Revista Matemática Iberoamericana
Vol. 1, n.º 4, 1985

Opérateurs de Calderón-Zygmund, fonctions para-accrétives et interpolation

Dédié à Alberto P. Calderón

G. David, J. L. Journé, et S. Semmes

Introduction

Calderón et Zygmund ont introduit une classe d'opérateurs intégraux singuliers généralisant la transformée de Hilbert et les transformées de Riesz [CZ]. Cette classe s'est progressivement enrichie jusqu'à contenir des opérateurs qui ne sont pas de convolution. Dans l'étude de ces opérateurs, le problème central est celui de la continuité sur L^2, pour lequel en général Plancherel n'est pas suffisant. Ce problème a suscité de très belles pages d'analyse ([C1], [C2], [CMM1], [CM1]) où des cas particuliers sont traités: les commutateurs de Calderón, le noyau de Cauchy sur les courbes lipschitiziennes, les opérateurs multilinéaires de Coifman et Meyer. Ce n'est que récemment qu'un critère général de continuité sur L^2 est apparu [DJ]. Ce critère, appelé le «Théorème $T1$», dit qu'un opérateur d'intégrale singulière est borné sur L^2 si et seulement si il est faiblement borné (voir la Définition 3) et lui-même et son adjoint envoient la fonction 1 dans BMO.

Un premier motif de frustation est que ce théorème ne permet pas de montrer directement la continuité sur L^2 du plus célèbre des opérateurs de Calderón-Zygmund, le noyau de Cauchy sur les graphes lipschitziens [CMM1]. Un autre motif de frustation est le suivant. Depuis les papiers [CW1] et [CW2] de Coifman-Weiss, il est reconnu que le cadre naturel de la théorie des intégrales singulières est celui des espaces de type homogène. On voudrait avoir une théorie des opérateurs aussi souple que celle des espaces de nature homogène, et en particulier invariante par changement de variable bilipschitzien. Or le Théorème $T1$ ne l'est pas. Coifman a réglé ce problème en démontrant le Théorème $T1$ dans le cadre des espaces de nature homogène. Dans le cas particulier d'un espace euclidien muni de la mesure $b(x)\,dx$, on obtient l'énoncé suivant:

«Soit b une fonction positive bornée telle que b^{-1} soit également bornée, et soit M_b l'opérateur de multiplication ponctuelle par b. Un opérateur d'intégrale singulière T est borné sur L^2 si et seulement si $M_b T M_b$ est faiblement borné, Tb et $T^* b$ sont dans BMO».

Le principal outil de sa démonstration, non publiée, est le lemme de Cotlar, Knapp et Stein [KS], réputé depuis sa naissance comme l'outil le plus prometteur pour les problèmes de continuité sur L^2.

Peu après, Y. Meyer remarquait qu'il suffirait de pouvoir remplacer, dans l'énoncé précédent, l'hypothèse «b est positive» para l'hypothèse d'accrétivité $Re\, b \geqslant \delta > 0$ pour pouvoir traiter directement la continuité sur L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens. En collaboration avec A. McIntosh, il obtint ce résultat dans le cas où T et son transposé envoient b sur 0, ce qui est suffisant pour beaucoup d'applications, dont le noyau de Cauchy [MM]. Leur démonstration repose sur un résultat d'interpolation provenant de la solution du problème de Kato en dimension 1 [CMM1], et semble limitée au cadre des espaces euclidiens.

L'objet de ce texte est de donner des conditions très générales sur des fonctions b et c pour que l'énoncé suivant soit vrai: «un opérateur d'intégrale singulière T est borné sur L^2 si et seulement si $M_c T M_b$ est faiblement borné, $Tb \in$ BMO, et ${}^tTc \in$ BMO», où ${}^tT$ désigne le transposé de T. On est amené à introduire une classe de fonctions, que nous appellerons para-accrétives, contenant les fonctions accétives et les dérivées des paramétrisations normales de courbes de Lavrentiev (aussi appelées courbes corde-arc). L'énoncé écrit plus haut est vrai lorsque b et c sont para-accrétives, et cette classe de fonction est, en un certain sens, optimale.

La démonstration du théorème est écrite dans les espaces euclidiens, mais peut facilement être généralisée aux espaces de nature homogène en utilisant [A], [CW1], [CW2], [MS1], [MS2]. C'est dans cet esprit que nous avons remplacé l'espace C_0^∞ des fonctions test par l'espace C_0^η des fonctions hölderiennes d'exposant η á support compact, et, naturellement, que nous nous sommes interdit l'usage de la transformée de Fourier.

Au paragraphe 1, nous faisons quelques rappels sur les intégrales singulières. Au paragraphe 2, nous énonçons les théorèmes de Coifman et McIntosh Meyer, et nous démontrons le théorème de Coifman dans le cas particulier de

$(\mathbb{R}^d, b(x)\,dx)$. Les fonctions para-accrétives sont introduites au paragraphe 3, et nous démontrons au paragraphe 4 deux lemmes de théorie des opérateurs destinés à remplacer le lemme de Cotlar-Knapp-Stein. Le théorème principal est énoncé au paragraphe 5, et il est montré au paragraphe 6 que la para-accretivité est une condition nécessaire pour que le Théorème Tb soit vrai. Quelques extensions du Théorème Tb sont mentionnées au paragraphe 7; le Théorème Tb est utilisé au paragraphe 8 pour prouver directement la continuité de l'opérateur de Cauchy sur les courbes de Lavrentiev, et pour construire un calcul fonctionnel holomorphe en plusieurs variables pour certains opérateurs différentiels du premier ordre à coefficients peu réguliers. On montre au paragraphe 9 que l'espace d'interpolation complexe à mi-chemin entre l'espace de Sobolev B^{-s} $(s > 0)$ et bB^s est L^2 si et seulement si la fonction b est para-accrétive.

Nous souhaitons vivement remercier R. Coifman pour nous avoir réunis cet automne et, bien sûr, pour nous avoir expliqué ses idées. La visite de A. McIntosh et Y. Meyer fut le moment le plus excitant de ce séjour, et aussi le plus fructueux. Quoique plus occasionnels, T. Fack, J. St-Raymond et J. C. Sikorav ont été de précieux collaborateurs, que nous tenons à remercier. La rédaction de cet article a bénéficié de nombreuses suggestions de L. Schwartz et de M. Herman dont nous leur sommes très reconnaissants.

I. OPÉRATEURS DE CALDERÓN-ZYGMUND

1. Opérateurs d'integrale singulière

Un opérateur d'intégrale singulière est habituellement un opérateur défini et continu de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans son dual et associé, en un sens à préciser, à un noyau vérifiant des estimations dites «standard» (voir [CM1]) que nous rappelons.

Définition 1. *Soit K une fonction continue définie sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, x \neq y\}$ et soit $0 < \delta \leqslant 1$. La fonction K est un noyau δ-standard s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

(1.1) *pour tout* (x,y) *dans* Ω, $|K(x,y)| \leqslant \dfrac{C}{|x-y|^d}$

(1.2) *pour tout* (x,y) *dans* Ω *et tout* $x' \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $|x-x'| < \frac{|x-y|}{2}$,

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leqslant C\frac{|x-x'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}} \quad et$$

$$|K(y,x) - K(y,x')| \leqslant C\frac{|x-x'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}.$$

La plus petite constante C pour laquelle (1.1) *et* (1.2) *sont satisfaits sera notée* $|K|_\delta$.

Définition 2. *Soit* $K\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction vérifiant* (1.1) *et soit* $T\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \to$ $\to [C_0^\infty(\mathbb{R}^d)]'$ *un opérateur linéaire continu. La fonction K est associée à T si, pour tous f et g* C^∞ *à supports compacts disjoints,*

$$\langle g, Tf\rangle = \int g(x)K(x,y)f(y)\,dy\,dx, \tag{1.3}$$

où l'on note $\langle g, Tf\rangle$ *l'action de la distribution Tf sur la fonction g.*

Dans le cas où la fonction K est antisymétrique, elle est automatiquement associée à un opérateur $\tilde{K}$ défini par

$$\langle g, \tilde{K}f\rangle = \frac{1}{2}\iint \{g(x)f(y) - g(y)f(x)\}K(x,y)\,dy\,dx, \tag{1.4}$$

g et f étant deux fonctions C^∞ à support compact. La régularité de f et g entraîne la convergence de l'intégrale; plus précisément, si le diamètre de $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g$ est inférieur à t,

$$|\langle g, \tilde{K}f\rangle| \leqslant Ct^{d+2}\|\nabla f\|_\infty \|\nabla g\|_\infty, \tag{1.5}$$

où C ne dépend que de la dimension et de la constante apparaissant dans (1.1). L'inégalité (1.5) est une conséquence de l'estimation

$$|g(x)f(y) - g(y)f(x)| \leqslant A|x-y|,$$

où $A = C(\|g\|_\infty\|\nabla f\|_\infty + \|f\|_\infty\|\nabla g\|_\infty) \leqslant Ct(\|\nabla f\|_\infty\|\nabla g\|_\infty)$. L'inégalité (1.5) entraîne que $\tilde{K}$ est faiblement borné. Rappelons ce que ceci signifie (voir aussi [DJ]).

Définition 3. *Un opérateur linéaire continu* $T\colon C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \to [C_0^\infty(\mathbb{R}^d)]'$ *est* ***faiblement borné*** *s'il existe* $N \geqslant 0$ *et* $C > 0$ *tels que pour tout cube Q et toutes fonctions f et g* C^∞ *et supportées dans Q,*

$$|\langle g, Tf\rangle| \leqslant C|Q|P(N,f,Q)P(N,g,Q), \tag{1.6}$$

où $P(N,f,Q)$ est la semi-norme

$$P(N,f,Q) = \sum_{|\alpha| \leq N} |Q|^{|\alpha|/d} \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right\|_\infty .$$

Les méthodes de variable réelle de Calderón, Zygmund et leur école permettent de montrer qu'un opérateur d'intégrale singulière s'étend en un opérteur continu sur L^2 si et seulement si on peut choisir $N = 0$ dans la définition précédente, ou en d'autres termes si

$$|\langle g, Tf \rangle| \leqslant C|Q| \, \|g\|_\infty \|f\|_\infty . \tag{1.7}$$

Une démonstration peut être trouvée dans [J2], pp. 43 et 49. Nous reviendrons plus tard sur les hypothèses qu'il faut ajouter à (1.6) pur déduire (1.7). Pour l'instant, notons que si T est un opérateur borné associé à un noyau K vérifiant (1.1), on peut, dans la Définition 3, choisir $N = 1$, ou même mieux encore.

Proposition 1. *Soit T un opérateur faiblement borné associé à un noyau K vérifiant* (1.1). *Alors, pour tout* $0 < \eta \leqslant 1$, *il existe* $C_\eta > 0$ *tel que, pour toutes fonctions $C^\infty f$ et g supportées dans un cube Q,*

$$|\langle f, Tf \rangle| \leqslant C_\eta |Q|^{1+(2\eta/d)} \|f\|_\eta \|g\|_\eta , \tag{1.8}$$

où

$$\|f\|_\eta = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\eta} .$$

Notons que (1.6) implique que T peut être étendu en un opérateur continu de $C_0^N(\mathbb{R}^d)$ dans son dual. La proposition 1 nous dit que T peut même être étendu en un opérateur continu de λ^η dans son dual, où λ^η est la clôture de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\| \ \|_\eta$.

Remarquons que (1.8) est d'autant plus fort que η est petit, et (1.7) équivaut à dire que C_η ne dépend pas de η.

Rappelons le lemme de commutation de Meyer [M].

Lemme 1.1. *Soit T: $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \to [C_0^\infty(\mathbb{R}^d)]'$ un opérateur linéaire faiblement borné (au sens de la définition 3) associé à un noyau K vérifiant* (1.1). *Alors, si f, g et h sont trois fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

$$\langle f, T(gh) \rangle - \langle fg, Th \rangle = \iint f(x)(g(y) - g(x))K(x,y)h(y)\, dx\, dy. \tag{1.9}$$

Les hypothèses du lemme entraînent immédiatement que cette intégrale est absolument convergente, ce qui reste d'ailleurs vrai lorsque f et h sont bornées à support compact et $\|g_\eta\| < +\infty$ pour un $\eta > 0$.

Démontrons le lemme. L'égalité (1.9) est vraie quand T est donné par intégration contre un noyau K défini et localement borné sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Nous allons donc nous ramener à ce cas. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction radiale, symétrique, d'intégrale 1, supportée dans la boule unité, et soit P_t l'opérateur de convolution avec la fonction φ_t déterminée par $\varphi_t(x) = (1/t^d)\varphi(x/t)$. L'opérateur P_t est continu de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même et est auto-adjoint. L'opérateur T_t défini par $\langle g, T_t f\rangle = \langle (P_t g), T(P_t f)\rangle$ est donc bien défini et continu de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans son dual. De plus, T_t est donné par intégration contre un noyau localement borné que nous allons maintenant expliciter.

Soient f et g deux fonctions de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $t_0 > 0$. Soit Q un cube contenant les supports des fonctions $\varphi_t(x - \cdot)g(\cdot)$ et $\varphi_t(y - \cdot)f(\cdot)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t \leqslant t_0$. Pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, soit

$$\varphi_t^z(x) = \varphi_t(x - z) = \frac{1}{t^d}\varphi\left(\frac{x - z}{t}\right).$$

Pour $N \geqslant 1$, soit C_Q^N l'espace de Banach des fonctions N fois continûment différentiable supportées dans Q, muni de la norme

$$\|f\|_{N,Q} = \sum_{|\alpha| \leq N}\left\|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right\|_\infty.$$

L'intégrale $\int g(z)\varphi_t^z dz$ est absolument convergente dans C_Q^N et sa somme est $P_t g$. D'autre part, la continuité faible de T entraîne que, pour un certain $N \geqslant 0$, T est continu de C_Q^N dans son dual. On a donc

$$\begin{aligned}\langle g, T_t f\rangle &= \langle P_t q, T(P_t f)\rangle \\ &= \left\langle \int g(z)\varphi_t^z dz, T\int f(w)\varphi_t^w dw\right\rangle \\ &= \iint g(z)\langle \varphi_t^z, T\varphi_t^w\rangle f(w)\, dz\, d\text{-} \\ w.\end{aligned}$$

Le noyau de T_t ets donc $K_t(z, w) = \langle \varphi_t^z, T\varphi_t^w\rangle$, qui est une fonction localement bornée de (z, w), et même bornée par $C_\varphi t^{-d}$ en raison de l'hypothèse (1.1) sur le noyau de T et de la continuité faible de T.

