Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 2, n.° 3, 1986

Problèmes de Dirichlet, Neumann, Calderón dans les quasidisques pour les classes holderiennes

Michel Zinsmeister

1. Introduction et énoncé des résultats

1. Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, nous désignons par $\Lambda^{\alpha}(E)$ $(0 < \alpha < 1)$ la classe des fonctions $f: E \to \mathbb{C}$ pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, y \in E, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha},$$

et nous notons

$$\|f\|_{\Lambda^{\alpha}(E)} = \sup_{\substack{x,y \in E \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\alpha}}.$$

2. Soit maintenant Ω un domaine de Jordan borné du plan complexe et $\Gamma = \partial\Omega$. Si $f \in C(\Gamma)$, soit u la solution du problème de Dirichlet: $\Delta u = 0$ dans Ω, $u|_{\Gamma} = f$. Si $0 < \alpha < 1$, nous dirons que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet dans Ω pour Λ^{α} s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{\Lambda^{\alpha}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^{\alpha}(\Gamma)}$$

pour toute fonction $f \in \Lambda^{\alpha}(\Gamma)$.

Il est bien connu que l'on peut résoudre le problème de Dirichlet dans le disque unité D pour tous les Λ^α, $0 < \alpha < 1$. D'un autre côté, on a le théorème suivant qui a été le point de départ de notre travail.

Théorème 1 (Hinkkanen [6]). *Si Ω est un domaine de Jordan quelconque on peut résoudre le problème de Dirichlet dans Ω pour tous les Λ^α avec $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ et l'indice $\frac{1}{2}$ est critique.*

Notre premier objectif a été d'étudier quelles conditions sur Ω peuvent permettre de dépasser cet indice critique $\frac{1}{2}$.

Bien évidemment, si Ω est régulier (de classe $C^{1+\epsilon}$ par exemple), la représentation conforme $\varphi: D \to \Omega$ est bilipschitzienne et l'on peut résoudre le problème de Dirichlet dans Ω pour tous les Λ^α avec $0 < \alpha < 1$. Mais même si Ω est de classe C^1, la représentation conforme n'est d'aucune utilité.

Une autre idée est celle de perturbation du disque unité, qui nous a conduit au résultat suivant:

Théorème 2. *Soit Ω un domaine de Jordan tel que la représentation conforme $\varphi: D \to \Omega$ s'étende en un homéomorphisme K-quasiconforme de la sphère de Riemann avec $1 \leqslant K \leqslant 2$; alors on peut résoudre le problème de Dirichlet dans Ω pour Λ^α si $0 < \alpha < 1/K$.*

Remarque. Afin de donner un énoncé du théorème 2 ne dépendant pas de la représentation conforme, rappelons qu'un K-quasidisque est l'image du disque unité par un homéomorphisme K-quasiconforme de la sphère de Riemann. Si Ω est un K-quasidisque, on montre facilement que la représentation conforme $\varphi: D \to \Omega$ se prolonge en un homéomorphisme K^2-quasiconforme de $\overline{\mathbb{R}}^2$. On a donc un énoncé analogue au théorème 2 pour les K-quasidisques, à condition cependant de remplacer K par K^2 dans l'énoncé. Naturellement, ce n'est une amélioration du théorème d'Hinkkanen que pour $K < \sqrt{2}$.

3. Soit toujours Ω un domaine de Jordan. Nous dirons que l'on peut résoudre le problème de Neumann dans Ω pour Λ^α si pour toute fonction f, réelle, appartenant à $\Lambda^\alpha(\Gamma)$ on peut trouver une fonction $g \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$, réelle, telle que $f + ig$ soit la valeur au bord d'une fonction F holomorphe appartenant à $\Lambda^\alpha(\Omega)$.

Les théorèmes 1 et 2 ci-dessus, combinés avec le théorème suivant permettent de donner immédiatement une réponse satisfaisante au problème de Neumann dans les quasidisques.

Théorème 3 (Gehring-Martio [3]). *Soit Ω un quasidisque et u une fonction harmonique dans Ω. Alors*

$$\frac{1}{C}\sup_{z\in\Omega} d(z,\Gamma)^{-\alpha+1}|\nabla u(z)| \leqslant \|u\|_{\Lambda^\alpha(\Omega)} \leqslant C\sup_{z\in\Omega} d(z,\Gamma)^{-\alpha+1}|\nabla u(z)|$$

où $C > 1$ ne dépend que de Ω et de $\alpha \in (0, 1)$.

