pour conclure ce paragraphe, résumons dans un lemme les résultats précédents.

**Lemme 12.** Soient  $\sigma$  une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^N$  (muni de la distance euclidienne),  $\Sigma$  son support, et  $z: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction lipschitzienne. Si (1), (2) et (9) sont satisfaites, et si  $I_0$  est un 0-cube tel que  $|z(I_0)| \geq \delta\sigma(I_0)$ , alors on peut trouver  $E \subset I_0$ , tel que  $\sigma(E) \geq \theta$  et tel que la restriction de  $z$  à  $E$  soit bi-lipschitzienne.

#### 4. Intégrales Singulières. Surfaces de S. Semmes

Donnons-nous une fonction  $K$ , définie et  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ , impaire et homogène de degré  $-d$ . Etant donnée une mesure de Radon positive  $\sigma$  sur  $\mathbb{R}^N$ , on définit un opérateur maximal par

$$(43) \quad T_\sigma^* f(z) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \int_{|z-w| > \epsilon} K(z-w) f(w) d\sigma(w) \right|.$$

On cherche à savoir quand cet opérateur est borné sur  $L^2(\mathbb{R}^N, d\sigma)$ . Nous avons déjà vu un exemple au Paragraphe II: on peut montrer que la continuité de l'opérateur défini par (33) lorsque  $z$  est un «paramétrage régulier» entraîne la continuité de  $T_\sigma^*$ , où  $\sigma$  est l'image de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  par  $z$  (autrement dit,  $\sigma$  est la mesure telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(w) d\sigma(w) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z(x)) dx$$

pour tout  $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ). (Voir [D2] pour plus de détails.) Un autre exemple est dû à S. Semmes [S2]. Nous nous proposons de redémontrer, en utilisant le Théorème 1, le résultat de Semmes.

**Définition 2.** Soit  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{d+1}$  un ensemble de dimension  $d$ , muni d'une mesure de Radon positive  $\sigma$  supportée par  $\Sigma$ . Nous dirons que  $\Sigma$  est dans  $SS(d)$  si (1) et (2) sont satisfaites, et si de plus

(44) Pour tout point  $x \in \Sigma$  et tout  $R > 0$ , on peut trouver deux points  $x_1$  et  $x_2$ , contenus dans des composantes connexes différentes de  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \Sigma$ , et tels que  $|x_i - x| \leq R$  et  $\text{dist}(x_i, \Sigma) \geq C_0^{-1}R$  pour  $i = 1, 2$ .

Notons au passage que nous n'avons gardé la condition (2) que par commodité: en fait, (2) est une conséquence facile de (44). La définition que nous venons de donner est très légèrement plus générale que celle utilisée dans [S2], où l'auteur devait, pour des raisons techniques, ajouter l'hypothèse qualitative que  $\Sigma$  est une surface orientée. Ici, nous ne supposons rien sur le nombre de composantes connexes du complémentaire de  $\Sigma$ , ou même sur le nombre de composantes de  $\Sigma$ . Modulo cette différence qualitative, Semmes a prouvé que, si  $\Sigma \in SS(d)$ , l'opérateur  $T_\sigma^*$  est borné sur  $L^2(\Sigma, d\sigma)$  pour la plupart des

noyaux  $K$  (et en particulier lorsque  $K$  est le potentiel de double-couche, ou le noyau de Cauchy-Clifford). La preuve donnée par Semmes utilise le «Théorème  $T(b)$ », appliqué en prenant pour  $b$  le vecteur unitaire normal à  $\Sigma$ . La démonstration que nous allons donner maintenant est basée sur le critère suivant, qui utilise les techniques de variable réelle classiques dans l'étude des opérateurs de Calderón-Zygmund (par exemple, l'usage de fonctions maximales et d'inégalités aux bons  $\lambda$ ).

**Lemme 13.** *Soit  $\sigma$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^N$  qui vérifie (1) et (2). Supposons qu'il existe  $M \geq 0$  et  $\gamma > 0$  tels que, pour toute boule  $B \subset \mathbb{R}^N$  centrée en un point du support  $\Sigma$  de  $\sigma$ , on puisse trouver une fonction  $M$ -lipschitzienne  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{N-d}$  et un compact  $E \subset \Sigma$ , tel que  $\sigma(E) \geq \gamma\sigma(B)$ , et qui soit contenu dans l'image du graphe de  $F$  par une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^N$ . Alors, l'opérateur maximal  $T_\sigma^*$  est borné sur  $L^p(\mathbb{R}^N, d\sigma)$  pour  $1 < p < \infty$ .*

Pour prouver le lemme, on utilise la Proposition 4 Bis de [D2], qui dit que  $T_\sigma^*$  est borné sur  $L^p$  dès que  $\sigma$  satisfait à (1) et (2), et que de plus, il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

- (45) pour toute boule  $B$  centrée en un point du support de  $\sigma$ , on peut trouver une mesure  $\mu$ , vérifiant (1) et (2) (avec une constante qui ne dépend pas de  $B$ ), telle que, pour tout  $1 < p < \infty$ , l'opérateur maximal  $T_\mu^*$  soit borné sur  $L^p(\mathbb{R}^N, d\mu)$  uniformément en  $B$ , et un compact  $E \subset \Sigma$  tel que  $\sigma(E) \geq \gamma\sigma(B)$  et tel que  $\chi_E\sigma \leq \mu$ .