Pour conclure la démonstration du Lemme 1.1, on fait tendre t vers 0. Il est clair que $\lim_{t\to 0} P_t f = f$ dans C_Q^N, de sorte que $\langle g, Tf\rangle = \lim_{t\to 0}\langle g, T_t f\rangle$. Appliquant l'égalité (1.9) à T_t, on est amené à montrer que

$$\lim_{t\to 0}\iint f(x)\{g(y) - g(x)\}K_t(x, y)h(y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint f(x)\{g(y) - g(x)\}K(x, y)h(y)\, dx\, dy.$$

Par convergence dominée il suffit de montrer que $\lim_{t\to 0} K_t(x, y) = K(x, y)$ p.p. pour $x \neq y$ et que $|K_t(x, y)| \leqslant C/|x - y|^d$. Or, si $x \neq y$, les supports de

φ_t^x et φ_t^y sont disjoints pour $t < |x-y|/2$ et dans ce cas

$$K_t(x,y) = \langle \varphi_t^x, T\varphi_t^y \rangle = \iint \varphi_t(x-u)K(u,v)\varphi_t(v-y)\,dy\,dx,$$

de sorte que, par le théorème de différentiation de Lebesgue, $\lim_{t\to 0} K_t(x,y) = K(x,y)$ p.p. sur Ω. De plus, (1.1) entraîne que $|\langle \varphi_t^x, T\varphi_t^y\rangle| \leqslant C/|x-y|^d$; lorsque $t \geqslant |x-y|/4$ cette inégalité découle de (1.6).

Le Lemme 1.1 est démontré; nous passons à la démonstration de la proposition. Comme l'énoncé de la Proposition 1 est invariant par translations et dilatations, il suffit de la montrer lorsque Q est le cube unité. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction égale à 1 sur le cube unité. Le Lemme 1.1 entraîne $|\langle g, Tf\rangle| = |\langle g, T(f\theta)\rangle| \leqslant |\langle gf, T\theta\rangle| + \iint |f(x)|\,|g(x)-g(y)|\,|K(x,y)|\,|\theta(y)|\,dx\,dy$.

L'intégrale est clairement dominée par $C_\eta \|f\|_\infty \|g\|_\eta$, donc par $C_\eta \|f\|_\eta \|g\|_\eta$, de sorte qu'il reste à montrer que $|\langle gf, T\theta\rangle| \leqslant C_\eta \|f\|_\eta \|g\|_\eta$.

Comme $\|gf\|_\eta \leqslant \|g\|_\infty \|f\|_\eta + \|f\|_\infty \|g\|_\eta \leqslant C_\eta \|g\|_\eta \|f\|_\eta$, il suffit en fait de montrer que pour tout h,

$$|\langle h, T\theta\rangle| \leqslant C_\eta \|h\|_\eta. \tag{1.10}$$

Soient P_t comme dans la démonstration du Lemme 1.1 et $Q_t = -t(\partial/\partial t)P_t$. D'après (1.6),

$$|\langle P_1 h, T\theta\rangle| \leqslant C\|h\|_\infty \leqslant C_\eta \|h\|_\eta. \tag{1.11}$$

D'autre part, si $\tilde{Q}$ est un cube contenant le support de θ dans son intérieur, $\lim_{t\to 0} P_t h = h$ dans $C_{\tilde{Q}}^N$ pour tout $N \geqslant 0$. Il suffit donc de montrer que pour tout $t < 1$, $|\langle P_t h, T\theta\rangle| \leqslant C_\eta \|h\|_\eta$ et de passer à la limite en utilisant la continuité de T de $C_{\tilde{Q}}^N$ dans son dual. Compte tenu de (1.11), il suffit de vérifier que $|\langle (P_1 - P_t)h, T\theta\rangle| \leqslant C_\eta \|h\|_\eta$, ou encore $\int_t^1 |\langle Q_s h, T\theta\rangle|\,ds/s \leqslant C_\eta \|h\|_\eta$. Cette inégalité résultera de

$$|\langle Q_s h, T\theta\rangle| \leqslant C_{\eta'} \|h\|_\eta s^{\eta'} \tag{1.12}$$

pour tout $s \in]0,1]$ et tout $\eta' < \eta$.

Pour vérifier (1.12), on choisit à nouveau φ comme dans la démonstration du Lemme 1.1 et on note $\varphi_s^x(y) = (1/s^d)\varphi[(y-x)/s]$. Alors

$$Q_s h(y) = \int Q_s h(y)\varphi_s^x(y)\,dx \quad \text{et} \quad \theta(y) = \int \theta(y)\varphi_s^z(y)\,dz,$$

ces égalités ayant lieu dans $C_{\tilde{Q}}^N$ pour tout $N \geqslant 0$. Donc

$$|\langle Q_s h, T\theta\rangle| \leqslant \iint |\langle (Q_s h)\varphi_s^x, T\theta\varphi_s^z\rangle|\,dx\,dz.$$

On remarque maintenant que

$$\|Q_s h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \int \frac{1}{s^d} \psi\left(\frac{x-y}{s}\right) h(y)\, dy \right|,$$

où ψ est une fonction radiale de moyenne nulle, C^∞ et supportée dans la boule unité. Par conséquent

$$\begin{aligned} \|Q_s h\|_\infty &\leqslant \sup_x \left| \int \frac{1}{s^d} \psi\left(\frac{x-y}{s}\right)(h(y) - h(x))\, dy \right| \\ &\leqslant C \sup_{|x-y| \le 2s} |h(y) - h(x)| \leqslant Cs^\eta \|h\|_\eta. \end{aligned}$$

Cette inégalité permet de majorer $\iint_{|x-z| \ge 3s} |\langle (Q_s h)\varphi_s^x, T\theta\varphi_s^z\rangle|\, dx\, dz$ par $Cs^\eta \|h\|_\eta \iint_{\substack{|x-z| \ge 3s \\ |x|+|z| \le C}} |x-z|^{-d}\, dx\, dz$, soit encore par $Cs^\eta \|h\|_\eta \left(\log\frac{1}{s} + 1\right)$. Pour conclure la démonstration de (1.12), et par conséquent de la Proposition 1, il ne reste qu'à vérifier que

$$\iint_{|x-z| \le 3s} |\langle (Q_s h)\varphi_s^x, T\theta\varphi_s^z\rangle|\, dx\, dz \leqslant Cs^\eta \|h\|_\eta. \tag{1.13}$$

Notons que pour tout α,

$$\left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_\alpha} Q_s h \right\|_\infty \leqslant Cs^{\eta - |\alpha|} \|h\|_\eta,$$

ce qui se voit exactement comme dans le cas $|\alpha| = 0$. Comme pour $|x-z| \leqslant 3s$, $(Q_s h)\varphi_s^x$ et $\theta\varphi_s^z$ sont supportés dans un cube de côté $5s$, on déduit de (1.6) que $|\langle (Q_s h)\varphi_s^x, T\theta\varphi_s^z\rangle| \geqslant Cs^{d+\eta}\|h\|_\eta$. Il suffit pour obtenir (1.13) d'intégrer cette inégalité sur le domaine $\{|x-z| \leqslant 3s \text{ et } |x| \leqslant C\}$.

La Proposition 1 est démontrée. Elle signifie que l'on peut remplacer (1.6) par (1.8) dans la Définition 3 sans la changer, à condition que T soit associé à un noyau K vérifiant (1.1). Elle suggère également une modification de la définition d'un opérateur d'intégrale singulière, motivée par le fait suivant. Nous aurons l'occasion de travailler sur des espaces de nature homogène abstraits. Or sur ces espaces, la notion de fonction C^∞ n'existe pas; par contre Macias et Segovia ont montré [MS1] [MS2] que, sur tout espace de nature homogène, la notion de fonction höldérienne existe pour tout exposant suffisamment proche de 0. Il est donc naturel de définir un opérateur d'intégrale singulière comme a priori défini sur les fonctions à support compact höldériennes d'un exposant $\eta \in]0, 1]$.

Nous aurons besoin d'une généralisation supplémentarie. La lettre b désignera dans toute la suite une foction à valeurs complexes bornée ainsi que son inverse, et M_b désignera l'opérateur de multiplication ponctuelle par b. Soit

$C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f à support compact telles que

$$\|f\|_\eta = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\eta} < +\infty,$$

et soit $bC_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ l'image de $C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$, munie de la topologie image.

Définition 4. *Soient b_1 et b_2 deux fonctions bornées ainsi que leurs inverses. Un **opérateur d'intégrale singulière** (SIO) est un opérateur linéaire continu $T: b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ pour tout $\eta > 0$, associé à un noyau standard K au sens que, si f et g sont dans $C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ et ont des supports disjoints,*

$$\langle b_2 g, T(b_1 f)\rangle = \iint g(x) b_2(x) K(x,y) b_1(y) f(y)\, dy\, dx.$$

Remarquons que $M_{b_2} T M_{b_1}$ est défini de $C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ dans son dual et a pour noyau $b_2(x)K(x,y)b_1(y)$, qui vérifie (1.1). On dira que $M_{b_2} T M_{b_1}$ est faiblement borné s'il vérifie (1.8) pour un $\eta > 0$.

Comme dans le cas où $b_1 = b_2 = 1$, un SIO a une extensión naturelle à l'espace $b_1 C_b^\eta(\mathbb{R}^d)$ des produits par b_1 de fonctions bornées localement höldériennes d'exposant η. Soit $\{b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}_0$ le sous-espace de $b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ constitué des fonctions d'intégrale nulle. Pour définir $\langle g, Tf\rangle$ lorsque $f \in b_1 C_b^\eta(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \{b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}_0$, on choisit $h \in C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 sur un voisinage de $\operatorname{supp} g$ et on écrit

$$\langle g, Tf\rangle = \langle g, T(fh)\rangle + \langle g, T[f(1-h)]\rangle$$

où, pour un $x_0 \in \operatorname{supp} g$,

$$\langle g, T[f(1-h)]\rangle = \iint g(x)(K(x,y) - K(x_0,y)) f(y)(1-h(y))\, dy\, dx.$$

L'inégalité (1.2) entraîne que cette intégrale est convergente à l'infini. De plus, g et $1-h$ ayant des supports disjoints, le terme à intégrer est borné, de sorte que l'intégrale est absolument convergente. La propriété $\int g(x)\, dx = 0$ entraîne qu'elle ne dépend pas du choix de x_0; il est aussi facile de voir que $\langle g, Tf\rangle$, ainsi défini, ne dépend pas du choix de h et que cette nouvelle définition coincide avec l'ancienne lorsque $f \in b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$. Remarquons que, pour $f \in b_1 C_b^\eta(\mathbb{R}^d)$, Tf est défini par dualité contre les fonctions de moyenne nulle, donc à une constante additive près.

Nous allons maintenant énoncer un lemme qui permet de calculer Tf pour $f \in b_1 C_b^\eta(\mathbb{R}^d)$. Une suite $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de SIO de noyaux K_m est dite bornée si les T_m sont équicontinus de $b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ dans $[b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ pour chaque $\eta > 0$ et s'il existe $\delta \in]0,1]$ et $C > 0$ tels que $|K_m|_\delta \leqslant C$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Lemme 1.2. *Soit $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de* SIO *et* $T: b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to \{b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}'$ *un opérateur linéaire continu tel que pour tous* $f \in b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ *et* $g \in b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{m\to+\infty}\langle g, T_m f\rangle = \langle g, Tf\rangle$. *Si les noyaux K_m convergent uniformément sur tout compact de Ω vers une limite K, alors T est un* SIO *de noyau K. De plus, pour tout* $f \in b_1 C_b^\eta(\mathbb{R}^d)$ *et tout* $g \in \{b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}_0$, $\lim_{m\to\infty}\langle g, T_m f\rangle = \langle g, Tf\rangle$.

La première assertion est triviale. Pour vérifier la seconde, on choisit g, f et h comme avant l'énoncé du lemme. Alors $\langle g, T(fh)\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle g, T_m(fh)\rangle$ par hypothèse, et $\langle g, Tf(1-h)\rangle = \lim_{m\to\infty}\langle g, T_m[f(1-h)]\rangle$ d'après le théorème de convergence dominée. Le Lemme 1.2 est démontré.

Pour terminer ces préliminaires, nous donnons la démonstration dans ce contexte d'un théorème de Lemarié. L'étape principale est le lemme suivant.

Lorsque φ et ψ sont deux fonctions à support compact, on notera $\Delta\varphi$ le diamètre du support de φ, $\Delta\psi$ le diamètre du support de ψ, et $\Delta\varphi\psi$ le diamètre de $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\psi$.

Lemme 1.3. *Soit* $T: b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ *un* SIO *tel que $M_{b_2} T M_{b_1}$ soit faiblement borné, et dont le noyau K est δ-standard pour un $\delta > \eta$. On suppose de plus que $Tb_1 = 0$. Soient* $\varphi \in C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ *et* $\psi \in \{b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}_0$. *Alors*

$$(1.14) \qquad |\langle \psi, Tb_1\varphi\rangle| \leqslant C\frac{(\Delta\psi)^\eta(\Delta\varphi+\Delta\psi)^{d+\eta}}{(\Delta\varphi\psi)^{d+\eta}}\|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta.$$

Nous pouvons nous contenter de démontrer le lemme lorsque $\Delta\psi \leqslant \Delta\varphi$ (autrement, on remplace le support de φ par une boule de rayon $\Delta\psi$, ce qui ne change pas significativement $[(\Delta\varphi + \Delta\psi)/\Delta\varphi\psi]^{d+\eta}$).

Commençons par le cas où $\Delta\varphi\psi \geqslant 3\Delta\varphi$. Dans ce cas la distance entre $\operatorname{supp}\varphi$ et $\operatorname{supp}\psi$ est supérieure à $\Delta\varphi\psi/3$. Soit $x_0 \in \operatorname{supp}\psi$; en utilisant $\int\psi(x)\,dx = 0$ et la régularité en x de $K(x,y)$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle\psi, Tb_1\varphi\rangle| &= \left|\iint \psi(x)K(x,y)b_1(y)\varphi(y)\,dy\,dx\right| \\ &= \left|\iint \psi(x)(K(x,y)-K(x_0,y))b_1(y)\varphi(y)\,dy\,dx\right| \\ &\leqslant C\|\psi\|_{L^1}\|b_1\|_\infty\|\varphi\|_{L^1}\frac{(\Delta\psi)^\delta}{|\Delta\varphi\psi|^{\delta+d}} \\ &\leqslant C\frac{(\Delta\psi)^\delta(\Delta\varphi)^{d+\eta}}{(\Delta\varphi\psi)^{d+\delta}}\|\psi\|_1\|\varphi\|_\eta, \end{aligned}$$

ce qui est mieux que (1.14) car $\delta > \eta$.