Corollaire. *Soit Ω un K-quasidisque et*

$$\beta = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{K^2}\right).$$

Alors on peut résoudre le problème de Neumann dans Ω pour Λ^α si $0 < \alpha < \beta$.

PREUVE. Soit $f \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$ et u la solution du problème de Dirichlet $\Delta u = 0$ dans Ω, $u|_\Gamma = f$. Par les théorèmes 1 et 2, $u \in \Lambda^\alpha(\Omega)$. Soit maintenant v le conjugué harmonique de u dans Ω; alors $|\nabla u| = |\nabla v|$ et le corollaire découle du théorème 3. □

4. Nous dirons que l'on peut résoudre le problème de Calderón pour $\Lambda^\alpha(\Gamma)$ si toute fonction $f \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $f = f_1 + f_2$ avec $f_j \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$ où f_1 est valeur au bord d'une fonction holomorphe $F_1 \in \Lambda^\alpha(\Omega)$ et f_2 est valeur au bord d'une fonction holomorphe $F_2 \in \Lambda^\alpha(\mathbb{C}\backslash\bar{\Omega})$ vérifiant de plus

$$\lim_{|z|\to\infty} F_2(z) = 0.$$

Là encore, si Ω est le disque unité on peut résoudre le problème de Calderón dans Λ^α pour $0 < \alpha < 1$. Si Ω est un domaine lipschitzien, c'est encore vrai et le résultat découle des travaux de Lemarié [7]. Il semble que rien n'était connu pour une courbe Γ non rectifiable. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant, qui donne une réponse partielle.

Théorème 4. *Il existe une constante $a > 1$ telle que si Ω est un K-quasidisque avec*

$$K^{2a} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

on peut résoudre le problème de Calderón pour $\Lambda^\alpha(\Gamma)$ si

$$\alpha \in \left(\frac{K^{2a}-1}{K^{2a}+1}, \frac{1}{2K^{4a}-1}\right).$$

Le théorème 4 implique en particulier que pour tout $\alpha \in (0, 1)$ on peut résoudre le problème de Calderón pour $\Lambda^\alpha(\Gamma)$ si K est suffisamment proche de 1.

2. Démonstration du théorème 2

Nous suivons la méthode d'Hinkkanen.

Soit $f \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$ et u son prolongement harmonique dans Ω.

Soit $z \in \Omega$ et ζ un point de Γ tel que $|z - \zeta| \leqslant 2d$ où l'on a posé $d = \operatorname{dist}(z, \Gamma)$.

Lemme 1. *Il existe une constante C ne dépendant que de K telle que si $\alpha < 1/K$, $|u(z) - u(\zeta)| \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} d^\alpha$.*

PREUVE DU LEMME 1. Posons $v(z') = u(z') - u(\zeta)$. On a la représentation:

$$v(z) = \int_\Gamma v(\lambda)\omega(z, d\lambda)$$

où $\omega(z, d\lambda)$ est la mesure harmonique sur Γ dans Ω par rapport à z. Soit, pour $n \geqslant 0$,

$$E_n = \{\lambda \in \Gamma : 2^n d \leqslant |\lambda - z| < 2^{n+1} d\};$$

alors

$$v(z) = \sum_{n \geq 0} \int_{E_n} v(\lambda)\omega(z, d\lambda).$$

Si $\lambda \in E_n$,

$$|v(\lambda)| \leqslant \|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} |\lambda - \zeta|^\alpha \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} 2^{\alpha n} d^\alpha$$

et par suite

$$|v(z)| \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} \Big(\sum_{n \geq 0} 2^{\alpha n} \omega(z, E_n) \Big) d^\alpha. \quad \square$$

Le lemme 1 va alors découler du lemme 2 suivant donnant une estimation de $\omega(z, E_n)$.

Lemme 2. *Soit $E(r) = \{\lambda \in \Gamma; |\lambda - z| \geqslant rd\}$ avec $r \geqslant 1$.*

Alors $\omega(z, E(r)) \leqslant Cr^{-1/K}$ oú C ne dépend que de K.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. Soit $\varphi : D \to \Omega$ une répresentation conforme. Par hypothèse φ se prolonge en une application K-quasiconforme de la sphère de Riemann que nous appellerons encore φ. Quitte à composer par une transformation de Möbius laissant D invariant on peut supposer que $\varphi(\infty) = \infty$. Soit $\psi = \varphi^{-1}$: c'est encore un homéomorphisme K-quasiconforme de la sphère tel que $\psi(\infty) = \infty$. Soit $z_0 = \psi(z) \in D$. Si $\zeta \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, notons $C(z, r)$ le cercle de centre z et de rayon r, et $\gamma(z, r) = \psi(C(z, r))$.