Nous allons appliquer ce résultat en prenant pour  $\mu$  la mesure de surface  $d$ -dimensionnelle sur l'image, par l'isométrie linéaire donné par l'hypothèse du lemme, du graphe de  $F$ . Le fait que, dans ce cas, l'opérateur  $T_\mu^*$  est borné sur  $L^p(\mathbb{R}^N, d\mu)$  est une conséquence facile du Théorème de Coifman, McIntosh et Meyer sur la continuité de l'opérateur défini par le noyau de Cauchy sur un graphe lipschitzien [CMM] (voir par exemple [D2], Lemme 16). Il ne reste donc plus, pour prouver le lemme, qu'à montrer que si  $E$  est le compact mentionné dans l'hypothèse, on a  $\chi_E\sigma \leq C\mu$  (pour un  $C$  qui ne dépend pas de  $B$ ).

Soit donc  $A \subset E$ , et soit  $B_i, i \in I$  un recouvrement de  $A$  par des boules dont les rayons respectifs  $r_i$  sont tels que  $\sum_i r_i^d \leq C\mu(A)$ . (L'existence d'un tel recouvrement n'est rien de plus que la définition de la mesure de surface sur le graphe de  $\Sigma$ .) On déduit de (1) que, pour tout  $i$ ,  $\sigma(B_i) \leq Cr_i^d$ ; par conséquent,  $\sigma(A) \leq C\mu(A)$ , et on en déduit le lemme.

**Proposition 2.** *Soient  $\Sigma \in SS(d)$ ,  $x \in \Sigma$ , et  $r > 0$ . Alors on peut trouver une fonction  $M$ -lipschitzienne  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  et un compact  $E \subset \Sigma \cap B(x, R)$  tel que  $\sigma(E) \geq \gamma\sigma(B(x, r))$  et tel que  $E$  soit contenu dans l'image, par une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^{d+1}$ , du graphe de  $F$ . Les constantes  $M$  et  $\gamma$  ne dépen-*

dent que de la constante  $C_0$  de (1), (2) et (44). Par conséquent, l'opérateur  $T_\sigma^*$  défini par (43) est borné sur  $L^p(\mathbb{R}^{d+1}, d\sigma)$  pour  $1 < p < \infty$ .

La deuxième partie de la proposition découle effectivement de la première et du Lemme 13. Pour trouver  $E$  et  $F$ , nous allons appliquer le Lemme 12, avec pour fonction  $z$  la projection orthogonale de  $\Sigma$  sur un hyperplan  $V$  de  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Nous pouvons, par translation de  $\Sigma$  et changement d'échelle, supposer que  $x = 0$  et  $r = 2C_0$  (où  $C_0$  est comme dans (4)). Choisissons pour  $V$  un hyperplan perpendiculaire à la droite qui joint les points  $x_1$  et  $x_2$  de (44), où l'on a pris  $x = 0$  et  $R = 1$  (voir la figure 1). Si  $x_0 = z(x_1)$ , où  $z$  est la projection orthogonale sur  $V$ , alors  $z(\Sigma \cap B(0, 2))$  contient la boule  $B(z(x_0), C_0^{-1}) \cap V$  car chaque segment de droite qui joint  $B(x_1, C_0^{-1})$  à  $B(x_2, C_0^{-1})$  rencontre  $\Sigma$ . Comme il n'y a qu'un nombre  $\leq C$  de 0-cubes qui rencontrent  $B(0, 2)$ , on peut trouver un 0-cube  $I_0$  tel que  $|z(\Sigma \cap I_0 \cap B(0, 2))| \geq C^{-1}$ . Notons que  $I_0$  est contenu dans  $B(x, r) = B(0, 2C_0)$ , de sorte que si l'on trouve un compact  $E \subset \Sigma \cap I_0$  tel que  $\sigma(E) \geq \theta > 0$  et qui soit contenu dans l'image par une isométrie d'un graphe  $M$ -lipschitzien, nous aurons fini de prouver la Proposition 2.

**Lemme 14.** *La propriété (9) est vérifiée lorsque  $\Sigma \in SS(d)$  et  $z$  est la projection orthogonale sur un hyperplan de  $\mathbb{R}^{d+1}$ .*

Avant de prouver ce lemme, vérifions qu'il entraîne la Proposition 2. Puisque (9) est vérifiée et  $|z(\Sigma \cap I_0)| \geq C^{-1}$ , on peut appliquer le Lemme 12 à  $I_0$ ; on

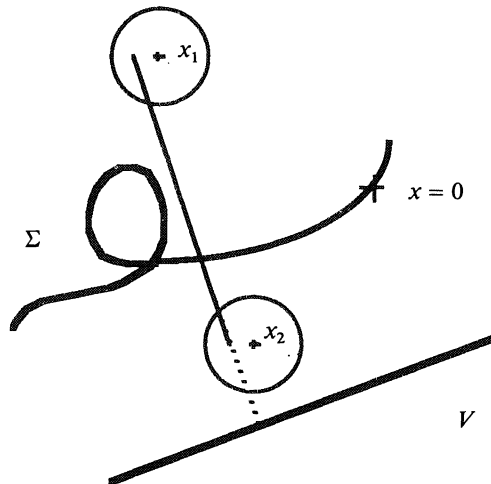


Figure 1.



trouve un compact  $E \subset \Sigma \cap I_0$  tel que  $\sigma(E) \geq \theta$ , et tel que la restriction de la projection  $z$  à  $E$  soit bi-lipschitzienne. Il est clair que cela implique que  $E$  est contenu dans l'image par une isométrie d'un graphe lipschitzien. On en déduit la proposition.

Pour prouver le Lemme 14, donnons-nous  $x \in \Sigma$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , et soit  $T$  l'union des  $n$ -cubes qui rencontrent  $B(x, C_2 \epsilon^n)$ . Supposons pour simplifier que  $x = 0$ , que  $n = 0$ , et que  $z$  est la projection sur l'hyperplan «horizontal»  $\{x_{d+1} = 0\}$ . Supposons aussi que  $\partial(T) = |z(T)|\sigma(T)^{-1} \geq \delta/2$ , et que la seconde conclusion de (9) ne soit pas satisfaite, c'est-à-dire que  $\partial(R) \leq (1 + 2\eta)\partial(T)$  pour tout 0-cube  $R$  contenu dans  $T$ . Enfin, quitte à augmenter  $C_1$ , supposons que  $C_1 \geq 1$ .