Nous supposons maintenant que $\Delta\varphi\psi \leqslant 3\Delta\varphi$. En utilisant à nouveau l'invariance par translation et dilation de (1.14), nous pouvons supposer que $\Delta\varphi\psi = 1$ et $\operatorname{supp}\varphi \cup \operatorname{supp}\psi \subset Q_0$, où Q_0 est le cube unité. On veut montrer que

$$|\langle \psi, Tb_1\varphi\rangle| \leqslant V(\Delta\psi)^\eta \|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta.$$

Soit $\theta \in C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ une fonction égale à 1 sur $2Q_0$, de sorte que $\langle \psi, Tb_1\varphi\rangle = \langle \psi, Tb_1\varphi\theta\rangle$. Nous décomposons $\langle \psi, Tb_1\varphi\theta\rangle$ en $\langle \psi, Tb_1(\varphi - \varphi(x_0))\theta\rangle + \langle \psi, Tb_1\varphi(x_0)\theta\rangle$, où $x_0 \in \operatorname{supp}\psi$. Le deuxième terme est égal, en vertu de $Tb_1 = 0$, à $\varphi(x_0)\langle w, Tb_1(\theta - 1)\rangle$. Comme $\int \psi(x)\,dx = 0$ et $\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp}(\theta - 1) = \emptyset$, nous obtenons

$$\begin{aligned}|\langle \psi, Tb_1\varphi(x_0)\theta\rangle| &= |\varphi(x_0)|\left|\iint \psi(x)(K(x,y) - K(x_0,y))(\theta(y) - 1)\,dx\,dy\right|\\ &\leqslant C\|\varphi\|_\infty\|\psi\|_{L^1}\int_{|y|>1/2}\frac{(\Delta\psi)^\delta}{|y|^{d+\delta}}dy\\ &\leqslant C(\Delta\psi)^\delta\|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta.\end{aligned}$$

Nous décomposons maintenant le premier terme en

$$\langle \psi, Tb_1(\varphi - \varphi(x_0))\tilde\theta\rangle + \langle \psi, Tb_1(\varphi - \varphi(x_0))(\theta - \tilde\theta)\rangle,$$

où $\tilde\theta$ est une fonction de $C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ telle que $\tilde\theta(u) = 1$ lorsque la distance de u à $\operatorname{supp}\psi$ est inférieure à $\Delta\psi$, telle que le diamètre de $\operatorname{supp}\tilde\theta$ soit inférieur à $4\Delta\psi$, et que $\|\tilde\theta\|_\eta \leqslant C(\Delta\psi)^{-\eta}$. Le teme $\langle \psi, Tb_1(\varphi - \varphi(x_0))(\theta - \tilde\theta)\rangle$ est alors estimé en utilisant $\int \psi(x)\,dx = 0$ et $\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp}(\theta - \tilde\theta) = \phi$, exactement comme on a estimé $\langle \psi, Tb_1\varphi(x_0)\theta\rangle$, ce qui fournit le majorant

$$C\|\psi\|_1\int_{|y-x_0|\geq\Delta\psi}\frac{(\Delta\psi)_\delta}{|x - x_0|^{d+\delta}}|y - x_0|^\eta\|\varphi\|_\eta\,dy,$$

ou encore $C(\Delta\psi)^\eta\|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta$, car $\delta > \eta$.

Il reste à etimer $\langle \psi, Tb_1(\varphi - \varphi(x_0))\tilde\theta\rangle$.

Nous pouvons remplacer θ par $\tilde\theta^2$, qui vérifie les mêmes conditions. De plus, grâce au Lemme 1.1, nous pouvons remplacer $\langle \psi, Tb_1(\varphi - \varphi(x_0))\tilde\theta^2\rangle$ par $\langle \psi(\varphi - \varphi(x_0))\theta, Tb_1\tilde\theta\rangle$ modulo un terme d'erreur dominé par

$$\|(\varphi - \varphi(x_0))\tilde\theta\|_\eta\iint|\psi(x)|\frac{1}{|x - y|^{d+\eta}}|\tilde\theta(y)|\,|b_1(y)|\,dx\,dy,$$

donc par $\|(\varphi - \varphi(x_0))\tilde\theta\|_\eta\|\psi\|_{L^1}(\Delta\psi)$, soit encore, puisque

$$\|(\varphi - \varphi(x_0))\tilde\theta\|_\eta \leqslant \|\varphi\|_\eta\|\tilde\theta\|_\infty + \|(\varphi - \varphi(x_0))\chi_{\operatorname{supp}\tilde\theta}\|_\infty\|\tilde\theta\|_\eta \leqslant C\|\varphi\|_\eta,$$

par $C\|\varphi\|_\eta\|\psi\|_{L^1}(\Delta\psi)^\eta$.

Pour estimer $\langle \psi(\varphi - \varphi(x_0))\tilde{\theta}, Tb_1\tilde{\theta}\rangle$, nous choisissons une fonction h, avec un support de la même taille que celui de ψ, telle que $\int h(x)\,dx = \int \psi(x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))\tilde{\theta}(x)\,dx$ et telle que $\|h/b_2\|_\eta \leqslant C(\Delta\psi)^{-d}\|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta$. If suffit maintenant d'estimer séparément $\langle h, Tb_1\tilde{\theta}\rangle$ et $\langle \psi(\varphi - \varphi(x_0))\tilde{\theta} - h, Tb_1\tilde{\theta}\rangle$. Pour le premier terme on obtient, en appliquant (1.8) à $M_{b_2}TM_{b_1}$ sur un cube de diamètre $\leqslant C\Delta\psi$, une majoration par

$$C(\Delta\psi)^{d+2\eta}\left\|\frac{h}{b_2}\right\|_\eta \|\theta\|_\eta \leqslant C(\Delta\psi)^\eta \|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta.$$

Pour le deuxième terme on utilise $\int \{\psi(\varphi - \varphi(x_0))\tilde{\theta} - h\}\,dx = 0$ et $Tb_1 = 0$, et on obtient

$$\begin{aligned}|\langle \psi(\varphi - \varphi(x_0))\tilde{\theta} - h, Tb_1\tilde{\theta}\rangle| &= |\langle \psi(\varphi - \varphi(x_0))\tilde{\theta} - h, Tb_1(\tilde{\theta} - 1)\rangle| = \\ &= \left|\iint [\psi(x)(\varphi(x) - \varphi(x_0))\tilde{\theta}(x) - h(x)][K(x,y) - K(x_0,y)]b_1(y) - 1)\,dx\,dy\right| \leqslant \\ &\leqslant C(\Delta\psi)^\eta \|\psi\|_{L^1}\|\varphi\|_\eta.\end{aligned}$$

Le Lemme 1.3 est donc complètement démontré. Il montre en particulier que si T vérifie les hypothèses du Lemme 1.3 et si $\varphi \in C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$, alors $Tb_1\varphi$ définit pour chaque cube Q une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions $\psi \in L^1(Q)$ d'intégrale nulle. Autrement dit, $Tb_1\varphi$ est, localement, une fonction bornée définie à une constante additive près. Si $x \neq y$, on peut choisir un cube Q de diamètre $\leqslant C|x-y|$, et (1.14) entraîne que $|\langle \psi, Tb_1\varphi\rangle| \leqslant C|x-y|^\eta\|\varphi\|_\eta\|\psi\|_{L^1}$ pour toute ψ d'intégrale nulle supportée dans Q. Autrement dit,

$$|Tb_1\varphi(x) - Tb_1\varphi(y)| \leqslant C\|\varphi\|_\eta|x-y|^\eta.$$

Nous noterons, pour $0 < \eta < 1$, $\lambda^\eta(\mathbb{R}^d)$ le complété de $C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|\ \|_\eta$.

Nous venons de voir que, si $\varphi \in C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$, $\|Tb_1\varphi\|_\eta \leqslant C\|\varphi\|_\eta$; de plus $Tb_1\varphi(x)$ peut être défini à l'aide du noyau pour x assez grand, et

$$\lim_{|x|+|y|\to+\infty} \frac{|Tb_1\varphi(x) - Tb_1\varphi(y)|}{|x-y|^\eta} = 0,$$

de sorte que $Tb_1\varphi \in \lambda^\eta(\mathbb{R}^d)$. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 1. [L2]: *Soient* $0 < \eta < \delta \leqslant 1$, *et soit* $T: b_1C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to \{b_2C_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}'$ *un* SIO *tel que* $M_{b_2}TM_{b_1}$ *soit faiblement borné, et associé à un noyau* δ-*standard. Si* $Tb_1 = 0$, *alors* TM_{b_1} *admet une extension continue sur* $\lambda^\eta(\mathbb{R}^d)$.

2. Opérateurs de Calderón-Zygmund et critères de continuité-L^2

Un opérateur de Calderón-Zygmund est un opérateur d'intégrale singulière qui s'étend en un opérateur borné sur L^2. Les méthodes de variable réelle permettent alors de montrer qu'un tel opérateur est continu sur L^p pour tout $p \in]1, +\infty[$. De plus, on peut définir son action sur L^∞ para le procédé décrit au paragraphe 1 pour définir l'action des SIO sur $b_1 C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous le ferons en détail lors de la démonstrtion du Lemme 2.7.

Un problème important est donc de trouver des critères généraux de continuité-L^2 pour les opérateurs d'intégrale singulière. Lorsque ceux-ci sont des opérateurs de convolution, la transformation de Fourier permet de donner une condition nécessaire et suffisante très simple portant sur le noyau. Le primerier critère s'appliquant à des opérateurs qui ne soient pas de convolution fut le suivant [DJ].

Rappelons que si $T: b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ est un SIO, alors ${}^tT$ défini par $\langle g, {}^tTf \rangle = \langle f, Tg \rangle$ est également un SIO, défini de $b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)$ dans $[b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$.

Théorème 1. *Un* SIO $T: C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ *est un opérateur de Calderón-Zygmund si et seulement si* T *est faiblement borné,* $T1$ *et* ${}^tT1$ *sont dans* BMO.

Ce théorème a été étendu par R. Coifman dans le cadre des espaces de nature homogène dans un travail non publié. Sans entrer dans le détail signalons le cas particulier suivant.

Si $b: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est bornée ainsi que son inverse, alors $(\mathbb{R}^d, b\,dx)$ muni de la distance euclidienne ordinaire est un espace de nature homogène; de plus les noyaux d'opérateurs d'intégrale singulière sur cet espace sont exactement les mêmes que sur $(\mathbb{R}^d, dx)$. Enfin, le Théorème-$T1$ sur $(\mathbb{R}^d, b\,dx)$ équivaut à l'énoncé suivant:

Théorème 2. *Soit* $b: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ *une fonction bornée ainsi que son inverse. Un* SIO $T: bC_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [bC_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ *est un opérateur de Calderón-Zygmund si et seulement si* $M_b T M_b$ *est faiblement borné,* Tb *et* ${}^tTb$ *sont dans* BMO.

Cet énoncé est à rapprocher du suivant, qui est une reformulation d'un théorème récent de McIntosh et Meyer [MM]. Une fonction b bornée à valeurs complexes est accrétive s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\operatorname{Re} b \geqslant \epsilon$ p.p.

Théorème 3. *Soit* $b: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *une fonction bornée accrétive. Un SIO* $T = bC_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [bC_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ *est un opérateur de Calderón-Zygmund si* $M_b T M_b$ *est faiblement borné,* Tb *et* ${}^tTb$ *sont nuls.*

Si cette dernière hypothèse était remplacée par «Tb et ${}^tTb$ sont dans BMO», alors le Théorème 3 pourrait se dire: «Soit b une fonction accrétive. Le Théorème-$T1$ est vrai sur $(\mathbb{R}^d, b\,dx)$».

Cet ensemble de théorèmes suggère la question suivante. Pour quelles fonctions b bornées ainsi que leur inverse le Théorème-$T1$ est-il vrai sur $(\mathbb{R}^d, b\,dx)$? En particulier, le théorème de McIntosh et Meyer indique que ces fonctions n'ont pas besoin d'être à valeurs réelles.

La réponse à cette question sera l'objet de notre résultat principal, énoncé au paragraphe 5. Pour l'instant nous allons analyser les démonstrations du Théorème-$T1$ et du Théorème 2 en soulignant les arguments et idées qui nous seront utiles dans la suite.

La première étape dans la démonstration du Théorème-$T1$ est la réduction au cas où $T1 = {}^tT1 = 0$. Pour ce faire, il suffit pour toute fonction $\beta \in$ $\in$ BMO de construire un opérateur de Calderón-Zygmund U_β tel que $U_\beta 1 = \beta$ et ${}^tU_\beta 1 = 0$. En effet, soit T vérifiant les hypothèses du théorème, $\beta = T1$ et $\gamma = {}^tT1$ el soit $\tilde{T} = T - U_\beta - {}^tU_\gamma$. Alors $\tilde{T}1 = {}^t\tilde{T}1 = 0$ et $\tilde{T}$ est faiblement borné. De plus T est un opérateur de Calderón-Zygmund si et seulement si $\tilde{T}$ l'est.

La construction des opérateurs U_β est donnée dans [ ]. Elle repose sur l'existence d'une fonction $\psi \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^d)]$ radiale, telle que

$$\int \psi\, d\xi = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |\psi(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d \bigcup \{0\}$. On en déduit que, si Q_t est l'opérateur de convolution de symbole $\psi(t\theta)$, alors $I = \int_0^{+\infty} Q_t^2 \frac{dt}{t}$, l'intégrale convergeant au sens de la topologie forte des opérateurs sur L^2, et faiblement sur BMO. La continuité-L^2 de $\tilde{T}$, originalement traitée par le lemme de Cotlar-Knapp-Stein [KS] que nous rappellerons, peut également être traitée en utilisant cette même décomposition de l'identité [M]. Toutefois une telle décomposition fait défaut dans les espaces de nature homogène abstraits. On est alors amené à utiliser un lemme d'approximation dû à Coifman, reposant sur le lemme de Cotlar-Knapp-Stein que nous rappelons:

Lemme C.K.S. [KS]. *Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. On suppose que pour tous j, $k \in \mathbb{Z}$,*

(2.1) $$\|T_j T_k^*\| \leqslant \omega(j-k),$$

et

(2.2) $$\|T_j^* T_k\| \leqslant \omega(j-k),$$

où $j \to \omega(j)$ est une suite telle que $\sum_j \omega(j)^{1/2} < +\infty$. Alors, pour tout sous-ensemble fini I de $\mathbb{Z}$,

$$\left\| \sum_{i \in I} T_i \right\| \leqslant \sum_{j \in \mathbb{Z}} \omega(j)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Rappelons qu'une série $\sum_j u_j$ à valeurs dans un espace de Hilbert est sommable si et seulement si ses sommes finies sont uniformément bornées. En particulier, pour tout $x \in H$, la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j x$ est sommable, ou, en d'autres termes, la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} T_j$ est fortement sommable et sa somme T vérifie $\|T\| \leqslant$ $\leqslant \sum_j \omega(j)^{1/2}$.

En situation concrète, les hypothèses de presque-orthogonalité (2.1) et (2.2) sont souvent une conséquence du lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soient U et V deus opérateurs donnés par des noyaux $u(x, y)$* et *$v(x, y)$ vérifiant, pour des constantes $C > 0$, $\alpha > 0$, $A > 0$, $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $k < j$,*

$$u(x, y) = 0 \quad \textit{pour} \quad |x - y| \geqslant C2^{-j}, \tag{2.4}$$

$$\int |u(x, y)|\, dy \leqslant A \quad \textit{pour tout} \quad x, \tag{2.5}$$

$$\int u(x, y)\, dy = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x, \tag{2.6}$$

$$v(x, y) = 0 \quad \textit{pour} \quad |x - y| \geqslant C2^{-k}, \tag{2.7}$$

$$|v(x', y) - v(x, y)| \leqslant C|x' - x|^{\alpha} 2^{k(d + \alpha)}. \tag{2.8}$$

Alors

$$\|UV\|_{p,p} \leqslant CA2^{(k-j)\alpha} \quad \textit{pour tout} \quad p \in [1, +\infty].$$

Pour démontrer le Lemme 5 il suffit de vérifier que le noyau $K(x, z) =$ $= \int u(x, y) v(y, z)\, dy$ de UV, qui est nul pour $|x - z| \geqslant C2^{-k}$ d'après (2.4) et (2.7), satisfait à $|K(x, z)| \leqslant CA2^{(k-j)\alpha}2^{kd}$. Ainsi on aura, pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $|UVf(x)| \leqslant CA2^{(k-j)\alpha}2^{kd} \int_{|x-y| < C2^{-k}} |f(y)|\, dy$, ce qui entraînera la conclusion désirée.