Par le théorème de distorsion de Koebe

$$\frac{d}{3}|\psi'(z)| \geqslant |\psi(\omega) - \psi(z)| \geqslant \frac{d}{16}|\psi'(z)| \quad \text{si} \quad \omega \in C\left(z, \frac{d}{4}\right).$$

Comme

$$\frac{1}{4}(1 - |z_0|^2)|\varphi'(z_0)| \leqslant d \leqslant (1 - |z_0|^2)|\varphi'(z_0)| \quad \text{et} \quad \varphi'(z_0) = \frac{1}{\psi'(z)}$$

on a

$$\frac{2}{3}(1 - |z_0|) \geqslant |\zeta - z_0| \geqslant \frac{1}{64}(1 - |z_0|) \quad \text{si} \quad \zeta \in \gamma\left(z, \frac{d}{4}\right).$$

Soient maintenant r' et r'' les réels définis par

$$(1 - |z_0|)r' = \inf_{\zeta \in \gamma(z, rd)} |\zeta - z_0| \quad , \quad (1 - |z_0|)r'' = \sup_{\zeta \in \gamma(z, rd)} |\zeta - z_0|.$$

Soit T la famille des courbes joignant $\gamma(z, d/4)$ à $\gamma(z, rd)$ dans la «couronne» définie par ces deux courbes. Alors

$$\frac{2\pi}{\log 64r''} \leqslant M(T) \leqslant KM(\varphi(T)) = \frac{2\pi K}{\log 4r} \Rightarrow r'' \geqslant \frac{4^{1/K}}{64} r^{1/K}.$$

On applique alors le lemme suivant, dû à Mori.

Lemme de Mori [8]. *Il existe une constante $C(K)$ tele que si ϕ est un homéomorphisme K-quasiconforme de la sphère de Riemann tel que $\phi(\infty) = \infty$ alors, $\forall z \in C$, $\forall r > 0$,*

$$\sup_{\zeta \in C(z, r)} |\Phi(\zeta) - \Phi(z)| \leqslant C(K) \inf_{\zeta \in C(z, r)} |\Phi(\zeta) - \Phi(z)|.$$

Grâce à ce lemme, nous voyons que $r' \geqslant C(K)r'' \geqslant C(K)r^{1/K}$. On peut alors écrire

$$\omega(z, E(r)) \leqslant \omega(z_0, \mathcal{E}(r'), D)$$

où

$$\mathcal{E}(r') = \{\lambda \in \partial D; |\lambda - z_0| \geqslant r'(1 - |z_0|)\},$$

et par un calcul standard, on vérifie que $\omega(z_0, \mathcal{E}(r'), D) \leqslant C/r'$. Finalement,

$$\omega(z, E(r)) \leqslant \omega(z_0, \mathcal{E}(r'), D) \leqslant C/r' \leqslant C(K)r^{-1/K}$$

et le lemme 2 est entièrement démontré, ainsi que le lemme 1. □

Lemme 3.

$$L = \sup_{\substack{z_1, z_2 \in \bar{\Omega} \\ |z_1 - z_2| < 1}} |u(z_1) - u(z_2)| = \sup_{\substack{z_1 \in \partial\Omega \\ z_2 \in \Omega \\ |z_1 - z_2| < t}} |u(z_1) - u(z_2)| = R.$$

PREUVE. Soient $z_1, z_2 \in \Omega$, $h = z_1 - z_2$ $|h| < t$. Alors la fonction

$$v(z) = u(z + h) - u(z)$$

est harmonique dans $\{z \in \Omega; z + h \in \Omega\} = \tilde{\Omega}$. Soit Ω_1 la composante connexe de $\tilde{\Omega}$ contenant z_1. Si $z \in \partial\Omega_1$ alors $z \in \Gamma$ ou bien $z + h \in \Gamma$ d'où $|v(z)| \leqslant R$. Par le principe du maximum, $|v(z_1)| \leqslant R$ et le lemme 3 s'en déduit. $\square$

Pour terminer la preuve du théorème 2, il nous reste à montrer que

$$R \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} t^\alpha.$$

Soit donc $z_1 \in \Gamma$ et $z_2 \in \Omega$. Si $|z_1 - z_2| \leqslant 2d(z_2, \Gamma)$ alors

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} |z_1 - z_2|^\alpha$$

par le lemme 1.