**Lemme 15.** *Si  $C_2$  est grand et  $\eta$  assez petit, on peut trouver un point  $x_1$  sur le segment vertical joignant 0 à  $(0, 0, \dots, C_2/4)$  tel que la boule  $B_1 = B(x_1, C_1)$  ne rencontre pas  $\Sigma$ .*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors, on pourrait trouver au moins  $(10C_1)^{-1}C_2$  boules disjointes  $D_i$ , de rayon  $C_1$ , centrées en des points de  $\Sigma \cap B(0, C_2/3)$ , et telles que la projection  $z(D_i)$  soit contenue dans  $B(0, 2C_1)$ . Soit  $A$  la réunion des 0-cubes qui rencontrent une de ces boules. On a  $\sigma(A) \geq (CC_1)^{-1}C_2$ , alors que  $z(A) \subset B(0, 3C_1)$ . Si  $C_2$  est assez grand, on en déduit que  $|z(A)| \leq \delta\sigma(A)/10$ , et par conséquent que

$$\begin{aligned} |z(T \setminus A)| &\geq |z(T)| - |z(A)| \\ &\geq \partial(T)\sigma(T) - \delta\sigma(A)/10 \\ &\geq \partial(T)\sigma(T \setminus A) + \partial(T)\sigma(A) - \delta\sigma(A)/10 \\ &\geq \partial(T)\sigma(T \setminus A) + 4\delta\sigma(A)/10 \\ &> (1 + 2\eta)\partial(T)\sigma(T \setminus A) \end{aligned}$$

si  $\eta$  est assez petit pour que  $4\delta(CC_1)^{-1}C_2 > 20\eta\partial(T)\sigma(T)$ . On obtient la contradiction désirée en remarquant que  $T \setminus A$  est composé de 0-cubes  $R$  tels que  $|z(R)| \leq (1 + 2\eta)\sigma(R)\partial(T)$ .

Donc le Lemme 15 est vrai; on prouverait de la même manière que l'on peut trouver un point  $x_2$  sur le segment vertical joignant 0 à  $(0, 0, \dots, -C_2/4)$  tel que la boule  $B_2 = B(x_2, C_1)$  ne rencontre pas  $\Sigma$ .

Supposons que  $x_1$  et  $x_2$  soient dans deux composantes connexes différentes de  $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \Sigma$ . Alors tout segment vertical joignant  $B_1$  à  $B_2$  rencontre  $\Sigma$ , et la projection  $(\Sigma \cap T)$  contient  $B(0, C_1)$ . Dans ce cas, donc, la conclusion de (9) est vérifiée.

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont dans la même composante, utilisons (44). Il existe un point  $x_3 \in B(0, 10^{-1}C_1)$  tel que  $\text{dist}(x_3, \Sigma) \geq (10C_0)^{-1}C_1$  et qui n'est pas dans la même composante que  $x_1$  et  $x_2$  (voir la figure 2). Pour tout  $x$  dans  $B(x_3, (20C_0)^{-1}C_1)$ ,

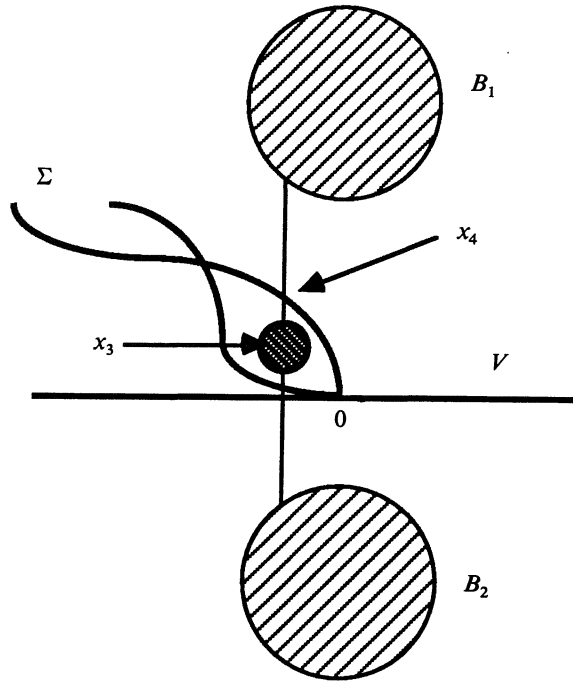


Figure 2.

les segment verticaux qui joignent  $x$  à  $B_1$  et à  $B_2$  rencontrent tous les deux  $\Sigma$ . Soit  $x_4$  un point de  $\Sigma$  qui se trouve sur le segment vertical qui joint  $x_3$  à  $B_1$ , et soit  $R$  le 0-cube contenant  $x_4$ . Quitte à agrandir  $C_1$ , on peut supposer que  $C_1$  est assez grand par rapport à  $C_0$  pour que  $R$  soit contenu dans  $B(x_4, 100^{-1}C_1)$ . Alors,  $z(R)$  est contenu dans  $z(T \setminus R)$  (si  $y \in R$ , le segment vertical joignant  $y$  à  $B_2$  rencontre  $\Sigma \cap T$  en un point qui est en dessous de la boule  $B(x_3, 20^{-1}C_1)$ , et qui ne peut donc pas être dans  $R$ ). Par conséquent,

$$|z(T \setminus R)| = |z(T)| > (1 + 2\eta)\partial(T)\sigma(T \setminus R)$$

si  $\eta$  est assez petit, ce qui contredit le fait que l'on a supposé que tous les 0-cubes composant  $T$  sont tels que

$$|z(R)| \leq (1 + 2\eta)\sigma(R)\partial(T).$$

Ceci fini de prouver le Lemme 14, et, du même coup, la Proposition 2.