Or, d'après (2.6) et (2.8),

$$\begin{aligned} |K(x, z)| &= \left| \int u(x, y) v(y, z)\, dy \right| = \\ &= \left| \int u(x, y)(v(y, z) - v(x, z))\, dy \right| \leqslant \\ &\leqslant \int |u(x, y)|\, |y - x|^{\alpha} 2^{k(d+\alpha)}\, dy, \end{aligned}$$

ce qui d'après (2.4) et (2.5) vaut moins que $CA2^{kd}2^{(k-j)\alpha}$.

Le Lemme 2.1 est démontré.

Nous revenons au lemme d'approximation de Coifman, que nous énonçons dans le cas de l'espace de type homogène $(\mathbb{R}^d, b(x)\,dx)$, muni de la distance euclidienne classique.

Lemme 2.2. *Soit b une fonction positive bornée ainsi que son inverse. Il existe une suite* $(S_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *d'opérateurs donnés par des noyaux* s_k *définis sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *et vérifiant, pour un* $C > 0$ *et un* $\alpha > 0$,

$$|s_k(x,y)| \leqslant C2^{kd} \quad \textit{pour tous} \quad x, y \in \mathbb{R}^d \tag{2.9}$$

$$s_k(x,y) = 0 \quad \textit{pour} \quad |x-y| \geqslant C2^{-k} \tag{2.10}$$

$$s_k(x,y) = s_k(y,x) \quad \textit{pour tous} \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \tag{2.11}$$

$$|s_k(x',y) - s_k(x,y)| \leqslant C|x'-x|^{\alpha}2^{k(d+\alpha)} \quad \textit{pour tous} \quad x, x', y \in \mathbb{R}^d, \tag{2.12}$$

$$\int s_k(x,y)b(y)\,dy = 1 \quad \textit{pour tout} \quad x. \tag{2.13}$$

Alors, si $\Delta_k = S_k - S_{k-1}$ *et, pour tout* N, $\Delta_k^N = \sum_{|j-k|\leq N}\Delta_j$, *la série* $V_N = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Delta_k M_b \Delta_k^N$ *est fortement convergente dans* L^2 *et définit un opérateur de Calderón-Sygmund dont le noyau est* δ*-standard pour tout* $\delta < \alpha$. *Enfin,* $\lim_{N\to\infty} V_N = M_b^{-1}$ *en norme* $CZ\delta$.

Rappelons que la norme $CZ\delta$ est définie sur les opérateurs de Calderón-Zygmund T don le noyau K est δ-standard par $\|T\|_{CZ\delta} = \|T\|_{2,2} + |K|_\delta$.

Commençons par vérifier l'existence d'une telle suite S_k. Soit M_k l'opérateur défini par $M_k f(x) = c2^{kd}\int_{|x-y|<2^{-k}} f(x)\,dx$ pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, et où c est choisi pour que $M_k 1 = 1$. Remarquons que $M_k b$ est lipschitzienne et a une dérivée majorée par $C2^k$, et que $\inf b \leqslant M_k b(x) \leqslant \sup b$ pour tout x. On choisit $S_k = M_k\{M_k b\}^{-1}M_k$, où $\{M_k b\}^{-1}$ est l'opérateur de multiplication poctuelle par $[M_k b(x)]^{-1}$. La propriété (2.12) est satisfaite parce que $M_k b$ est lipschitzienne, et les propriétés (2.9), (2.10), (2.11) et (2.13) évidentes.

Pour prouver que la série définissant V_N converge, nous allons vérifier que les opérateurs $(M_b^{1/2}\Delta_j M_b^{1/2})_{j\in\mathbb{Z}}$ satisfont aux hypothèses du Lemme C.K.S. Nous noterons $t_j(x,y)$ le noyau de Δ_j. Comme b est réelle, $(M_b^{1/2}\Delta_j M_b^{1/2})^* = M_b^{1/2}\Delta_j^* M_b^{1/2}$ a les mêmes propriétés que $M_b{}^{1/2}\Delta_j M_b{}^{1/2}$, il suffit en fait de montrer (2.1), et l'on peut même supposer $j \geqslant k$. Le noyau de $\Delta_j M_b \Delta_k^*$ étant $\int t_j(x,y)b(y)\bar{t}_k(z,y)\,dy$, sa norme sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est estimée en appliquant le Lemme 2.1 avec $u(x,y) = t_j(x,y)b(y)$ et $v(x,y) = \overline{t_k(y,x)}$. L'hypothèse (2.6) découle de (2.13), et les autres hypothèses du Lemme 2.1 sont trivialement vérifiées. On obtient donc $\|\Delta_j M_b \Delta_k^*\|_{2,2} \leqslant C2^{(k-j)\alpha}$.

Soit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $W_n = \sum_k \Delta_k M_b \Delta_{k-n}$, de sorte que $V_N = \sum_{|n|\leq N} W_n$. En vertu du calcul précédent, les opérateurs $M_b^{1/2}\Delta_k M_b \Delta_{k+n} M_b^{1/2}$ vérifient (2.1) et (2.2) avec la suite ω_n définie par $\omega_n(j) = C\min(2^{-2|n|\alpha}, 2^{-|k-j|\alpha})$. Par conséquent, la série $\sum_k \Delta_k M_b \Delta_{k+n}$ est fortement convergente, toutes ses sommes partielles ont une norme inférieure à $C|n|2^{-|n|\alpha}$, et en particulier $\|W_n\| \leqslant C|n|2^{-|n|}$. La série définissant V_N est donc également fortement sommable, et de plus la suite V_N converge en norme d'opérateur quand $N \to +\infty$.

Pour identifier $\lim_{N\to\infty} V_N$, montrons d'abord que pour tout $f \in L^2$, la série $\sum\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \Delta_k M_b \Delta_j f$ est sommable. Or une série à valeurs dans un espace de Hilbert est sommable si et seulement si ses sommes finies sont uniformément bornées. Soient $f \in L^2$ et I un ensemble fini de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; alors

$$\Big\| \sum\sum_{(k,j)\in I} \Delta_k M_b \Delta_j f \Big\| \leqslant \sum_n \Big\| \sum_{(k,j)\in I \text{ et } j-k=n} \Delta_k M_b \Delta_j \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_n |n| 2^{-|n|\alpha} \leqslant C.$$

Donc $\sum\sum_{k,j\in\mathbb{Z}} \Delta_k M_b \Delta_j f$ peut être calculé en regroupant des termes, et $\sum\sum_{k,j} \Delta_k M_b \Delta_j = \sum_k \left(\sum_j \Delta_k M_b \Delta_j\right)$.

Or $\lim_{j\to+\infty} S_j = \lim_{j\to+\infty} M_j\{M_j b\}^{-1} M_j = M_b^{-1}$ et $\lim_{j\to-\infty} S_j = 0$ pour la topologie forte des opérateurs (il suffit de vérifier que $\lim_{j\to+\infty} S_j bf = f$ et $\lim_{j\to-\infty} S_j bf = 0$ pour $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ce qui est une conséquence de (2.9), (2.10) et (2.13)) on en déduit que

$$\sum_j \Delta_k M_b \Delta_j = \Delta_k M_b M_b^{-1} = \Delta_k \quad \text{et} \quad \sum\sum_{k,j} \Delta_k M_b \Delta_j = \sum_k \Delta_k = M_b^{-1},$$

de sorte que $\lim_{N\to\infty} V_N = M_b^{-1}$.

Nous montrons maintenant que le noyau K_n de W_n vérifie, pour tout $\delta < \alpha$,

$$(2.14) \qquad |K_n|_\delta \leqslant C 2^{|n|(\delta-\alpha)}.$$

Cela entraînera que $\lim_{N\to\infty} V_N$ existe en norme $CZ\delta$ et cette limite sera nécessairement M_b^{-1}. Le Lemme 2.2 sera alors complètement démontré.

Nous pouvons supposer que n est positif. Notons que le noyau $K_{n,k}$ de $\Delta_k M_b \Delta_{k-n}$ vérifie, d'après la démonstration du Lemme 2.1,

$$(2.15) \qquad |K_{n,k}(x,z)| \leqslant C 2^{-n\alpha} 2^{(k-n)d}$$

et

$$K_{n,k}(x,z) = 0 \quad \text{si} \quad |x-z| \leqslant C 2^{-(k-n)}.$$

On en déduit que

$$(2.16) \qquad |K_n(x,z)| \leqslant \sum_k |K_{n,k}(x,z)| \leqslant C 2^{-n\alpha} \frac{1}{|x-z|^d}.$$

Nous allons maintenant vérifier que si $|x' - x| \leqslant \frac{1}{2}|x - z|$,

$$|K_{n,k}(x', z) - K_{n,k}(x, z)| \leqslant C|x' - x|^{\alpha} 2^{(k-n)(d+\alpha)} \tag{2.17}$$

et

$$|K_{n,k}(z, x') - K_{n,k}(z, x)| \leqslant C|x' - x|^{\alpha} 2^{(k-n)(d+\alpha)}, \tag{2.18}$$

en commençant par (2.17).

Lorsque $|x' - x| \geqslant 2^k$, (2.17) est une conséquence de (2.15). Lorsque $|x' - x| \leqslant 2^k$, on utilise le fait que, d'après (2.12), $\int |t_k(x', y) - t_k(x, y)|\, dy \leqslant$ $\leqslant C|x' - x|^{\alpha} 2^{k(d+\alpha)}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} |K_{n,k}(x', z) - K_{n,k}(x, z)| &= \left| \int (t_k(x', y) - t_k(x, y)) b(y) t_{k-n}(y, z)\, dy \right| = \\ &= \left| \int (t_k(x', y) - t_k(x, y)) b(y) (t_{k-n}(y, z) - \right. \\ &\qquad \left. - t_{k-n}(x, z))\, dy \right| \leqslant \\ &\leqslant C|x' - x|^{\alpha} 2^{k(d+\alpha)} 2^{-k\alpha} 2^{(k-n)(d+\alpha)} 2^{-kd} = \\ &= C|x' - x|^{\alpha} 2^{(k-n)(d+\alpha)}. \end{aligned}$$

Pour montrer (2.18), on remarque à nouveau que si $|x' - x| \geqslant 2^k$, (2.18) découle de (2.15). Lorsque $|x' - x| \leqslant 2^k$, on a

$$\begin{aligned} |K_{n,k}(z, x') - K_{n,k}(z, x)| &= \left| \int t_k(z, y) b(y) (t_{k-n}(y, x') - t_{k-n}(y, x))\, dy \right| \leqslant \\ &\leqslant C|x' - x|^{\alpha} 2^{(k-n)(d+\alpha)}. \end{aligned}$$

On déduit des inégalités (2.17) et (2.18) que, pour $|x' - x| < |x - z|/2$,

$$|K_n(x', x) - K_n(x, z)| \leqslant \frac{C|x' - x|^{\alpha}}{|x - z|^{d+\alpha}} \tag{2.19}$$

et

$$|K_n(z, x') - K_n(z, x)| \leqslant \frac{C|x' - x|^{\alpha}}{|x - z|^{d+\alpha}}. \tag{2.10}$$

On déduit (2.14) de (2.16), (2.19) et (2.20). Le Lemme 2.2 est démontré.

Revenons aux problèmes que nous avons énoncés dans le cas $b = 1$: étant donnée une fonction b réelle positive bornée ainsi que son inverse, nous voulons montrer que si $\tilde{T}: bC_0^{\eta}(\mathbb{R}^d) \to \{bC_0^{\eta}(\mathbb{R}^d)\}'$ est un SIO tel que $M_b T M_b$ soit faiblement borné et tel que $Tb = {}^tTb = 0$, alors T est borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous voulons également, pour toute fonction $\beta \in \mathrm{BMO}$, construire un opérateur de Calderón-Zygmund $U_{\beta,b}$ tel que $U_{\beta,b}b = \beta$ et ${}^tU_{\beta,b}b = 0$.

Le premier problème sera résolu au moyen des lemmes suivants, où les notations sont celles du Lemme 2.2.

Lemme 2.3. *Pour tout k, l'opérateur Δ_k est continu de $bC_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$ dans $C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$.*

Ce lemme est trivial. Il permet, pour tout opérateur T satisfaisant aux hypothèses précédentes et tout couple $(j_1, j_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, de définir un opérateur $\tilde{T}_{j_1,j_2}$: $bC_0^\alpha(\mathbb{R}^d) \to \{bC_0^\alpha(\mathbb{R}^d)\}'$ par la formule $\langle g, \tilde{T}_{j_1,j_2}f\rangle = \langle M_b\Delta_{j_2}g, \tilde{T}(M_b\Delta_{j_1}f)\rangle$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 2.4. *L'opérateur $\tilde{T}_{j_1,j_2}$ est continu sur L^2 et vérifie $\|\tilde{T}_{j_1,j_2}\|_{2,2} \leqslant$ $\leqslant C_\nu 3^{-\nu|j_1-j_2|}$ pour tout $\nu < \min(\alpha, \delta)$.*

Par un argument déjà employé dans la démonstration du Lemme 1.1, T_{j_1,j_2} est donné par intégration contre le noyau $K_{j_1,j_2}(x,y) = \langle bt_{j_1}^x, T(bt_{j_2}^y)\rangle$, où l'on a noté $t_j^x(z) = t_j(x,z) = s_j(x,z) - s_{j-1}(x,z)$. En raison de la symétrie des hypothèses, nous pouvons supposer $j_1 \geqslant j_2$. Une application du Lemme 1.3 avec $\eta = \nu$, $\psi = bt_{j_1}^x$, et $\varphi = t_{j_2}^y$ donne

$$|K_{j_1,j_2}(x,y)| \leqslant C\frac{2^{-j_1\nu}2^{-j_2(d+\nu)}}{|x-y|^{d+\nu} + 2^{-j_2(d+\nu)}}2^{j_2(d+\nu)}$$
$$= C\frac{2^{-j_1\nu}}{|x-y|^{d+\nu}2^{-j_2(d+\nu)}}.$$

Il s'ensuit que $\tilde{T}_{j_1,j_2}$ est borné sur L^∞, L^1, et donc L^2 avec une norme majorée par $C2^{-|j_1-j_2|\nu}$. Le Lemme 2.4 est démontré.