Si $|z_1 - z_2| > 2d(z_2, \Gamma)$, choisissons $\zeta \in \Gamma$; $d(z_2, \Gamma) = |z_2 - \zeta|$.

Alors

$$\begin{aligned} |u(z_1) - u(z_2)| &\leqslant |u(z_1) - u(\zeta)| + |u(\zeta) - u(z_2)| \\ &\leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} (|z_1 - \zeta|^\alpha + d(z_2, \Gamma)^\alpha) \\ &\leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} |z_1 - z_2|^\alpha. \ \square \end{aligned}$$

Avant de poursuivre, donnons deux corollaires de résultats précédents, dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 1. *Soit $\Phi: D \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ une fonction holomorphe univalente admettant une extension K-quasiconforme à $\overline{\mathbb{R}}^2$. Alors Φ appartient à l'espace de Hardy $H^p(D)$ si $p < 1/K$ et, pour ces valeurs de p, $\|\Phi\|_p \leqslant C(p, K)|\Phi(0)|$.*

Cette proposition généralise le théorème de Prawitz ([1] p. 90) dans le cas où $K < 2$. Notons encore que si Φ se prolonge en un homéomorphisme K-q.c. tel que $\Phi(\infty) = \infty$, alors le lemme de Mori permet d'obtenir le résultat beaucoup plus fort

$$\|\Phi\|_\infty \leqslant C(K)|\Phi(0)|.$$

DÉMONSTRATION. Soit $f(z) = \Phi(z) - \Phi(0)$. Alors, avec les notations du lemme 2, si $r \geqslant d = d(0, f(\partial D))$,

$$|\{z \in \partial D; |f(z)| \geqslant r\}| = \omega\left(0, E\left(\frac{r}{d}\right), f(D)\right)$$
$$\leqslant C(K)\left(\frac{d}{r}\right)^{1/K}$$

par le lemme 2. D'où

$$\|f\|_p^p \leqslant 2\pi p \int_0^d r^{p-1}\, dr + pC(K)d^{1/K}\int_d^{\infty} r^{p-1-1/K}\, dr$$
$$\leqslant C(p,K)d^p \leqslant C(p,K)|\Phi(0)|^p,$$

car $0 \notin \Phi(D)$.

La proposition 1 en découle car $\|\Phi\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + |\Phi(0)|^p$. □

Proposition 2. *Soit Ω un K-quasidisque et $f \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$ avec $0 < \alpha < 1/K^2$. Il existe alors $F \in \Lambda^\alpha(R^2)$, harmonique en dehors de Γ, telle que $f = F|_\Gamma$.*

DÉMONSTRATION. Supposons pour simplifier que $0 \in \Omega$. Tout d'abord, on peut prolonger f en $u \in \Lambda^\alpha(\Omega)$ harmonique par le théorème 2. Pour prolonger f à l'extérieur de Ω considérons ψ une représentation conforme de $\mathbb{C} - \bar{D}$ sur $\mathbb{C} - \bar{\Omega}$ telle que $\psi(\infty) = \infty$. Par hypothèse, ψ peut se prolonger en un homéomorphisme K^2-q.c. de la sphère. Soit $\tilde{\Omega}$ le transformé de $\mathbb{C}\backslash\bar{\Omega}$ par l'inversion $z \to 1/z$. Alors $h(z) = 1/\psi(1/z)$ est une représentation conforme de D sur $\tilde{\Omega}$ se prolongeant en une application K^2-q.c. Soit alors $\tilde{f}$ l'application définie sur $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega}$ par $\tilde{f}(z) = f(1/z)$. Alors

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z')| \leqslant C\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z'}\right|^\alpha \leqslant C'|z - z'|^\alpha$$

car $|zz'| \geqslant d(0,\Gamma)^2$. Par le théorème 2 on peut alors prolonger $\tilde{f}$ en une application harmonique $\in \Lambda^\alpha(\tilde{\Omega})$. On prolonge alors f sur $\mathbb{C}\backslash\bar{\Omega}$ en posant $F(z) = \tilde{f}(1/z)$ et l'on vérifie que l'on a encore $f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{C}\backslash\bar{\Omega})$. L'application F ainsi construite convient. □

3. Démonstration du Théorème 4

Posons tout d'abord $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \mathbb{C}\backslash\bar{\Omega}$.