Nous nous proposons pour finir de généraliser la Proposition 2 à des surfaces de dimension  $d$  dans  $\mathbb{R}^N$  (avec  $N \geq d + 1$ ).

**Définition 3.** Nous dirons que l'ensemble  $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ , muni de la mesure de Radon positive  $\sigma$ , est dans  $SS(d, N)$  si (1) et (2) sont vérifiés, et si de plus

(46) pour tout  $x_0 \in \Sigma$  et tout  $r > 0$ , on peut trouver un sous-espace affine  $W$  de dimension  $N - d$  et une sphère  $S$  de dimension  $N - d - 1$  contenue dans  $W$ , telle que  $S \subset B(x_0, r)$ ,  $\text{dist}(S, \Sigma) \geq C_0^{-1}r$ , et telle que  $S$  et  $\Sigma$  soient enlacés (au sens défini ci-dessous).

Nous dirons que  $S$  et  $\Sigma$  sont enlacés si l'on ne peut trouver aucune homotopie  $F_t(x)$ , définie et continue pour  $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^N$ , et telle que

- $F_t(x) = x$  pour  $t = 0$ , ainsi que pour  $x$  hors de  $B(x_0, 10r)$ ,
- $F_1(x) \in B(x_0, 10r)^c$  pour tout  $x \in \Sigma$ , et
- $F_t(x) \in S^c$  pour tout  $x \in \Sigma$  et tout  $0 \leq t \leq 1$ .

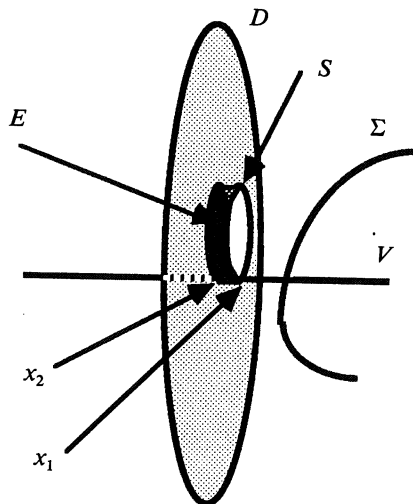
*Remarques.* La définition de la notion d'enlacement que nous avons choisie n'est pas la plus naturelle: il aurait été plus agréable de dire que  $S$  et  $\Sigma$  sont enlacés si l'on ne peut pas déformer  $S$  en un point sans rencontrer  $\Sigma$  (au lieu de dire que l'on ne peut pas déformer  $\Sigma$  sans rencontrer  $S$ ). Il est très probable que le résultat que nous avons en vue soit vrai avec cette définition plus naturelle de  $SS(d, N)$ , mais l'auteur ne sait pas le démontrer.

Le fait que  $S$  est une sphère n'est pas important; on peut se contenter de n'importe quel ensemble  $S$  contenu dans  $W \cap B(x_0, r)$ , à condition que la dimension de  $S$  soit  $< N - d$  (la démonstration que nous allons donner conviendra encore dans ce cas). Enfin, nous avons encore demandé explicitement que (2) soit satisfaite, mais (2) est en fait une conséquence facile de (46).

**Proposition 3.** Soit  $\Sigma \in SS(d, N)$ . Alors, il existe  $\gamma > 0$  et  $M \geq 0$  tels que, si  $x_0 \in \Sigma$  et  $r > 0$ , on puisse trouver une fonction  $M$ -lipschitzienne  $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{N-d}$  et un ensemble compact  $E \subset \Sigma \cap B(x_0, r)$  tel que  $\sigma(E) \geq \gamma\sigma(B(x, r))$  et tel que  $E$  soit contenu dans l'image du graphe de  $F$  par une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^N$ . Par conséquent, l'opérateur  $T_\sigma^*$  défini par (43) est borné sur  $L^p(\mathbb{R}^N, d\sigma)$  pour  $1 < p < \infty$ .

Le début de la démonstration de cette Proposition est calqué sur la preuve de la proposition 2. Comme lorsque  $N = d + 1$ , on veut appliquer le Théorème 1, et on prendra pour  $z$  la projection orthogonale sur un plan  $V$  de dimension  $d$ .

Si  $x_0 \in \Sigma$  et  $r > 0$ , soient  $W$  et  $S$  le  $(N - d)$ -plan et la sphère donnés par (46). Soit  $x_1$  un point de  $S$ , et soit  $V$  le  $d$ -plan orthogonal à  $W$  passant par  $x_1$  (voir la figure 3). Supposons un instant que  $z(B(x_0, 3r))$  ne contienne pas la boule de  $V$  centrée en  $x_1$  et de rayon  $(2C_0)^{-1}r$ , et soit  $x_2$  un point de cette boule tel que  $z^{-1}(\{x_2\})$  ne rencontre pas  $\Sigma \cap B(x_0, 3r)$ . Appelons  $D$  le disque de dimension  $N - d$ , parallèle à  $W$ , centré en  $x_2$ , et de rayon  $2r$ . Alors,  $D$  ne ren-

Figure 3. ( $d = 1, N = 3$ ).

contre pas  $\Sigma$ , et si  $E$  est l'union de  $D$  et de tous les segments  $[x, h(x)]$ , où  $x$  est un point de  $S$  et  $h(x)$  est sa projection orthogonale sur le  $(N - d)$ -plan passant par  $x_2$  et parallèle à  $W$ , alors  $E$  ne rencontre pas  $\Sigma$ , parce que  $S$  est à distance  $\geq C_0^{-1}r$  de  $\Sigma$ . Comme chaque  $h(x)$  est dans  $D$ , on peut aisément trouver une homotopie qui fixe  $E$  et qui transforme le complémentaire d'un voisinage de  $E$  en  $B(x_0, 10r)^c$  sans rencontrer  $E$ , ce qui contredit la définition de  $S$ . Ainsi,  $z(B(x_0, 3r))$  contient une boule de rayon  $(2C_0)^{-1}r$ , de sorte que  $|z(B(x_0, 3r))| \geq r/C$ .