Fixons un entier N tel que $\|V_NM_b - I\|_{2,2} \leqslant \frac{1}{2}$, ce qui est possible d'après le Lemme 2.2. Si J_1 et J_2 sont deux sous-ensembles finis de $\mathbb{Z}$, nous définissons un opérateur $\tilde{T}_{N,J_1,J_2}$: $bC_0^\alpha(\mathbb{R}^d) \to \{bC_0^\alpha(\mathbb{R}^d)\}'$ par

$$\langle g, \tilde{T}_{N,J_1,J_2}f\rangle = \sum_{j_1\in J_1}\sum_{j_2\in J_2}\langle M_b\Delta_{j_2}M_b\Delta_{j_2}^Ng, \tilde{T}M_b\Delta_{j_1}M_b\Delta_{j_1}^Nf\rangle.$$

Lemme 2.5. *L'opérateur $\tilde{T}_{N,J_1,J_2}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, et $\|\tilde{T}_{N,J_1,J_2}\|_{2,2} \leqslant$ $\leqslant CN^2$, oú la constante C ne dépend ni de J_1, ni de J_2.*

Notons que la continuité sur L^2 de l'opérateur $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Delta_j^*M_b\Delta_j$, qui se démontre comme celle de W_0, entraîne l'estimation quadratique suivante: pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\Delta_jf\|_2^2 \leqslant C\|f\|_2^2$. Il en résulte que $\sum_{j\in\mathbb{Z}}\|\Delta_j^Nf\|_2^2 \leqslant$ $\leqslant CN^2\|f\|_2^2$. On en déduit que, pour $f, g \in bC_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle g, \tilde{T}_{N,J_1,J_2} f\rangle = \left| \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{j_2 \in J_2} \langle M_b \Delta_{j_2}^N g, \tilde{T}_{j_1,j_2}(M_b \Delta_{j_1}^N f)\rangle \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j_1} \sum_{j_2} \|\Delta_{j_2}^N g\|_2 \|\tilde{T}_{j_1,j_2}\|_{2,2} \|\Delta_{j_1}^N f\|_2,$$

ce qui, d'après le Lemme 2.4, est dominé par

$$\sum_{j_1} \sum_{j_2} \|\Delta_{j_2}^N g\|_2 2^{-\nu|j_1 - j_2|} \|\Delta_{j_1}^N f\|_2 \leqslant CN^2 \|f\|_2 \|g\|_2$$

car la matrice de terme général $2^{-\nu|j_1-j_2|}$ définit un opérateur borné sur l^2. Le Lemme 2.5 est démontré.

Nous voulons en conclure que $\tilde{T}$ a une extension bornée sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous savons déjà que $\tilde{T}M_b$ a une extension continue sur $\lambda^\nu(\mathbb{R}^d)$. Nous allons montrer l'existence de deux espaces $\mathcal{E}$ et $\mathfrak{D}$ possédant les propriétés suivantes:

(2.21) $\mathcal{E}$ est un sous-espace dense de $\lambda^\nu \cap L^2$,
(2.22) $\mathfrak{D} \subset (\lambda^\nu)' \cap L^2$ et $\mathfrak{D}$ est dense dans L^2,
(2.23) pout tout $(f, g) \in \mathcal{E} \times \mathfrak{D}$, $\quad |\langle g, \tilde{T}M_b f\rangle| \leqslant C\|f\|_2 \|g\|_2$.

Ces trois hypothèses entraînent que $\tilde{T}$ a une extension bornée sur L^2. En effet, la restriction de $\tilde{T}M_b$ à $\mathcal{E}$ admet une extension continue sur L^2 (notons-la $T'M_b$). Comme $\mathcal{E}$ est dense dans $\lambda^\nu \cap L^2$, $T'M_b$ coincide avec $\tilde{T}M_b$ sur $\lambda^\nu \cap L^2$, et en particulier sur $C_0^\nu(\mathbb{R}^d)$. Donc T' est une extension bornée de $\tilde{T}$.

Prenons $\mathcal{E} = V_N M_b C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$ et $\mathfrak{D} = M_b V_N L_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$, où $L_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$ est le sous-espace de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ constitué des fonctions à support compact et d'intégrale nulle, et où N est assez grand pour que $V_N M_b$ soit un isomorphisme de L^2 et de λ^ν (c'est possible d'après le Lemme 2.2 et le Théorème 1). On en déduit (2.21) car $C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace dense de $\lambda^\nu \cap L^2$, et (2.22) car $L_{00}^\infty \subset (\lambda^\nu)' \cap L^2$ et L_{00}^∞ est dense dans L^2. La démonstration de (2.23) utilisera le lemme suivant.

Lemme 2.6. *Si $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$, la série $\sum_j \Delta_j M_b f$ converge normalement dans λ^ν. Si $g \in L_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$, la série $\sum M_b \Delta_j g$ converge normalement dans $(\lambda^\nu)'$.*

Pour démontrer la première assertion, remarquons que pour $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$ et $j \in \mathbb{Z}$, $\|\Delta_j M_b f\|_\alpha \leqslant C_f 2^{j(d+\alpha)}$ d'après (2.12), et $\Delta_j M_b f$ est à support compact. Donc

$$\|\Delta_j M_b f\|_\nu \leqslant C_f \|\Delta_j M_b f\|_\alpha \leqslant C_f 2^{j(d+\alpha)},$$

ce qui prouve que la série $\sum_{j=-\infty}^0 \Delta_j M_b f$ converge normalement. Pour estimer $\|\Delta_j M_b f\|_\nu$ lorsque $j \geqslant 0$, on utilise la régularité de f et $\Delta_j b = 0$. On a

$$\begin{aligned}\|\Delta_j M_b f\|_\infty &= \sup_x \Big| \int t_j(x,y) f(y) b(y)\, dy \Big| = \\ &= \sup_x \Big| \int t_j(x,y)(f(y) - f(x)) b(y)\, dy \Big| \leqslant \\ &\leqslant C_f 2^{-\alpha j}.\end{aligned}$$

Si $|x' - x| \geqslant 2^{-j}$,

$$\frac{|\Delta_j M_b f(x') - \Delta_j M_b f(x)|}{|x' - x|^\nu} \leqslant C 2^{(\nu - \alpha) j}.$$

Il reste donc à estimer $|\Delta_j M_b f(x') - \Delta_j M_b f(x)|/|x' - x|^\nu$ lorsque $|x' - x| \leqslant \leqslant 2^{-j}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}|\Delta_j M_b f(x') - \Delta_j M_b f(x)| &\leqslant \int |t_j(x',y) - t_j(x,y)|\, |b(y)|\, |f(y) - f(x)|\, dy \leqslant \\ &\leqslant C|x' - x|^\alpha \int_{|x-y| \leq C2^{-j}} 2^{j(d+\alpha)} |y - x|^\alpha\, dy \leqslant \\ &\leqslant C|x' - x|^\alpha \leqslant C 2^{(\nu - \alpha) j} |x' - x|^\nu.\end{aligned}$$

Par conséquent, si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\sum_j \|\Delta_j M_b f\|_\nu < +\infty$.

Soit maintenant $g \in L_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$, et soit $h \in C_0^\nu(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|h\|_\nu \leqslant 1$.

Si $j \geqslant 0$,

$$|\langle M_b \Delta_j g, h\rangle| \leqslant C_g \|\Delta_j M_b h\|_\infty \leqslant C_g \sup_{|x'-x| \leq C2^{-j}} |h(x') - h(x)| \leqslant C_g 2^{-j\nu}.$$

Si $j \leqslant 0$ et $x_0 \in \operatorname{supp} g$,

$$\begin{aligned}|\langle M_b \Delta_j g, h\rangle| &= \Big| \iint g(x)(t_j(x,y) - t_j(x_0,y)) b(y) h(y)\, dy\, dx \Big| = \\ &= \Big| \iint g(x)(t_j(x,y) - t_j(x_0,y)) b(y)(h(y) - h(x_0))\, dy\, dx \Big| \leqslant \\ &\leqslant C\|g\|_\infty \iint_{\substack{|y - x_0| \leq C2^{-j} + C_g \\ |x - x_0| \leq C_g}} |x - x_0|^\alpha 2^{j(d+\alpha)} |y - x_0|^\nu\, dy\, dx \leqslant \\ &\leqslant C_g 2^{j(\alpha - \nu)}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_j \|M_b \Delta_j g\|_{(\Lambda^\nu)'} < +\infty$, et le Lemme 2.6 est démontré.

Comme pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\Delta_j M_b$ est continu sur Λ^ν (c'est un cas particulier trivial du Théorème 1), on déduit du Lemme 2.6 que pour $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$, la série $\sum_j \Delta_j M_b \Delta_j^N M_b f$ converge normalement dans Λ^ν; de même, si $g \in L_{00}^\infty(\mathbb{R}^d)$, la série $\sum_j M_b \Delta_j M_b \Delta_j^N g$ converge normalement dans $(\Lambda^\nu)'$. De plus, les sommes valent $V_N M_b f$ et $M_b V_N g$ respectivement, car les séries convergent aussi dans L^2. On en déduit que la série double $\sum_{j_1} \sum_{j_2} < M_b \Delta_{j_2} M_b \Delta_{j_2}^N g, \tilde{T} M_b \Delta_{j_1} M_b \Delta_{j_1}^N M_b f \rangle$ converge absolument et vaut $\langle M_b V_N g, \tilde{T} M_b V_N M_b f\rangle$.

Le Lemme 2.5 entraîne alors que

$$|\langle M_b V_N g, \tilde{T} M_b V_N M_b f\rangle| \leqslant CN^2 \|f\|_2 \|g\|_2 \leqslant CN^2 \|V_N M_b f\|_2 \|M_b V_N g\|_2,$$

ce qui est précisément (2.23). Nous avons donc montré que $\tilde{T}$ a une extension continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Il nous faut maintenant contruire, pour tout $\beta \in \mathrm{BMO}$ et toute b positive bornée ainsi que son inverse, un operáteur de Calderón-Zygmund $U_{\beta,b}$ tel que $U_{\beta,b} b = \beta$ et ${}^t U_{\beta,b} b = 0$. Pour cela, nous aurons besoin d'un résultat qui quoique classique et facile, ne semble pas être dans la littérature.

Lemme 2.7. *Soit T un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ associé à un noyau K vérifiant, pour un certain $\delta > 0$,*

$$|K(x', y) - K(x, y)| \leqslant C \frac{|x' - x|^\delta}{|x - y|^{d+\delta}} \tag{2.24}$$

pour tous x, x', $y \in \mathbb{R}^d$ tels que $|x - y| > 2|x' - x|$.

Alors T admet une extension continue de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans BMO$(\mathbb{R}^d)$. *Si de plus $T1 = 0$, alors T admet une extension continue de* BMO$(\mathbb{R}^d)$ *dans* BMO$(\mathbb{R}^d)$.

Rappelons la définition de l'extensión d'un tel opérateur à L^∞. Soient $f \in L^\infty$, et Q un cube de $\mathbb{R}^n$. On écrit $f = f_1 + f_2$, où $f_1 = f\chi_{2Q}$, et on définit Tf sur Q, à une constante additive près, par la formule

$$(Tf)_Q(x) = Tf_1(x) + \int (K(x, y) - K(x_0, y)) f_2(y)\, dy,$$

où x_0 est le centre du cube Q. Il est clair que si Q' et une cube contenant Q, et si x_0' est son centre, la restriction de $(Tf)_{Q'}$ à Q est égale à $Tf(Q)$ modulo la constante $\int_{\mathbb{R}^d \setminus 2Q'} (K(x_0', y) - K(x_0, y)) f(y)\, dy - \int_{2Q' \setminus 2Q} K(x_0, y) f(y)\, dy$. Donc cette définition de $(Tf)_Q$ est cohérente, et définit une fonction modulo les constantes sur tout $\mathbb{R}^d$. De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q |(Tf)_Q|\, dx \leqslant \left[\frac{1}{|Q|} \int_Q |Tf_1|^2\, dx \right]^{1/2} &+ \\ + \frac{1}{Q} \iint_{\substack{x \in Q \\ y \in \mathbb{R}^d \setminus 2Q}} &|K(x, y) - K(x_0, y)|\, |f(y)|\, dy\, dx \leqslant \\ \leqslant C \|f\|_\infty, & \end{aligned}$$

d'après la continuité de T sur L^2 et l'hypothèse (2.24). Ceci montre que l'extension construite est continue de L^∞ dans BMO.

Si $T1 = 0$, l'action de T peut être étendue à l'espace des fonctions bornées modulo les constantes, et même à BMO. En effect, $T1 = 0$ permet de choisir un représentat de f tel que $\int f_1(x)\,dx = 0$, et les propriétés des fonctions de BMO entraînent alors [JN], [J2]

$$\left[\frac{1}{|Q|}\int_{2Q}|f(x)|^2\,dx\right]^{1/2} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}} \tag{2.25}$$

et

$$\frac{1}{|Q|}\iint_{\substack{x\in Q\\ y\in\mathbb{R}^d\setminus 2Q}} \frac{|x-x_0|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}}\,|f(y)|\,dy \leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}}. \tag{2.26}$$

On en déduit

$$\frac{1}{|Q|}\int |(Tf)_Q|\,dx \leqslant C\|f\|_{\mathrm{BMO}},$$

à nouveau d'après la continuité de T sur L^2 et (2.24). Le Lemme 2.7 est démontré.

Ce lemme s'applique à l'opérateur $V_N M_b$. En effet, $V_N M_b$ est continu sur L^2, son noyau vérifie (2.24), et (2.13) entraîne que $V_N(b) = V_N M_b 1 = 0$. On déduit du Lemme 2.4 que $\lim_{N\to\infty} V_N M_b = I$ en norme d'opérateur sur BMO. On choisira N de sorte que $V_N M_b$ soit inversible aussi sur BMO, et l'on notera R son inverse sur BMO.

Nous pouvons maintenant donner la forme de l'opérateur $U_{\beta,b}$. Ce sera la limite faible des opérateurs $U_{j,\beta,b}$ définis par

$$U_{j,\beta,b} = \sum_{k=-j}^{j} \Delta_k M_b\{\Delta_k^N M_b R\beta\} S_k,$$

où $\{\Delta_k^N M_b R\beta\}$ désigne l'opérateur de multiplication ponctuelle par $\Delta_k^N M_b R\beta$. Remarquons que $\Delta_k^N b = 0$, et par conséquent $\|\Delta_k^N M_b R\beta\|_\infty \leqslant C\|\beta\|_{\mathrm{BMO}}$, de sorte que les $U_{j,\beta,b}$ résultera du lemme suivant.

Lemme 2.8. *Soient* $\gamma \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ *et* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. *Alors*

$$\sum_k \|(\Delta_k^N M_b \gamma)(S_k f)\|_2^2 \leqslant C\|\gamma\|_{\mathrm{BMO}}^2 \|f\|_2^2.$$

Soit $C_0 > 0$ fixé. Rappelons que, pour qu'une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de mesures positives sur $\mathbb{R}^d$ soit telle que, pour tout $f \in L^2$,

$$\sum_k \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\,d\mu_k)}^2 \leqslant C_1\|f\|_2^2,$$

où $f_k(x) = 2^{kd}\int_{|x-y|\le C_0 2^{-k}} f(y)\,dy$, et il faut et il suffit que pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$\sum_{j\le k}\mu_j(B(x,2^{-k}))\leqslant C_2 2^{-kd}, \tag{2.27}$$

où $B(x,2^{-k})$ est la boule de rayon 2^{-k} et de centre x.

Ce que nous venons d'énoncer est une formulation «en temps discret» d'un résultat de Carleson [CM1], [J2].

Pour vérifier que ce résultat s'applique pour démontrer le Lemme 2.8, notons que, si C_0 est assez grand, $|S_k f(x)|\leqslant C|f_k(x)|$, de sorte que le Lemme 2.8 découlera du résultat suivant, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$ et tout $k\in\mathbb{Z}$,

$$\int_{|x-y|\le 2^{-k}}\sum_{j=k}^{+\infty}|\Delta_j^N M_b\gamma(x)|^2\,dx\leqslant C2^{-kd}. \tag{2.28}$$

It est facile de voir que (2.28) découle de l'inégalité $\sum_0^\infty\|\Delta_j^N f\|_2^2\leqslant C\|f\|_2^2$, valable pour tout $f\in L^2$, des propriétés (2.25) et (2.26) des fonctions de BMO, et des propriétés des opérateurs Δ_j induites par (2.9), (2.10), (2.12) et (2.13). Nous omettons les détails.