Dans un premier temps nous établissons l'existence de la décomposition pour $f = \varphi|_\Gamma$ où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour ce faire on écrit, d'après une formule classique,

$$\forall z \in \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{\partial}\varphi(\omega)}{\omega - z}\, d\omega\, d\bar{\omega}$$

où

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

puis on pose

$$f_1(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_2} \frac{\bar{\partial}\varphi(\omega)}{\omega - z}\, d\omega\, d\bar{\omega} \qquad (z \in \Omega_1)$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_1} \frac{\bar{\partial}\varphi(\omega)}{\omega - z}\, d\omega\, d\bar{\omega} \qquad (z \in \Omega_2).$$

On a bien $f = f_1 + f_2$ sur Γ; reste à montrer que $\|f_j\|_{\Lambda^\alpha(\Omega_j)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)}$ et que $|f_2(z)| \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Vu le théorème 2, et à condition que $\alpha < 1/K^2$, il suffit évidemment de la vérifier uniquement pour f_2. On suppose donc $\alpha < 1/K^2$ et l'on considère le prolongement harmonique u_1 de f dans Ω_1. Comme il sera démontré dans la suite, la fonction $u_1 - \varphi$ appartient à l'espace de Sobolev $W_1^1(\Omega_1)$ et donc,

$$\forall z \in \Omega_2, \qquad f_2(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_1} \frac{\bar{\partial}u_1(\omega)}{\omega - z}\, d\omega\, d\bar{\omega}.$$

Pour vérifier que $f_2 \in \Lambda^\alpha(\Omega_2)$ on utilise alors le critère de Gehring et Martio (Théorème 3): il suffit de montrer l'existence d'une constante C telle que

$$\forall z \in \Omega_2, \qquad |f_2'(z)| \leqslant C d(z, \Gamma)^{\alpha - 1}\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)}.$$

Or

$$f_2'(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_1} \frac{\bar{\partial}u_1(\omega)}{(\omega - z)^2} \quad \text{et} \quad |\bar{\partial}u_1(\omega)| \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} d(\omega, \Gamma)^{\alpha - 1}$$

par les théorèmes 2 et 3.

Pour obtenir la conclusion désirée, il suffit donc que α vérifie les conditions suivantes:

(1) $$\alpha < 1/K^2$$

(2) $$\exists C > 0; \qquad \forall \zeta \in \Omega_2, \qquad \iint_{\Omega_1} \frac{d(z, \Gamma)^{\alpha - 1}}{|z - \zeta|^2}\, dz\, d\bar{z} \leqslant C d(\zeta, \Gamma)^{\alpha - 1}.$$

Soit φ une représentation conforme de D sur Ω_1. Alors

$$I(\alpha, \zeta) = \iint_{\Omega_1} \frac{d(z, \Gamma)^{\alpha - 1}}{|z - \zeta|^2}\, dz\, d\bar{z} \leqslant C \iint_D \frac{(1 - |z|)^{\alpha - 1}|\varphi'(z)|^{\alpha + 1}}{|\varphi(z) - \zeta|^2}\, dz\, d\bar{z}.$$

On choisit plus précisément φ de sorte que $\psi(z) = (\varphi(z) - \zeta)^{-1}$ se prolonge en un homéomorphisme K^2-q.c. de $\bar{\mathbb{C}}$ tel que $\psi(\infty) = \infty$. On écrit alors

$$\begin{aligned}I(\alpha, \zeta) &\leqslant C \iint_D (1 - |z|)^{\alpha - 1} |\varphi(z) - \zeta|^{2\alpha} \psi'(z)|^{\alpha + 1}\, dz\, d\bar{z} \\ &\leqslant C\Big(\iint_D (1 - |z|)^{q(\alpha - 1)} |\varphi(z) - \zeta|^{2\alpha q}\, dz\, d\bar{z}\Big)^{1/q} \Big(\iint_D |\psi'(z)|^{p(\alpha + 1)}\, dz\, d\bar{z}\Big)^{1/p} \\ &= C I_1(\alpha, \zeta) I_2(\alpha, \zeta)\end{aligned}$$

où $p, q > 1$ sont à choisir tel que $1/p + 1/q = 1$.