Le même argument que lorsque  $N = d + 1$  nous permet maintenant d'affirmer que la Proposition 3 est une conséquence du lemme suivant.

**Lemme 16.** *La propriété (9) est vérifiée lorsque  $\Sigma \in SS(d, N)$ , et  $z$  est la projection orthogonale sur un sous-espace  $V$  de dimension  $d$ .*

Pour prouver ce lemme, donnons-nous une constante  $C_1$ , un point  $x \in \Sigma$ , un entier  $n \geq 0$ , et soit  $T$  l'ensemble des  $n$ -cubes qui rencontrent  $B(x, C_2 \epsilon^n)$ . Supposons que  $|z(T)| \geq \delta \sigma(T)/2$  et aussi que, pour tout  $n$ -cube  $R \subset T$ ,  $\partial(R) \leq (1 + 2\eta)\partial(T)$ ; on veut en déduire que  $z(T)$  contient la boule centrée en  $z(x)$  et de rayon  $C_1 \epsilon^n$  (à condition que  $C_2$  soit assez grand et  $\eta$  assez petit).

On peut supposer que  $x = 0$ ,  $n = 0$ , et que  $z$  est la projection sur le  $d$ -plan «horizontal»

$$V = \{x \in \mathbb{R}^N : x_{d+1} = \dots = x_N = 0\}.$$

Soit

$$W = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 = \dots = x_d = 0\}$$

le  $(N - d)$ -plan orthogonal.

Si  $z(B(0, C_2))$  contient  $V \cap B(0, C_1)$ , nous avons prouvé (9). On peut donc supposer qu'il existe un point  $x_0 \in V \cap B(0, C_1)$ , tel que  $z^{-1}(\{x_0\})$  ne rencontre pas  $\Sigma \cap B(0, C_2)$ . Le reste de la démonstration consistera à trouver une contradiction avec (46); très grossièrement, l'idée est que si  $\partial(R) \leq (1 + 2\eta)\partial(T)$  pour tout 0-cube  $R$ , on ne peut jamais avoir deux 0-cubes  $R$  et  $R'$  dont les projections coïncident, ce qui nous aidera à trouver une contraction de  $\Sigma$  qui ne rencontre pas une sphère  $S$  donnée à l'avance. Commençons par quelques notations:  $Q_0$  sera le cube centré en 0 et de côté  $(4N)^{-1}C_2$  (de sorte que  $2Q_0$  est contenu dans  $B(0, C_2)$ ),  $V_0$  sera la projection  $z(Q_0)$ , et  $W_0 = h(Q_0)$ , où l'on note  $h$  la projection sur  $W$ . Quitte à changer un peu  $C_2$ , on peut supposer que les sommets de  $Q_0$  sont dans  $C_1\mathbb{Z}^N$ . Recouvrons  $V_0$  par les cubes compacts contenus dans  $V_0$ , de côté  $C_1$ , et dont les sommets sont dans  $C_1\mathbb{Z}^N$  (nous noterons ces cubes  $A_i$ ,  $i \in I$ ). Enfin, nous noterons dorénavant  $(x, y)$ , avec  $x \in V$  et  $y \in W$ , le point courant de  $\mathbb{R}^N$ .

**Lemme 17.** *Il existe une constante  $C$  (qui ne dépend que de  $C_0$ ,  $\delta$  et  $C_1$ ) telle que, pour tout  $i \in I$ , le nombre des cubes  $Q \subset W_0$  dont les sommets sont dans  $C_1\mathbb{Z}^{N-d}$  et qui sont tels que  $A_i \times Q$  rencontre  $\Sigma$ , est  $\leq C$ .*

En effet, si  $n$  est ce nombre, on peut trouver  $2^{-N}n$  boules disjointes, de rayon  $10^{-1}C_1$ , centrées en des points de  $\Sigma \cap Q_0$ , et dont la projection sur  $V$  est contenue dans le cube  $2A_i$ . Si  $n$  était trop grand, on pourrait conclure comme dans la démonstration du Lemme 15. Nous noterons  $J(i)$  l'ensemble des cubes  $Q$  du Lemme 17.

**Lemme 18.** *Pour tout  $i \in I$ , on peut trouver un point  $x_i$ , dans l'intérieur de  $A_i$ , tel que si  $Q$  et  $Q'$  sont deux cubes de  $J(i)$  et si  $z(\Sigma \cap A_i \times Q)$  et  $z(\Sigma \cap A_i \times Q')$  contiennent  $x_i$ , alors  $Q$  et  $Q'$  sont adjacents.*