Nous pouvons maintenant montrer que les $U_{j,\beta,b}$ sont uniformément bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Soient f et $g\in L^2$;

$$\begin{aligned}|\langle g,U_{j,\beta,b}f\rangle| &\leqslant \sum_{k=-j}^{j}|\langle\Delta_k g, M_b\{\Delta_k^N M_b R\beta\}S_k f\rangle|\leqslant\\ &\leqslant C\left[\sum_{k=-j}^{j}\Delta_k g_2^2\right]^{1/2}\left[\sum_{k=-j}^{j}\|(\Delta_k^N M_b R\beta)(S_k f)\|_2^2\right]^{1/2}\leqslant\\ &\leqslant C\|g\|_2\|\beta\|_{\mathrm{BMO}}\|f\|_2.\end{aligned}$$

Ceci montre également que les $U_{j,\beta,b}$ convergent faiblement sur L^2 lorsque $j\to+\infty$. Soit $U_{\beta,b}$ leur limite. Des calculs analogues à ceus faits pour montrer (2.16), (2.19) et (2.20) permettent de voir que les $U_{j,\beta,b}$ satisfont aux hypothèses du Lemme 1.2. Comme ${}^tU_{j,\beta,b}b=0$ pour tout j, on en déduit, d'après ce lemme, que ${}^tU_{\beta,b}b=0$. Il nous reste à montrer que $U_{\beta,b}b=\beta$. Pour cela nous avons besoin d'une variante du Lemme 1.2.

Lemme 2.9. *Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérteurs vérifiant uniformément les hypothèses du lemme 2.7 et tels que $T_j 1=0$ pour tout j. Si les noyaux K_j convergent uniformément sur tout compact de Ω vers un noyau K et si les T_j convergent faiblement vers un opérateur T comme opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $f\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ et tout g borné, à support compact et d'intégrale nulle,*

$$\langle g, Tf\rangle = \lim_{m\to\infty} \langle g, T_m f\rangle.$$

Ce lemme découle clairement de la démonstration du Lemme 2.7.

Pour démontrer que $U_{\beta,b}b = \beta$, il suffit, d'après le Lemme 1.2, de montrer que pour tout $g \in \{bC_0^\eta(\mathbb{R}^d)\}_0$, $\lim_{j\to+\infty}\langle g, U_{j,\beta,b}b\rangle = \langle g, \beta\rangle$. Or

$$\langle g, U_{j,\beta,b}b\rangle = \left\langle g, \sum_{k=-j}^{j} \Delta_k M_b\{\Delta_k^N M_b R\beta\} S_k b\right\rangle =$$

$$= \left\langle g, \sum_{k=-j}^{j} \Delta_k M_b \Delta_k^N M_b R\beta\right\rangle.$$

D'après le Lemme 2.9 appliqué a la suite $\sum_{k=-j}^{j}\Delta_k M_b \Delta_k^N M_b$, et la définition de V_N,

$$\lim_{j\to+\infty} \langle g, U_{j,\beta,b}b\rangle = \langle g, V_N M_b R\beta\rangle = \langle g, \beta\rangle,$$

d'après la définition de R. L'opérateur $U_{\beta,b}$ possède donc toutes les propriétés requises.

Ceci achève la démonstration du Théorème $T1$ et du Théorème 2.

II. FONCTIONS PARA-ACCRÉTIVES ET THÉORÈME *Tb*

3. Fonctions para-accrétives

Nous avons déjà remarqué que les théorèmes $T1$, 2 et 3 suggèrent la question suivante: quelles conditions une fonction b bornée ainsi que son inverse doit-elle satisfaire pour que le Théorème $T1$ soit vrai sur $(\mathbb{R}^d, b(x)\,dx)$? Le Théorème 3 suggère que b ne doit pas nécessairement être à valeurs réelles. De plus, un examen attentif de la démonstration du Thérème 2 que nous nous avons donnée amène aux constatations suivantes. Le fait que b soit réelle n'a servi que pour permettre d'affirmer que les Δ_k^* satisfaisaient également la propriété (2.13), ce qui était essentiel pour permettre d'utiliser le Lemme 2.1 et vérifier les hypothèses de propre-orthogonalité du lemme CKS. Celui-ci n'a servi qu'à montrer les deux faits suivants:

(3.1) Il existe $C > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que, pour toute partie finie A de $\mathbb{Z}$,

$$\left\| \sum_{j\in A} \Delta_j M_b \Delta_{j+n} \right\|_{2,2} \leqslant C 2^{-\epsilon|n|};$$

(3.2) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|\Delta_j f\|_2^2 \leqslant C\|f\|_2^2.$$

Rappelons que (3.1) et les conditions (2.9)-(2.13) entraînent que la série double $\sum_{j_1} \sum_{j_2} \Delta_{j_1} M_b \Delta_{j_2}$ est fortement sommable, que sa somme est M_b^{-1}, et que de plus $\lim_{N \to \infty} V_N M_b = I$ en norme CZδ. L'estimation quadratique (3.2) est utilisée dans le Lemme 2.5 pour montrer que les opérateurs $\tilde{T}_{N,J_1,J_2}$ sont bornés.

De ces renarques, on peut conclure que le Théorème $T1$ sera vrai sur $(\mathbb{R}^d, b\,dx)$ pour toute fonction b bornée ainsi que son inverse vérifiant les propriétés suivantes:

(3.3) Il existe une suite S_k d'opérateurs donnés par des noyaux s_k vérifiant (2.9)...(2.13);

(3.4) on peut choisir les S_k de manière que, si $\Delta_k = S_k - S_{k-1}$, alors les propriétés (3.1) et (3.2) son vérifiées.

Nous montrerons au paragraphe 6 que la condition (3.3) est en fait nécessaire pour que le Théorème $T1$ soit vrai sur $(\mathbb{R}^d, b\,dx)$.

De plus, nous verrons que si (3.3) est satisfaite, alors (3.4) l'est aussi, de sorte que (3.3) est aussi une condition suffisante, ce que nous démontrerons au paragraphe 5.

Définition 5. *Une fonction b: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, bornée ainsi que son inverse, est dite para-accrétive s'il existe une suite $(s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions* (2.9)...(2.13).

Remarquons que la construction des s_k donnée dans la démonstration du Lemme 2.2 pour des fonctions réelles positives reste valable pour les fonctions accrétives, de sorte que toute fonction accrétive est para-accrétive. La propriété cruciale des fonctions para-accrétives est justement que l'on peut construire les s_k d'une façon analogue.

Proposition 2. *Soit b: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction bornée ainsi que son inverse. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(A) *b est para-accrétive;*

(B) *il existe $\epsilon_1 > 0$ et $N_1 > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout cube dyadique Q de côté 2^{-k}, il existe un cube dyadique $\tilde{Q}$ de même taille tel que la distance de $\tilde{Q}$ à Q soit inférieure à $N_1\, 2^{-k}$ et $|1/|\tilde{Q}| \int_{\tilde{Q}} b(x)\,dx| \geqslant \epsilon_1$;*

(*C*) *il existe* $C_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ *et pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *une fonction* $u_k = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to C$ *telle que*

$$|u_k(x,y)| \leqslant C_1 2^{kd} \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in \mathbb{R}^d \tag{3.5}$$

et

$$u_k(x,y) = 0 \quad \textit{si} \quad |x-y| \geqslant C_1 2^{-k};$$

(3.6) *pour tous* x, y *et* $y' \in \mathbb{R}^d$,

$$|u_k(x,y') - u_k(x,y)| \leqslant C_1 2^{k(d+\delta_1)} |y'-y|^{\delta_1};$$

(3.7) *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, $\dfrac{1}{C_1} \leqslant \left| \displaystyle\int u_k(x,y) b(y)\, dy \right| \leqslant C_1$;

(*D*) *il existe* $C_2 > 0$, $\delta_2 > 0$, *et pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *une fonction* $v_k \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *possédant les propriétés (3.5), (3.6) et (3.7) avec* $C_1 = C_2$ *et* $\delta_1 = \delta_2$, *et telle que*

(3.8) *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, $\int v_k(x,y)\, dy = 1$;

(3.9) *pour tout* $y \in \mathbb{R}^d$, $\int v_k(x,y)\, dx = 1$;

(3.10) *pour tout* $y \in \mathbb{R}^d$, *la fonction* $v_k(\cdot, y)$ *est constante sur chaque cube dyadique de volume* 2^{-kd}.

Avant de démontrer cette proposition, indiquons comment l'implication $A \Rightarrow D$ nous permettra de faire un choix privilégié parmi les suites de fonctions s_k de la Définition 5. Soit V_k l'opérateur de noyau $v_k(x,y)$ et $\{V_k b\}$ l'opérateur de multiplication ponctuelle par $V_k b$. D'après (3.7) cet opérateur est inversible. On pose $S_k = {}^t V_k \{V_k b\}^{-1} V_k$; on vérifie aisément que les noyaux s_k des S_k satisfont (2.9)... (2.13).

Nous venons de démontrer que (*D*) implique (*A*). Comme (*A*) entraîne (*C*) trivialement, il nous suffit de prouver les implications $(C) \Rightarrow (B)$ et $(B) \Rightarrow (D)$.

La démonstration de $(C) \Rightarrow (B)$ repose essentiellement sur une intégration par parties. Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, C_1 et δ_1 comme dans (*C*), et fixons $x \in \mathbb{R}^d$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Ecrivons

$$\int u_k(x,y) b(y)\, dy = \sum_{Q \in \mathfrak{D}_{k+n_0}} \int_Q u_k(x,y) b(y)\, dy,$$

où $\mathfrak{D}_{k+n_0}$ est l'ensemble des cubes dyadiques de volume $2^{-d(k+n_0)}$. Pour tout cube $Q \in \mathfrak{D}_{k+n_0}$

$$\int_Q u_k(x,y)b(y)\,dy = \int_Q [u_k(x,y) - m_Q u_k(x,\cdot)]b(y)\,dy + |Q|(m_Q u(x,\cdot))m_Q b.$$

On en déduit

$$\left|\int_Q u_k(x,y)b(y)\,dy\right| \leqslant C\|b\|_\infty C_1 2^{-\delta_1(k+n_0)}2^{k(d+\delta_1)}|Q| + C_1 2^{kd}|m_Q b|\,|Q|.$$

Comme, en vertu de (3.5), il y a au plus $C\,C_1^d 2^{n_0 d}$ cubes Q de $\mathfrak{D}_{k+n_0}$ tels que $\int_Q u_k(x,y)b(y)\,dy \neq 0$, il découle

$$\begin{aligned} C_1^{-1} &\leqslant \left|\int u_k(x,y)b(y)\,dy\right| \\ &\leqslant CC_1^d 2^{n_0 d}\{C_1 2^{-\delta_1 n_0}2^{dk} + C_1 2^{kd}\sup|m_Q b|\}2^{-d(k+n_0)} \leqslant \\ &\leqslant CC_1^{d+1}\{2^{-\delta_1 n_0} + \sup|m_Q b|\}, \end{aligned}$$

où le sup est pris sur tous les cubes $Q \in \mathfrak{D}_{k+n_0}$ tels que la distance de x à Q soit inférieure à $C2^{-k}$.

En choisissant n_0 suffisamment grand, on conclut que $\sup|m_Q b| \geqslant \epsilon(C_1)$. La propriété (B) est donc vérifiée avec $\epsilon_1 = \epsilon(C_1)$ et $N_1 = C2^{n_0}$, ce qui démontre $(C) \Rightarrow (B)$.

Nous montrons maintenant que (B) implique (D). L'idée est de former pour tout k une partition de $\mathbb{R}^d$ en ensembles E_J tels que $|m_{E_J} b| \geqslant \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ fixe, pus de poser $w_k(x,y) = \frac{1}{|E_J|}$ si x et y sont dans le même ensemble E_J et $w_k(x,y) = 0$ sinon. Les propriétés (3.8) et (3.9) seront automatiquement satisfaites, ainsi que (3.10) si chaque E_J est une union de cubes dyadiques de volume 2^{-kd}. Pour avoir (3.5), ils suffira alors que les E_J aient un diamètre inférieur à $C2^{-k}$. Ensuite on construira les v_k en régularisant les w_k en y, ce qui permettra d'avoir (3.6) sans affecter les autres propriétés.

Nous donnons maintenant les détails. Soient ϵ_1 et N_1 tels que (B) soit satisfaite, et soit K une grande constante, dont la valeur sera précisée plus tard. Fixons $k \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathfrak{D}_k$ la collection des cubes dyadiques de volume 2^{-kd}. On construit une application $L: \mathfrak{D}_k \to \mathfrak{D}_k$ de la façon suivante. Si $|m_Q b| \geqslant \epsilon_1/KN_1^d$, alors $L(Q) = Q$. Si $|m_Q b| \leqslant \epsilon_1/KN_1^d$, alors $L(Q)$ est un cube tel que la distance de Q à $L(Q)$ soit inférieure à $N_1 2^{-k}$ et $|m_{L(Q)} b| \geqslant \epsilon_1$. Pour tout $J \in \mathfrak{D}_k$ tel que $|m_J b| \geqslant \epsilon_1/KN_1^d$, on note E_J l'union de ses antécédents par L. Si $|m_J b| < \epsilon_1$, $E_J = J$; si $|m_J b| \geqslant \epsilon_1$, E_J est l'union de J et d'au plus $C_d N_1^d$ cubes Q tels que $|m_Q b| \leqslant \epsilon_1/KN_1^d$. En choisissant K suffisamment grand, on aura $\left|\int_{E_J} b(y)\,dy\right| \geqslant \frac{\epsilon_1}{2}2^{-kd}$, et $|m_{E_J} b| \geqslant \epsilon_1/2C_d N_1^d$. On obtient donc une partition de $\mathbb{R}^d$ en ensembles E_J tels que $|m_{E_J} b| \geqslant \epsilon$, où $\epsilon > 0$ ne dépend que de ϵ_1, N_1 et d. On définit w_k comme indiqué précédemment. Il est clair que le volume de E_J est supérieur à 2^{-k}, et que son diamètre est dominé par $C2^{-k}$. Par conséquent, w_k satisfait toutes les conditions requises, sauf (3.6).