Pour choisir $p > 1$, nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 5 (Gehring et Reich [4]). *Il existe une constante $a \in (1,40)$ telle que pour tout homéomorphisme K-q.c. de la sphère tel que $\psi(\infty) = \infty$, on ait*

$$\Big(\iint_D J_\psi(z)^{K^a/(K^a - 1)}\, dz\, d\bar{z}\Big)^{(K^a - 1)/K^a} \leqslant C(a, K) \iint_D J_\psi(z)\, dz\, d\bar{z}$$

où $J_\psi(z)$ désigne le jacobien de ψ au point z.

Ce théorème admis, on choisit p de sorte que

$$p(\alpha + 1) = \frac{2K^{2a}}{K^{2a} - 1}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}&\Big(\iint_D |\psi'(z)|^{p(\alpha + 1)}\, dz\, d\bar{z}\Big)^{1/p} \\ &\qquad = \Big(\iint_D [|\psi'(z)|^2]^{K^{2a}/(K^{2a} - 1)}\, dz\, d\bar{z}\Big)^{[(K^{2a} - 1)/K^{2a}][(\alpha + 1)/2]} \\ &\qquad \leqslant C(a, K)\Big(\iint_D |\psi'|^2(z)\, dz\, d\bar{z}\Big)^{(\alpha + 1)/2} \leqslant \frac{C}{d^{1 + \alpha}},\end{aligned}$$

où $d = d(\zeta, \Gamma)$ car $|\psi(z)| \leqslant 1/d$ si $z \in D$.

Nous avons donc montré que, pour ce choix de p,

$$I_2(\alpha, \zeta) \leqslant C d^{-1-\alpha}.$$

Pour estimer $I_1(\alpha, \zeta)$ nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4. $|\varphi(0) - \zeta| \leqslant Cd$ *où C ne dépend que de K.*

PREUVE DU LEMME 4. Par le lemme de Mori, puisque ψ se prolonge en un homéomorphisme K^2-q.c. de $\bar{\mathbb{R}}^2$ tel que $\psi(\infty) = \infty$,

$$\sup_{y \in \partial D} |\psi(y) - \psi(0)| \leqslant C(K) \inf_{y \in \partial D} |\psi(y) - \psi(0)|.$$

Soit d'autre part $\Delta = \operatorname{diam}(\Omega_1)$. Alors

$$\inf_{y\in\partial D} |\psi(y)| \leqslant \frac{4}{\Delta}$$

tandis que

$$\sup_{y\in\partial D} |\psi(y)| = \frac{1}{d}\cdot$$

—Si $d \geqslant \dfrac{\Delta}{8C(K)}$ alors $|\psi(0)| \geqslant \dfrac{4}{\Delta} \geqslant \dfrac{1}{2C(K)d}\cdot$

—Si maintenant $d < \dfrac{\Delta}{8C(K)}$, écrivons $|\psi(0)| = \dfrac{\epsilon}{d}\cdot$

Si $\epsilon \geqslant 1$, il n'y a rien à démontrer. Sinon,

$$A = \sup_{y\in\partial D} |\Psi(y) - \psi(0)| \geqslant \frac{1-\epsilon}{d}$$

tandis que

$$B = \inf_{y\in\partial D} |\psi(y) - \psi(0)| \leqslant \frac{4}{\Delta} + \frac{\epsilon}{d} \leqslant \frac{1 + 2\epsilon C(K)}{2C(K)d}\cdot$$

En écrivant que $A \leqslant C(K)B$ on s'aperçoit alors que nécessairement

$$\epsilon \geqslant \frac{1}{2(1 + C(K))}$$

ce qui démontre le lemme 4. □

Revenons à l'estimation de $I_1(\alpha, \zeta)$. Puisque

$$p = \frac{2K^{2a}}{(\alpha + 1)(K^{2a} - 1)},$$

le calcul donne

$$q = \frac{2K^{2a}}{2K^{2a} - (\alpha + 1)(K^{2a} - 1)}\cdot$$

D'autre part, on peut écrire:

$$I_1(\alpha, \zeta) = \left\{\int_0^1 r(1 - r)^{q(\alpha-1)}\left(\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta}) - \zeta|^{2\alpha q}\, d\theta\right) dr\right\}^{1/q}.$$