En effet, si  $Q$  et  $Q'$  ne sont pas adjacents, ils sont à distance  $\geq C_1$  l'un de l'autre; dans ce cas, si  $C_1$  est assez grand, tout 0-cube  $R$  qui rencontre  $A_i \times Q$  est disjoint de tout 0-cube  $R'$  qui rencontre  $A_i \times Q'$ . Donnons-nous un  $\alpha > 0$ . Si  $|z(R) \cap z(R')| > \alpha$ , alors  $|z(T)| \leq \sum |z(R_j)| - \alpha$  (où la somme porte sur tous les 0-cubes  $R_j \subset T$ ), donc

$$|z(T)| \leq (1 + 2\eta)\partial(T)\sigma(T) - \alpha < \partial(T)\sigma(T) = |z(T)|$$

si  $\eta$  est assez petit. Par conséquent,  $|z(R) \cap z(R')| \leq \alpha$ , et comme  $A_i \times Q$  et  $A_i \times Q'$  ne rencontrent qu'un nombre  $\leq C$  de 0-cubes, on obtient

$$|z(\Sigma \cap A_i \times Q) \cap z(\Sigma \cap A_i \times Q')| < C\alpha.$$

Compte tenu du Lemme 17, l'ensemble des points  $x \in A_i$  tels qu'il existe deux cubes non adjacents  $Q$  et  $Q'$  dans  $J(i)$  pour lesquels

$$x \in z(\Sigma \cap A_i \times Q) \cap z(\Sigma \cap A_i \times Q')$$

a une mesure  $\leq C\alpha < C_1^d$  (en choisissant  $\alpha$  assez petit), ce qui prouve le Lemme 18.

Nous allons faire subir à  $\Sigma$  une première homotopie, qui déplacera les points parallèlement à  $V$ , afin d'agrandir les trous dont le Lemme 18 révèle l'existence.

**Lemme 19.** *On peut trouver une homotopie  $F_t(x, y)$ , définie et continue sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{N-d}$ , et telle que*

- (47)  $F_t(x, y) = (x, y)$  dès que  $t = 0$  ou que  $(x, y)$  est hors de  $2Q_0$ ;
- (48)  $|F_t(x, y) - (x, y)| \leq 2NC_1$  pour tout  $t$  et tout  $(x, y)$ ;
- (49)  $h(F_t(x, y)) = y$  pour tout  $t$  et tout  $(x, y)$ ;
- (50) Notons  $\Sigma_1$  l'image de  $\Sigma$  par  $F_1$ . Pour tout  $i \in I$ , on peut trouver un cube  $B(i) \subset W_0$ , de côté  $4C_1$ , tel que si  $(x, y) \in \Sigma_1 \cap Q_0$ , si  $x \in A_i$ , et si  $y \notin B(i)$ , alors  $x \in \partial A_i$ . De plus, il existe un  $i_0 \in I$  tel que  $A_{i_0} \subset B(0, CC_1)$  et tel que si  $(x, y) \in \Sigma_1 \cap Q_0$  avec  $x \in A_{i_0}$ , alors  $x \in \partial A_{i_0}$ .

Pour construire  $F_t$ , donnons nous pour chaque  $I$  un point  $x_i$  comme au Lemme 18, et choisissons un cube  $B$  de côté  $C_1$  tel que  $\Sigma \cap A_i \times Q$  ne rencontre pas  $z^{-1}(\{x_i\})$  dès que  $Q \in J(i)$  n'est pas contenu dans  $3B$ . On peut construire une homotopie  $F_{i,t}$ , définie sur  $[0, 1] \times A_i \times W$ , qui est l'identité sur  $[0, 1] \times \partial A_i \times W$ , qui ne change pas la coordonnée  $y$ , et qui transforme le complémentaire dans  $A_i \times (W_0 \setminus 4B)$  d'un voisinage cylindrique de  $\{x_i\} \times (W_0 \setminus 4B)$  en  $\partial A_i \times (W_0 \setminus 4B)$ . On choisit le voisinage cylindrique de façon à ce qu'il ne rencontre pas  $\Sigma$ ; alors, en mettant bout-à-bout les homotopies  $F_{i,t}$ , on obtient une fonction  $F$  qui vérifie (47), (48), (49), et la première moitié de (50). La seconde moitié de (50) est encore plus facile à obtenir: on choisit  $i_0$  tel que  $A_{i_0}$  contienne un point  $x_0 \in B(0, C_1)$  tel que  $z^{-1}(\{x_0\})$  ne rencontre pas  $\Sigma \cap B(0, C_2)$  (on a supposé plus haut qu'un tel point existe), et on déforme  $3A_{i_0} \times W$  de manière à transformer le complémentaire d'un voisinage tubulaire de  $\{x_0\} \times W$  en  $\partial(3A_{i_0}) \times W$ . On obtient, en recollant cette homotopie aux  $F_{i,t}$  construites plus haut, la fonction  $F_t$  cherchée.

Nous allons maintenant déformer la surface  $\Sigma_1$ , en déplaçant les points parallèlement à  $W$ , pour obtenir une nouvelle surface  $\Sigma_2$  telle que, pour tout  $x \in V_0$ ,  $\Sigma \cap z^{-1}(\{x\})$  soit composé d'au plus  $C$  points.

**Lemme 20.** *On peut trouver une fonction  $G_t(x, y)$ , définie et continue sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{N-d}$ , et telle que*

- (50)  $G_t(x, y) = (x, y)$  quand  $t = 0$  ou quand  $(x, y)$  est hors de  $2Q_0$ ;
- (51)  $|G_t(x, y) - (x, y)| \leq C$  pour tout  $t$  et tout  $(x, y)$ ;
- (52)  $z(G_t(x, y)) = x$  pour tout  $t$  et tout  $(x, y)$ ;
- (53) si  $\Sigma_2$  est l'image de  $\Sigma_1$  par  $G_1$ , alors, pour tout  $x \in V_0$ ,  $\Sigma_2 \cap z^{-1}(\{x\})$  a au plus  $C$  éléments.