Nous voulons maintenant régulariser en y la fonction $w_k(x,y)$. Soit φ une fonction positive, C^∞ à support compact, et d'intégrale 1. On pose

$$v_k(x,y) = \int w_k(x,z)(2^kM)^d\varphi(2^kM(z-y))\,dz.$$

Les propriétés (3.5), (3.8), (3.9) et (3.10) sont encore vérifiées par $v_k(x,y)$. De plus, (3.6) est maintenant satisfaite. Il reste donc à voir que (3.7) n'est pas affecté par cetté régularisation, si M est choisi assez grand. on peut choisir M de sorte que

$$\int\left|\left\{\int w_k(x,z)(2^kM)\varphi(2^kM(z-y))\,dz\right\} - w_k(x,y)\right|dy \leqslant \tfrac{\epsilon}{2}\,\|b\|_\infty^{-1}.$$

En effet, pour tout y, l'intégrand est dominé par $\|w_k\|_\infty$, et de plus il est nul pour tous les y qui son à une distance $\geqslant C/2^kM$ de la frontière d'un des E_J. Si x est dans l'ensemble E_J,

$$\left|\int w_k(x,y)b(y)\,dy\right| = \frac{1}{|E_J|}\left|\int_{E_J} b(y)\,dy\right| \geqslant \epsilon,$$

de sorte que $\left|\int v_k(x,y)b(y)\,dy\right| \geqslant \frac{\epsilon}{2}$. Comme $\left|\int v_k(x,y)b(y)\,dy\right| \leqslant \|b\|_\infty$, v_k satisfait aussi (3.7), et nous avons fini la démonstration de la Proposition 2.

La condition (3.10) exprime une certaine régularité en x de $v_k(x,y)$. Nous allons maintenant voir comment on peut l'utiliser.

Lemme 3.1. *Soit H opérateur continu sur L^1 donné par intégration contre un noyau $h(x,y)$ tel que*

(3.11) *pour un certain $t \geqslant 0$, $h(x,y) = 0$ dès que $|x-y| \geqslant t$,*
(3.12) *pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\int h(x,y)\,dy = 0$.*

Alors HV_k est continu sur L^1 avec une norme inférieure à $Ct2^k\|H\|_{1,1}$.

Notons que, d'après (3.5), V_k est borné sur L^1 avec une norme uniformément bornée. Le lemme n'a donc d'intérêt que lorsque $t \leqslant 2^{-k}$.

Supposons donc $t \leqslant 2^{-k}$; l'operateur HV_k est donné par intégration contre le noyau

$$H_k(x,z) = \int h(x,y)v_k(y,z)\,dy.$$

Nous voulons majorer $\sup_z \int |H_k(x,z)|\,dx$. *Si* $z \in E_J$, et si $d(x,\partial E_J) > t$, alors $v_k(\cdot,z)$ est constante sur $\{y, |x-y| \leqslant t\}$. On en déduit que

$$H_k(x,z) = \int h(x,y)v_k(y,z)\,dy = 0$$

à cause de (3.12). Par conséquent

$$\int \left| \int h(x,y) v_k(y,z)\, dy \right| dx \leqslant C2^{kd} \iint_{d(x,\partial E_j) \leq t} |h(x,y)|\, dy\, dx \leqslant$$
$$\leqslant C2^{kd} \int_{d(y,\partial E_j) \leq 2t} \left\{ \int |h(x,y)|\, dx \right\} dy \leqslant$$
$$\leqslant Ct2^k \sup_y \left\{ \int |h(x,y)|\, dx \right\} \leqslant$$
$$\leqslant Ct2^k \|H\|_{1,1}.$$

Le Lemme 3.1 est démontré. Notons que seules les propriétés (3.5) et (3.10) des v_k ont été utilisées.

Nous avons indiqué après la Proposition 2 comment on choisit une famille S_k d'opérateurs dont les noyaux vérifient (2.9)... (2.13). Pour vérifier que les S_k satisfont également (3.1) et (3.2), nous devrons nous appuyer sur des lemmes autres que le Lemme CKS, car la fonction b n'est plus nécessairement réelle.

4. Deux lemmes à la Cotlar

Dans ce paragraphe, H sera le complexifié d'un espace de Hilbert réel, et l'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit bilinéaire sur H. Tous les opérateurs considérés agiront sur H.

Lemme 4.1. *Soit $(A_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite d'opérateurs uniformément bornés telle que $\lim_{j\to\infty} A_j = I$ et $\lim_{j\to-\infty} A_j = 0$ au sens de la convergence forte. On suppose l'existence de constantes $\epsilon > 0$, $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$ telles que, si $B_j = A_j - A_{j-1}$ et $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|B_j B_{j+n}\| + \|B_{j+n} B_j\| \leqslant C_0 2^{-\epsilon n} \tag{4.1}$$

et

$$\text{pour tout } x \in H, \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \{ \|B_j x\|^2 + \|{}^t B_j x\|^2 \} \leqslant C_1^2 \|x\|^2. \tag{4.2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $B_j^n = \sum_{j-n}^{j+n} B_k$. D'après (4.2), l'opérateur $T_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_j B_j^n$ est défini comme série faiblement convergente d'opérateurs. De plus, $\lim_{n\to\infty} T_n = I$ en norme d'opérateur et la série double $\sum\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} B_j B_k$ est fortement sommable. Enfin $\|I - T_n\| \leqslant \frac{1}{2}$ pour $n \geqslant C_0'(1 + |\mathrm{Log}\, C_1|)$, où C_0' ne dépend que C_0, ϵ, et $\sup_j \|A_j\|$.

La lettre C désignera les constantes qui ne dépendent que de C_0, ϵ, et $\sup_j \|A_j\|$. Nous commençons par démontrer le lemme sous l'hypothèse

$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|B_j\| < +\infty$. Toutes les séries que nous écrirons seront donc automatiquement convergentes.

Soient $m \in \mathbb{N}$, et $F \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{(j,k), |j-k| \leqslant m\}$; soit $S_F = \sum\sum_{(j,k)\in F} B_j B_k$. Nous voulons estimer $\|T_n S_F T_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$. Soient x et y dans H; on majore $|\langle x, T_n S_F T_n y\rangle|$ par

$$\sum_r \sum_s |\langle x, B_s B_s^n S_F B_r B_r^n y\rangle| = \sum_r \sum_s |\langle {}^t B_s^n x, B_s S_F B_r B_r^n y\rangle| =$$

$$= \sum_r \sum_s \|{}^t B_s^n x\| \, \|B_s S_F B_r\| \, \|B_r^n y\|.$$

Comme $\left(\sum_r \|B_r^n y\|^2\right)^{1/2} \leqslant (2n+1)\left(\sum_r \|B_r y\|^2\right)^{1/2} \leqslant (2n+1) C_1 \|y\|$ et pareillement $\left(\sum_s \|{}^t B_s^n x\|^2\right)^{1/2} \leqslant (2n+1) C_1 \|x\|$, on voit que

$$|\langle x, T_n S_F T_n y\rangle| \leqslant (2n+1)^2 C_1^2 \|x\| \, \|y\| M_F.$$

où M_F est la norme de la matrice de terme général $a_{s,r} = \|B_s S_F B_r\|$, agissant sur $l^2(\mathbb{Z})$. Donc, $\|T_n S_F T_n\| \leqslant (2n+1)^2 C_1^2 M_F$. Por estimer M_F, on majore $a_{s,r}$ par $\sum_j \sum_{k \atop |j-k|>m} \|B_s B_j B_k B_r\|$. Or (4.1) entraîne que $\|B_s B_j B_k B_r\|$ est inférieur à $C 2^{-\epsilon|s-j|} 2^{-\epsilon|k-r|}$, et aussi à $C 2^{-\epsilon|j-k|}$, donc à $C 2^{-(\epsilon/2)(|s-j|+|j-k|+|k-r|)}$. Si l'on somme cette majoration par rapport à r, puis k, puis j, on obtient $\sum_r a_{s,r} \leqslant C 2^{-\epsilon m/2}$ pour tout s. Si l'on somme en s, j, et k, on obtient $\sum_s a_{s,r} \leqslant C 2^{-\epsilon m/2}$ pour tout r. Il en découle, par interpolation (ou en utilisant l'inégalité de Schwarz) que $M_F \leqslant C 2^{-\epsilon m/2}$. Donc $\|T_n S_F T_n\| \leqslant C n^2 C_1^2 2^{-\epsilon m/2}$. Comme on a supposé que $\sum_j \sum_k \|B_j B_k\| < +\infty$, la série $\sum_j \sum_k B_j B_k$ est normalement sommable, et sa somme est l'identité. Il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|I - T_n\| \leqslant \frac{1}{2}$. Soit n_0 le plus petit entier tel que $\|I - T_{n_0}\| \leqslant \frac{1}{2}$. Si $n_0 > 2$, choisissons $m = n_0 - 1$ et $F = \{(j,k), |j-k| > n_0 - 1\}$, de sorte que $S_F = I - T_{n_0 - 1}$ et $\|S_F\| > \frac{1}{2}$ par définition de n_0. Comme $\|T_{n_0}^{-1}\| \leqslant 2$, on obtient

$$\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{\|T_{n_0}^{-1}\|} \|S_F\| \frac{1}{\|T_{n_0}^{-1}\|} \leqslant \|T_{n_0} S_F T_{n_0}\| \leqslant C n_0^2 C_1^2 2^{-(\epsilon/2)(n_0 - 1)},$$

ce qui entraîne que $n_0 \leqslant C(1 + |\mathrm{Log}\, C_1|)$. Il en découle que pour m et F arbitraires,

$$\|S_F\| \leqslant \|T_{n_0}^{-1}\|^2 \|T_{n_0} S_F T_{n_0}\| \leqslant C n_0^2 C_1^2 2^{-\epsilon m/2} \leqslant C C_1^2 (1 + |\mathrm{Log}\, C_1|)^2 2^{-\epsilon m/2}.$$

Le Lemme 4.1 est donc démontré lorsque $\sum_j \|B_j\| < +\infty$. Dans le cas général, on modifie une suite A_j vérifiant les hypothèses de la façon suivante: on remplace A_j par I lorsque j est très grand, et par 0 lorsque j est très petit. Si F est un sous-ensemble fini donné de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, on peut faire en sorte que l'opérateur S_F correspondant à la suite modifiée soit le même que pour la suite originale. Comme la suite tronquée vérifie les hypothèses du lemme avec les constantes $\epsilon' = \epsilon$, $C_0' = [1/(1 - 2^{-\epsilon})]C_0$ et $C_1' = C_1 + 4\sup_j \|A_j\|$, et de plus est telle que $\sum \|B_j\|^2 < +\infty$, on en déduit que l'inégalité $\|S_F\| \leqslant CC_1^2(1 + |\mathrm{Log}\, C_1|)^2 2^{-\epsilon m/2}$ reste valable pour tout F fini. Il s'ensuit que pour tout $x \in H$, la série double $\sum_j \sum_k B_j B_k x$ est sommable car ses sommes finies sont uniformément majorées. De plus, $\|I - T_m\| \leqslant CC_1^2(1 + |\mathrm{Log}\, C_1|)^2 2^{-\epsilon m/2}$ tend vers 0 quand $m \to +\infty$, ce qui conclut la démonstration du Lemme 4.1.

Il se trouve que, dans les situations où nous appliquerons ce lemme, l'existence de C_0 et de ϵ sera claire, tandis que nous aurons besoin du lemme suivant pour établir celle de C_1.

Lemme 4.2. *Soit $(A_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une suite d'opérateurs uniformément bornés sur H telle que $\lim_{j \to +\infty} A_j = I$ et $\lim_{j \to -\infty} A_j = 0$ au sens de la convergence forte. On suppose l'existence de $C_0 > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que si $B_j = A_j - A_{j-1}$,*

$$\|B_j B_{j+n}\| + \|B_{j+n} B_j\| \leqslant C_0 2^{-\epsilon n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose en outre que A_j admet la factorisation $A_j = D_j E_j$, où $(D_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ et $(E_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ sont deux suites d'opérateurs uniformément bornés vérifiant les propriétes

(4.3) *si $G_j = E_j - E_{j-1}$, $\sum \|G_j x\|^2 \leqslant C_0 \|x\|^2$ pour tout $x \in H$,*

et, si $F_j = D_j - D_{j-1}$,

(4.4) $\|E_j B_{j+n}\| \leqslant C_0 2^{-\epsilon n}$ *pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*
(4.5) $\|F_j E_{j-n}\| \leqslant C_0 2^{-\epsilon n}$ *pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, et*
(4.6) $\|F_j E_{j-n} B_{j-n-n'}\| \leqslant C_0 2^{-\epsilon(n+n')}$ *pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n, n' \in \mathbb{N}$.*

On suppose enfin que la suite $({}^t A_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ satisfait à toutes les hypothèses faites sur la suite (A_j).

La conclusion est l'existence d'une constante C_1 telle que pout tout $x \in H$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|B_j x\|^2 + \|{}^t B_j x\|^2 \leqslant C_1^2 \|x\|^2. \tag{4.7}$$

Comme pour le lemme précédent, il suffit de démontrer qu'il existe une constante C_1, ne dépendant que des hypothèses du lemme, telle que (4.7) soit satisfaite dès que $\sum_j \|B_j\| + \sum_j \|F_j\| < +\infty$. En effet, pour tout $N < +\infty$, on aura $\sum_{j=-N}^{N} \|B_j x\|^2 + \|{}^t B_j x\|^2 \leqslant C_1^2 \|x\|^2$ pour tout x, en appliquant (4.7) à une suite tronquée remplaçant (A_j), et la constante C_1 sera indépendante de N.

Supposons donc que $\sum_j \|B_j\| + \sum_j \|F_j\| < +\infty$, et décomposons B_j de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
B_j &= D_jE_j - D_{j-1}E_{j-1} = \\
&= D_j(E_j - E_{j-1}) + (D_j - D_{j-1})E_{j-1} = \\
&= D_jG_j + F_jE_{j-1}.
\end{aligned}
$$

Comme les D_j sont uniformément bornés, (4.3) entraîne $\sum_j \|D_jG_jx\|^2 \leqslant \leqslant C\|x\|^2$ pour tout $x \in H$. Soit m un entier positif, dont la valeur sera décidée plus tard. On majore $\left(\sum_j \|F_jE_{j-1}x\|^2\right)^{1/2}$ par

$$\Big(\sum_j \|F_jE_{j-m}x\|^2\Big)^{1/2} + \sum_{l=2}^{m}\Big[\sum_j \|F_j(E_{j-l+1} - E_{j-l})x\|^2\Big]^{1/2}.$$

En utilisant à nouveau (4.3) et le fait que les F_j sont uniformément bornés, on voit que

$$\Big[\sum_j \|B_jx\|^2\Big]^{1/2} \leqslant \Big[\sum_j \|F_jE_{j-m}x\|^2\Big]^{1/2} + Cm\|x\|. \tag{4.8}$$

Pour estimer $\sup_{x,\, \|x\| \le 1}\left[\sum_j \|F_jE_{j-m}x\|^2\right]$, il suffit d'estimer

$$\sup_{x,y,\, \|x\| \le 1,\, \|y\| \le 1}\Big|\Big\langle y, \sum_j E_{j-m}^*F_j^*F_jE_{j-m}x\Big\rangle\Big|.$$

Comme nous avons supposé que $\sum_j \|B_j\| < +\infty$, nous savons qu'il existe une constante $C_1 > 0$, et nous voulons seulement obtenir un contrôle de C_1. D'après le Lemme 4.1, il existe $n_0 \leqslant C(1 + |\mathrm{Log}\, C_1|)$ tel que $\|I - T_{n_0}\| < \frac{1}{2}$, de sorte que $\|T_{n_0}^{-1}\| \leqslant 2$. Il suffit donc d'estimer

$$\Big|\Big\langle y, \Big(\sum\sum_{|u-v| \le n_0} B_vB_u\Big)^*\Big(\sum_j E_{j-m}^*F_j^*F_jF_{j-m}\Big)\Big(\sum\sum_{|s-r| \le n_0} B_sB_r\Big)x\Big\rangle\Big|$$

pour $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$.