Deux cas se présentent alors:

1.$^{\text{er}}$ *cas.*

$$2\alpha q \leqslant \frac{1}{K^{2a}} < \frac{1}{K^2} \Leftrightarrow \alpha \leqslant \frac{K^{2a}+1}{4K^{4a}+K^{2a}-1}.$$

On a alors, par la proposition 1,

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta}) - \zeta|^{2\alpha q}\, d\theta \leqslant C|\varphi(0) - \zeta|^{2\alpha q} \leqslant Cd^{2\alpha q}$$

par le lemme 4 et donc, si $q(1-\alpha) < 1$

$$I_1(\alpha, \zeta) \leqslant Cd^{2\alpha}$$

et l'on a (2) en combinant cette dernière estimation avec celle sur $I_2(\alpha, \zeta)$.

La condition $q(1-\alpha) < 1$ équivaut à

$$\alpha > \frac{K^{2a}-1}{K^{2a}+1}.$$

Pour que cette étude nous fournisse des valeurs effectives de α, il faut encore que

$$\frac{K^{2a}-1}{K^{2a}+1} < \frac{K^{2a}+1}{4K^{4a}+K^{2a}-1}$$

ce qui équivaut à $K^{4a} - K^{2a} - 1 < 0$ ou encore à

$$K^{2a} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2.$^{\text{eme}}$ *cas.*

$$2\alpha q > \frac{1}{K^{2a}} \Leftrightarrow \alpha > \frac{K^{2a}+1}{4K^{4a}+K^{2a}-1}.$$

On utilise le lemme suivant, dû à Hardy-Littlewood ([1], p. 84).

Lemme 5. *Soit f appartenant à l'espace de Hardy $H^p(D)$ où $0 < p < \infty$. Alors, si $q > p$,*

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^q\, d\theta\right)^{1/q} \leqslant \frac{K\|f\|_p}{(1-r)^{1/p-1/q}},$$

où K est une constante universelle.

Appliquons ce lemme à notre propos:

$$\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta}) - \zeta|^{2\alpha q}\, d\theta \leqslant Cd^{2\alpha q}(1 - r)^{1 - 2\alpha q K^{2a}}$$

et l'on obtient (2) si

$$q(1 - \alpha) + 2\alpha q K^{2a} - 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2K^{4a} - 1}.$$

Là encore, pour pouvoir conclure il faut avoir

$$\frac{1}{2K^{4a} - 1} > \frac{K^{2a} + 1}{4K^{4a} + K^{2a} - 1} \Leftrightarrow K^{2a} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La condition (2) est donc vérifiée si

$$K^{2a} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha \in \left(\frac{K^{2a} - 1}{K^{2a} + 1}, \frac{1}{2K^{4a} - 1}\right).$$

Comme

$$\frac{1}{2K^{4a} - 1} \leqslant \frac{1}{K^{2a}} \leqslant \frac{1}{K^2}$$

si $K \geqslant 1$, on a également (1).

Pour vérifier que $|f_2(z)|$ tend vers 0 à l'infini on écrit que

$$\begin{aligned}
|f_2(z)| &\leqslant C\frac{1}{|z|} \iint_{\Omega_1} |\bar{\partial} u_1(\omega)|\, d\omega\, d\bar{\omega} \quad \text{pour} \quad |z| \geqslant 2\,\mathrm{diam}\,(\Omega_1), \\
&\leqslant \frac{C}{|z|} \|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} \iint_{\Omega_1} d(\omega, \Gamma)^{\alpha - 1}\, d\omega\, d\bar{\omega} \\
&\leqslant \frac{C}{|z|} \|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} \iint_D (1 - |z|)^{\alpha - 1} |\varphi'(z)|^{\alpha + 1}\, dz\, d\bar{z}
\end{aligned}$$

où $\varphi: D \to \Omega_1$ est une représentation conforme se prolongeant en un homéomorphisme K^2-q.c. de la sphère tel que $\varphi(\infty) = \infty$. En reprenant alors la même méthode que dans la démonstration de (2) on obtient

$$|f_2(z)| \leqslant \frac{C}{|z|} \|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)}, \qquad |z| \geqslant 2\,\mathrm{diam}\,(\Omega_1).$$