Pour chaque  $i \in I$  et chaque cube  $Q \in J(i)$ , notons  $c_Q$  le centre de  $Q$ , et soit  $P(Q)$  l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^N$  tels que  $\text{dist}(x, A_i) < 1$ , et tels que  $y$  est dans le cube de centre  $c_Q$  et de côté  $(1 - \text{dist}(x, A_i))C_1$ . Notons  $P$  l'union, pour  $i \in I$  et  $Q \in J(i)$ , des  $P(Q)$ ; pour chaque  $x \in 2V_0$ , soit  $P(x)$  l'ensemble des points  $y \in W_0$  tels que  $(x, y) \in P$ . On définit une semi-distance  $D$  sur  $W$  par

$$D(y, y') = \inf_{\gamma} \left\{ \int_{[0, 1]} |\gamma'(u)| \chi_{\gamma(u) \notin P(x)} du \right\},$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des chemins  $\gamma$  de classe  $C^1$  tels que  $\gamma(0) = y$  et  $\gamma(1) = y'$ . Grâce à la forme particulière des  $P(Q)$ , la distance  $D$  est une fonction lipschitzienne de  $x$ . On définit maintenant la fonction  $G_t$  par  $z(G_t(x, y)) = x$  et

$$(54) \quad h(G_t(x, y)) = \lambda_0 y + \sum_Q \lambda_Q c_Q,$$

où la somme porte sur les cubes  $Q$  tels que  $x \in z(P(Q))$ , et où  $\lambda_0$  et les  $\lambda_Q$  sont donnés par les formules suivantes:

$$(55) \quad \lambda_0 = M^{-1} \mu_0 \quad \text{et} \quad \lambda_Q = M^{-1} \mu_Q, \quad \text{où}$$

$$(56) \quad \mu_0 = 1 - t \sup_Q \{ [1 - \text{dist}(x, A_i)]_+ f[D(y, c_Q)] \}$$

(où  $i$  est l'indice tel que  $Q \in P(i)$ ),

$$(57) \quad \mu_Q = t [1 - \text{dist}(x, A_i)]_+ f[D(y, c_Q)],$$

où  $f$  est une fonction  $C^\infty$  décroissante, telle que  $f(0) = 1$  et  $f(u) = 0$  pour tout  $u \geq 1$ , et où

$$(58) \quad M = \mu_0 + \sum_Q \mu_Q.$$

Vérifions que  $G_t$  est bien la fonction annoncée dans le lemme. Les coefficients  $\mu_0$  et  $\mu_Q$  ne sont jamais simultanément nuls, et donc  $G_t$  est une fonction

continue (en particulier de  $x$ ). D'autre part, si  $t = 0$  ou si  $(x, y)$  n'est pas dans  $2Q_0$ , tous les  $\mu_Q$  sont nuls et  $\mu_0 = 1$ , donc  $G_t(x, y) = (x, y)$ . L'inégalité (51) découle de ce que tous les cubes  $Q$  tels que  $\mu_Q \neq 0$  sont à distance (euclidienne)  $< C$  de  $y$ , de sorte que  $h(G_t(x, y))$  est une moyenne de points situés à distance  $\leq C$  de  $y$ .

Il ne reste plus qu'à vérifier (53). Fixons  $i \in I$  et  $x \in A_i$ . A cause de notre définition de  $D$ , le coefficient  $\mu_0$  est nul lorsque  $t = 1$  et  $y$  est dans l'un des cubes  $Q' \in J(i)$ ; de plus, les  $\mu_Q$  sont constants sur chaque composante connexe de  $P(x)$ , de sorte que  $h(G_t(x, y))$  ne prend qu'un nombre  $\leq C$  de valeurs lorsque  $y$  décrit l'union des  $Q'$  (qui contient  $\Sigma \cap z^{-1}(\{x\})$  par définition de  $J(i)$ , et  $\Sigma_1 \cap z^{-1}(\{x\})$  car on a choisi l'homotopie  $F_t$  de façon à ce que  $z[F_t(x, y)]$  soit dans  $A_i$  quand  $x \in A_i$ ). On en déduit le Lemme 20.

Appelons  $L = \Sigma_2 \cap Q_0 \cap z^{-1}(\bigcup_i \partial A_i)$ . Compte tenu de (53),  $L$  est un ensemble de dimension  $\leq d - 1$  (et il nous sera facile de modifier une homotopie de manière à lui faire éviter un ensemble donné  $S$  de dimension  $N - d - 1$ ). Par ailleurs, grâce à (51) et au Lemme 19,  $L' = (\Sigma_2 \cap Q_0) \setminus L$  est contenu dans l'union des  $A_i \times CB(i)$ ,  $i \neq i_0$ , qui rencontrent  $\Sigma_2$  (où  $i_0$  et  $B(i)$  sont comme au Lemme 19).

Pour obtenir notre contradiction, donnons-nous une sphère  $S$  de dimension  $N - d - 1$ , contenue dans  $Q_0/2$ , dont la distance à  $\Sigma$  est  $\geq C^{-1}C_2$ , et qui est entrelacée avec  $\Sigma$  au sens de la Définition 3. Notons que, si  $C_2$  est assez grand, l'image de  $\Sigma$  par les homotopies successives que nous avons construites ne rencontre pas  $S$ .