L'existence de la décomposition est donc établie pour $f = \varphi|_\Gamma$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Soit maintenant f une fonction quelconque de $\Lambda^\alpha(\Gamma)$. Par la proposition 2, $f = F|_\Gamma$ où $\|F\|_{\Lambda^\alpha(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)}$. On peut naturellement supposer que F est à support compact. F est alors limite uniforme d'une suite $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\|\varphi_n\|_{\Lambda^\alpha(R^2)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)}.$$

Par ce que l'on vient de voir, on peut décomposer φ_n en

$$\varphi_n = \varphi_n^1 + \varphi_n^2 \quad \text{où} \quad \varphi_n^j \in \Lambda^\alpha(\Omega_j)$$

avec $\|\varphi_n^j\|_{\Lambda^\alpha(\Omega_j)} \leqslant C\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)}$. Comme d'autre part

$$|\varphi_n^2(\zeta)| \leqslant \frac{C}{|\zeta|}\|f\|_{\Lambda^\alpha(\Gamma)} \quad \text{pour} \quad |\zeta| \geqslant 2\,\mathrm{diam}\,(\Omega_1),$$

on obtient le fait que (φ_n^2) est une famille équicontinue sur $\Omega_2 \cup \{\infty\}$. Par le théorème d'Ascoli il existe une sous suite $(\varphi_{n_k}^2)$ qui converge uniformément sur Ω_2 vers une fontion f_2 holomorphe dans $\Lambda^\alpha(\Omega_2)$. Comme la suite (φ_n) est elle-même uniformément convergente, l'existence de la décomposition de Calderón est démontrée dans le cas général.

Reste à établir l'unicité de cette décomposition. Supponsons que $f \in \Lambda^\alpha(\Gamma)$ admette deux décompositions

$$f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2.$$

Alors la fonction

$$F = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{sur} \quad \Omega_1 \\ g_2 - f_2 & \text{sur} \quad \Omega_2 \end{cases}$$

se prolonge en une fonction $F \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R}^2)$, holomorphe en dehors de Γ et nulle à l'infini.

Par [2] (p. 66) on peut alors conclure que $F \equiv 0$ à condition que la dimension de Hausdorff de Γ soit $< 1 + \alpha$. Pour évaluer la dimension de Hausdorff de Γ on utilise un théorème de Gehring-Väisälä [5] qui affirme que la dimension de Hausdorff de l'image d'un cercle par une application K-quasiconforme de $\overline{\mathbb{R}}^2$ est inférieure ou égale à $2K^a/(K^a + 1)$ où a est la constante du théorème 5. En combinant ces deus résultats on conclut la preuve du théorème 4 car

$$\alpha > \frac{K^{2a} - 1}{K^{2a} + 1} \Rightarrow (1 + \alpha) > \frac{2K^{2a}}{K^{2a} + 1} \geqslant \dim \Gamma. \quad \square$$

Remarques.

1) Les résultats de [2] montient que le théorème 4 est faux pour $\alpha \leqslant \dim \Gamma - 1$.

2) A. Hinkkanen, après avoir lu le manusccrit de cet article, a montré que la constante $\frac{1}{2}$ du théorème 1 pouvait être améliorée pour *tous* les quasidisques.

Références

[1] Duren, P. L. *Theory of H^p spaces. Academic Press.*

[2] Garnett, J. Analytic capacity and measure. *Lecture Notes* 297. Springer-Verlag.

[3] Gehring, F. W. and Martio, O. Quasidisks and the Hardy-Litlewood-property. *Complex variables*, **2** (1983), 67-78.

[4] Gehring, F. W. and Reich, E. Area distorsion under quasiconformal mappings. *Ann. Acad. Sci Fenn.*, **388** (1966), 1-15.

[5] Gehring, F. W. and Väisälä, J. Hausdorff dimension and quasiconformal mappings. *J. London Math. Soc.*, **6** (1973), 504-512.

[6] Hinkkanen, A. Modulus of continuity of harmonic functions. Preprint, Univ. Michigan.

[7] Lemarié, P. G. Algébres d'opérateurs et semi-groupe de Poisson sur un espace de nature homogène. *Publ. Math. d'Orsay* (1984).

[8] Mori, A. On quasiconformality and pseudoanalyticity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 56-77.

Michel Zinsmeister
Université de Rouen
Département de Mathématiques
76130 Mont Saint Aignan
Cedex

et

Université de Paris-Sud
Unité associée 757
Analyse Harmonique
Mathématiques (Bât. 425)
91405 Orsay Cedex