**Lemme 21.** *On peut trouver une homotopie  $H_t$ , telle que  $H_t(x, y) = (x, y)$  pour  $t = 0$  et pour  $(x, y)$  hors de  $2Q_0$ , telle que  $H_1(L \cup L')$  soit contenu dans  $\partial Q_0$ , telle que  $H_t(L \cup L') \cap S = \emptyset$  pour tout  $t$ .*

Rangeons les cubes  $A_i$  en deux catégories: nous dirons que  $A_i$  est plein si  $z(\Sigma_2 \cap [A_i \times CB(i)])$  contient au moins un point de l'intérieur de  $A_i$ ; sinon, nous dirons que  $A_i$  est vide. Notons que, grâce à la seconde partie de (50), on est sûr qu'au moins un des cubes intérieurs de  $V_0$  est vide. Soit  $A_i$  un cube plein dont l'un des voisins (appelons-le  $A_j$ ) est vide. Alors, on peut trouver une homotopie de  $\mathbb{R}^N$  qui contracte  $[A_i \cup A_j \setminus V] \times CB(i)$  (où  $V$  est un petit voisinage tubulaire du point  $x_j$ ) en une partie de  $\partial[A_i \cup A_j] \times CB(i)$ , sans rien changer hors de  $(A_i \cup A_j) \times 2CB(i)$ . Nous venons de trouver une homotopie à l'issue de laquelle le cube  $A_j$  est devenu vide. On peut répéter cette opération aussi longtemps que nécessaire, et obtenir une homotopie qui transforme  $L'$  en un ensemble  $L''$  dont la projection est contenue dans l'union des  $\partial A_i$ . On peut encore appliquer la technique du Lemme 20 pour obtenir, après nouvelle homotopie (que nous appellerons  $M_t(x, y)$ ), un ensemble  $L^{(3)}$  qui est de



dimension  $\leq d - 1$ . Notons que chacune des homotopies que nous venons de composer n'est différente de l'identité que dans des boules de rayon  $C$  contenant un point de  $\Sigma_2$ , et, même dans ces boules, diffère de l'identité par moins de  $C$ . Si  $C_2$  est assez grand, l'image de  $L \cup L'$  par  $M_t$  ne rencontre pas  $S$ .

Appliquons une dernière homotopie  $N_t$ , que l'on choisit de classe  $C^1$ , et qui contracte le complémentaire dans  $Q_0$  d'une petite boule de l'intérieur de  $Q_0$  ne rencontrant pas  $M_1(L \cup L')$ , en une partie de  $\partial Q_0$ . Si l'on mettait  $M_t$  et  $N_t$  bout-à-bout, on obtiendrait une homotopie qui convient presque pour le Lemme 21, sauf que la trajectoire de  $M_1(L \cup L')$  par  $N_t$  pourrait rencontrer  $S$ . Cette difficulté est aisément circonvenue, car comme  $S$  est de dimension  $< N - d$  et la trajectoire par  $N_t$  de  $M_1(L \cup L')$  est de dimension  $\leq d$ , on peut trouver une petite perturbation de  $N_t$  telle que  $N_t[M_1(L \cup L')]$  ne rencontre jamais  $S$ . Si nous composons les homotopies des Lemmes 19, 20 et 21, nous obtenons une homotopie qui contredit la définition de  $S$  (en fait, il faudrait encore modifier un peu notre construction pour obtenir une homotopie qui soit l'identité hors de  $B(0, 5|Q_0|^{1/N})$ , au lieu de  $2Q_0$ ; nous omettrons ce détail facile). Nous avons enfin prouvé le Lemme 16 et la Proposition 3.

Signalons pour finir que la figure 4 représente un exemple de surface qui a une grande projection sur le plan horizontal, mais qui ne contient pas de gros morceaux de graphe lipschitzien. On pourrait aussi prendre le produit d'un ensemble de Cantor de dimension 1 (l'exemple de Garnett-Ivanov) par un segment. L'exemple  $\Sigma$  de la figure ne satisfait pas, bien entendu, la condition 9 (la projection de  $\Sigma$  sur le plan horizontal préserve la mesure à une constante près, mais est loin d'être un homéomorphisme). Par ailleurs, la démonstration de P. Jones du Théorème de Garnett s'applique aussi à  $\Sigma$ : le noyau de Cauchy-Clifford ne définit pas un opérateur borné sur  $L^2(\Sigma)$  (voir [J]).

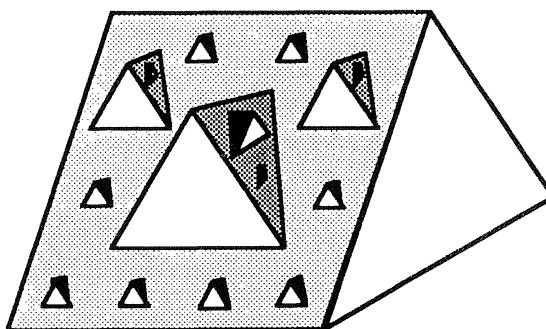


Figure 4. Un contre-exemple.

## Références

- [CMM] Coifman, R. R., McIntosh, A. et Meyer, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur  $L^2$  pour les courbes lipschitziennes, *Ann. of Math.* **116**(1982), 361-387.
- [D1] David, G. Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **17**(1984), 157-189.
- [D2] David, G. Opérateurs d'intégrale singulière sur les surfaces régulières, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **21** (1988), 225-258.
- [G] De Guzmán, M. Differentiation of integrals in  $\mathbb{R}^n$ . *Lect. Notes in Math.* 481, Springer Verlag, 1975.
- [J] Jones, P. Square functions, Cauchy integrals, analytic capacity, and harmonic measure. A paraître, Actes du Séminaire d'Analyse Harmonique, El Escorial, Juin 1986.
- [MRV] Martio, O., Rickman, s. et Väisälä, J. Definitions for quasiregular mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1*, **448**(1969), 1-40.
- [R] Resetnjak, J. G. A condition for boundedness of index for mappings with bounded distortion (en russe), *Sibirsk, Mat. Z.* **9**(1968), 368-374.
- [S1] Semmes, S. Chord-arc surfaces with small constants I et II, preprint.
- [S2] Semmes, S. A criterion for the boundedness of singular integrals on hypersurfaces, à paraître, *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [St] Stein, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, 1970.

Guy David  
 Centre de Mathématiques  
 Ecole Polytechnique  
 91128 Palaiseau Cedex, France