Par le même raisonnement que dans la démonstration du lemme précédent, et en utilisant les estimations quadratiques

$$\Big\{\sum_u \Big\|\sum_{u=v-n_0}^{v+n} B_uy\Big\|^2\Big\}^{1/2} \leqslant (2n_0 + 1)C_1\|y\| \quad \text{et}$$

$$\Big\{\sum_s \Big\|\sum_{r=s-n_0}^{s+n_0} B_rx\Big\|^2\Big\}^{1/2} \leqslant (2n_0 + 1)C_1\|x\|,$$

on voit que

$$\sup_{x,\, \|x\| \le 1}\Big[\sum_j \|F_jE_{j-m}x\|^2\Big] \leqslant Cn_0^2C_1^2M, \tag{4.9}$$

où M est la norme de la matrice de terme géneral

$$b_{v,s} = \sum_j \|B_v^*E_{j-m}^*F_j^*F_jE_{j-m}B_s\|.$$

Lorsque $s \leqslant j - m$, $\|F_j E_{j-m} B_s\| \leqslant C_0 2^{-\epsilon(j-s)}$ à cause de (4.6); lorsque $s \geqslant j - m$,

$$\|F_j E_{j-m} B_s\| \leqslant C \|F_j E_{j-m}\|^{1/2} \|E_{j-m} B_s\|^{1/2} \leqslant C 2^{-\epsilon m/2} 2^{-\epsilon(s-j+m)}$$

à cause de (4.5) et (4.4). Dans les deux cas,

$$\|F_j E_{j-m} B_s\| \leqslant C 2^{-\epsilon m/2} 2^{-\epsilon|s-j+m|/2}.$$

Il en découle $b_{v,s} \leqslant C 2^{-\epsilon m} \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-\epsilon(|s-l|+|v-l|)} \leqslant C 2^{-\epsilon m}(1 + |s - v|) 2^{-\epsilon|s-v|/2}$. Par conséquent, $M \leqslant C 2^{-\epsilon m}$.

Soit $C_2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_j \|B_j X\|^2\right)^{1/2}$. D'après (4.8), (4.9) et ce que nous venons de voir,

$$C_2 \leqslant C n_0 C_1 M^{1/2} + Cm \leqslant C(1 + |\operatorname{Log} C_1|) C_1 2^{-\epsilon m/2} + Cm.$$

On majore pareillement $\sup_{\|x\| \leq 1} \left(\sum_j \|{}^t B_j x\|^2\right)^{1/2}$ en utilisant la symétrie des hypothèses sur les A_j et les ${}^t A_j$, de sorte que $C_1 \leqslant C(1 + |\operatorname{Log} C_1|) C_1 2^{-\epsilon m/2} +$ $+ Cm$, où la constance C est indépendante de m. On choisit pour m la partie entière de $(2 \operatorname{Log} C_1)/(\epsilon \operatorname{Log} 2)$, on obtient $C_1 \leqslant C(1 + |\operatorname{Log} C_1|)$, ce qui entraîne $C_1 \leqslant C$. Nous avons donc le contrôle de C_1 recherché, et le Lemme 4.2 est démontré.

5. Le théorème *Tb*

Nous allons utiliser les résultats des paragraphes précédents pour démontrer le théorème suivant, qui généralise les théorèmes 2 et 3.

Théorème Tb. *Soient b_1 et b_2 deux foctions para-accrétives sur $\mathbb{R}^d$. Soit $T: b_1 C_0^\eta(\mathbb{R}^d) \to [b_2 C_0^\eta(\mathbb{R}^d)]'$ un* SIO. *Alors T admet une extension continue sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $M_{b_2} T M_{b_1}$ est faiblement borné, $Tb_1 \in$* BMO, *et ${}^t T b_2 \in$* BMO.

Rappelons que les fonctions para-accrétives sont définies et étudiées au paragraphe 3; les autres termes de l'énoncé sont définis au paragraphe 1.

Nous ne démontrerons le théorème que lorsque $b_1 = b_2$, les changements à faire dans le cas géneral étant triviaux. Signalons que la méthode de McIntosh et Meyer pour démontrer le Théorème 3 s'étend aussi au cas de deux fonctions accrétives distinctes b_1 et b_2. Un exemple d'opérateur lié au théorème de McIntosh et Meyer, dans le cas où $b_2 = 1$ et b_1 est une fonction accrétive définie sur $\mathbb{R}$, est précisément l'opérateur de Kato $\sqrt{D b_1 D}$ étudié dans [KM].

Nous passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit $(S_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ la suite d'opérateurs définis après l'énoncé de la Proposition 2, paragraphe 3.

Comme nous l'avons remarqué au début du paragraphe 3, le théorème Tb sera démontré dès que nous aurons prouvé que cette suite S_k satisfait les propriétés (3.1) et (3.2). Pour ce faire, nous allons vérifier que la suite $A_j = S_jM_b$ vérifie les hypothèses du Lemme 4.2. Dans ce cas, (4.7) implique que $\sum_j \|B_jf\|^2 = \sum_j \|\Delta_jM_b^{-1}f\|_2^2 \leqslant C\|f\|_2^2$, ce qui est équivalent à (3.2). D'autre part, si les hypothèses du Lemme 4.2 sont satisfaites, d'après le Lemme 4.2 celles du Lemme 4.1 le sont aussi, et il résulte de la démonstration du Lemme 2 que, si F est une partie finie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \backslash \{(j,k), |j-k| \leqslant m\}$, alors $\left\| \sum\sum_{j,k\in F} B_jB_k \right\| \leqslant C2^{-\epsilon m/2}$. En particulier, si A est une partie finie de $\mathbb{Z}$,

$$\left\| \sum_{j\in A} B_jB_{j+m+1} \right\| = \left\| \sum_{j\in A} \Delta_jM_b\Delta_{j+m+1}M_b \right\| \leqslant C2^{-\epsilon m/2},$$

ce qui est la condition (3.1).

Vérfifions que les S_jM_b vérifient toutes les hypothèses du Lemme 4.2.

Comme les S_jM_b sont uniformément bornés sur L^2, l'hypothèse $\lim_{j\to+\infty} S_jM_b = I$ au sens fort découle de ce que pour toute $f \in C_0^\alpha(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{j\to+\infty} S_jM_bf = f$, ce qui résulte des propriétés (2.9) et (2.13) de $s_j(x,y)$. De même, $\lim_{j\to-\infty} S_jM_b = 0$ au sens fort.

L'inégalité $\|\Delta_jM_b\Delta_{j+n}\| + \|\Delta_{j+n}M_b\Delta_j\| \leqslant C_02^{-\epsilon n}$ est une conséquence du Lemme 2.1 et des propriétés (2.9)... (2.13), que nous avons d'ailleurs déjà vue au Lemme 2.2.

La factorisation de $A_j = S_jM_b = {}^tV_j\{V_jb\}^{-1}V_jM_b$ est donnée par $D_j = {}^tV_j$ et $E_j = \{V_jb\}^{-1}V_jM_b$. Les D_j et E_j sont clairement uniformément bornés. Pour vérifier (4.3), on écrit

$$\begin{aligned} G_j &= \{V_jb\}^{-1}V_jM_b - \{V_{j-1}b\}^{-1}V_{j-1}M_b = \\ &= -\{V_jb\}^{-1}\{V_{j-1}b\}^{-1}(\{V_jb\} - \{V_{j-1}b\})V_jM_b + \\ &\quad + \{V_{j-1}b\}^{-1}(V_j - V_{j-1})M_b. \end{aligned}$$

Soit $T_j = (V_j^* - V_{j-1}^*)(V_j - V_{j-1})$. On déduit de (3.5), (3.6), (3.8), et du Lemme 2.1 que $\|T_jT_k^*\| + \|T_j^*T_k\| \leqslant C2^{-\alpha|j-k|}$. On peut donc appliquer le Lemme CKS, ce qui donne

$$\left|\left\langle f, \sum_j T_jf \right\rangle\right| = \sum_j \|(V_j - V_{j-1})f\|_2^2 \leqslant C\|f\|_2^2$$

et par conséquent

$$\sum_j \|\{V_{j-1}b\}^{-1}(V_j - V_{j-1})M_bf\|_2^2 \leqslant C\|f\|_2^2.$$

De plus, l'inégalité quadratique $\sum_j \|(V_j - V_{j-1})f\|_2^2 \leqslant C\|f\|_2^2$, appliquée à $f = b\chi_{B(x,C2^{-k})}$, montre que la suite de mesures $\mu_j = |(V_j - V_{j-1})b|^2\,dx$ vérifie la condition de Carleson (2.27). On en déduit, comme on l'avait fait au paragraphe 2, que pour tout $f \in L^2$;

$$\sum_j \left\| \frac{1}{(V_j b)(V_{j-1} b)} [(V_j - V_{j-1})b](V_j M_b f) \right\|_2^2 \leqslant C \| f \|_2^2,$$

ce qui entraîne (4.3).

Pour prouver (4.4), on applique le Lemme 2.1 avec $U = {}^t\Delta_{j+n} M_b$ et $V = {}^t V_j$. On obtient $\| {}^t\Delta_{j+n} M_b {}^t V_j \| \leqslant C 2^{-\epsilon n}$, d'où

$$\| E_j B_{j+n} \| = \| \{ V_j b \}^{-1} V_j M_b \Delta_{j+n} M_b \| \leqslant C 2^{-\epsilon n}.$$

Pour vérifier (4.5), montrons que

$$\| ({}^t V_j - {}^t V_{j-1}) \{ V_{j-n} b \}^{-1} V_{j-n} M_b \|_{1,1} \leqslant C 2^{-n}. \tag{5.1}$$

Comme ces opérateurs sont uniformément bornés sur L^∞ à cause de (3.5), il en résultera par interpolation que

$$\| F_j E_{n-j} \|_{2,2} \leqslant C 2^{-n/2}, \tag{5.2}$$

ce qui est (4.5).

Pour prouver (5.1), nous utilisons la remarque suivant la démonstration du Lemme 3.1, qui nous dit que nous pouvons remplacer dans ce lemme l'opérateur V_k par $\{ V_k b^{-1} \} V_k$, dont le noyau vérifie également (3.5) et (3.10). Le Lemme 3.1, appliqué avec $H = {}^t V_j - {}^t V_j$, $t = C 2^{-j}$ et $k = j - n$, fournit aussitôt (5.1).

Pour montrer (4.6), et compte-tenu de (5.2), il suffit de montrer que $\| F_j E_{j-n} B_{j-n-n'} \| \leqslant C 2^{-\alpha n'}$. Nous écrivons $F_j E_{j-n} B_{j-n-n'} = UV$, avec $U = ({}^t V_j - {}^t V_{j-1}) \{ V_{j-n} b \}^{-1} V_{j-n} M_b$ et $V = \Delta_{j-n-n'}$. Comme $U1 = 0$, on peut appliquer le Lemme 2.1 qui donne $\| UV \|_{2,2} \leqslant C 2^{-\alpha n'}$.

Nous avons fini de vérifier que les Lemmes 4.1 et 4.2 s'appliquent à notre situation. Le théorème *Tb* est donc complètement démontré.

6. Nécessité de la para-accrétivité

La proposition suivante est une forme de réciproque au théorème *Tb*.

Proposition 3. *Soit b: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. Si la conclusion du théorème Tb est vraie avec $b_1 = b_2 = b$, alors b est para-accrétive.*

Pour démontrer la Proposition 3 il suffit, pour toute fonction b qui n'est pas para-accrétive, de construire une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs vérifiant uniformément les hypothèses du Théorème Tb , mais qui ne sont pas uniformément bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, et qui sont donnés par intégration contre des noyaux positifs. Il est alors facile de choisir une suite sommable $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réeles positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \sup \|\alpha_n T_n\|_{2,2} = +\infty$. Comme les T_n sont donnés par des noyaux positifs, l'opérateur $\sum \alpha_n T_n$, qui vérifie les hypothèses du Théorème Tb, est alors non borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Supposons donc que b n'est pas para-accrétive. D'après la Proposition 2, pour tout $n > 0$ il existe un cube dyadique Q (soit 2^{-kd} son volume) tel que pour tout cube dyadique $\tilde{Q}$ de même volume vérifiant $d(Q, \tilde{Q}) \leqslant 2^n 2^{-k}$, on ait $|m_{\tilde{Q}} b| \leqslant 1/n$.

Soit X la fonction caractéristique de $\{x \in \mathbb{R}^d, d(x, Q) \leqslant 2^{n-1} 2^{-k}\}$, M_X l'opérateur de multiplication ponctuelle par X, et, pour $t > 0$, P_t l'opérateur de noyau $(1/t^d)\mathbb{1}_{\{|x-y| \leq t\}}$.

Lemme 6.1. *L'opérateur*

$$T_n = \int_{2^{-k}}^{2^{n-k-1}} P_t M_X P_t \frac{dt}{t}$$

est un opérateur d'intégrale singulière dont le noyau satisfait les estimations standard de manière uniforme. De plus, $\|T_n\|_{2,2} \leqslant [(n-1)/4] \operatorname{Log} 2$.

Le calcul du noyau de T_n, et la vérification des estimations standard (1.1) et (1.2) sont faciles et nous les laissons au lecteur. Pour $t \leqslant 2^{n-k-1}$, $P_t X \geqslant \frac{1}{2} X$, de sorte que

$$T_n X \geqslant \int_{2^{-k}}^{2^{n-k-1}} \frac{1}{4} X \frac{dt}{t} \geqslant \frac{(n-1)}{4} \operatorname{Log} 2X,$$

ce qui démontre le Lemme 6.1.

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

Lemme 6.2. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $T \in [2^{-k}, 2^{n-k-1}]$,*

$$|M_X P_t b| \leqslant \frac{C 2^{-k}}{t} + \frac{1}{n}. \tag{6.1}$$

Pour démontrer ce lemme, on remarque que si $d(x, Q) \leqslant 2^{n-k-1}$ et si $t \in [2^{-k}, 2^{n-k-1}]$, la boule de centre x et de rayon t est telle que tout cube dyadique $\tilde{Q}$ de volume 2^{-kd} qui la touche vérifie $|m_{\tilde{Q}} b| \leqslant 1/n$. On en déduit que $|P_t b(x)| \leqslant (1/n) + C(2^{-k}/t)$ en approximant la boule de centre x et de rayon t par une union de cubes dyadiques de volume 2^{-kd}, ce qui démontre le Lemme 6.2.

Nous déduisons de ce lemme que $\| T_n b \|_\infty \leqslant C$; comme ${}^tT = T$ il ne nous reste plus qu'à montrer que les $M_b T M_b$ sont uniformément faiblement bornés. Il suffit en fait de voir que si $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$ a un support de diamètre s, alors

$$\| T_n b \|_\infty \leqslant C(\| f \|_\infty + s \| \nabla f \|_\infty). \tag{6.2}$$

Notons que si $d(x, Q) \leqslant 2^{n-k-1}$ et $f \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$,

$$M_X P_t(bf)(x) = P_t(bf)(x) = f(x) P_t b(x) + P_t[b(f - f(x))](x).$$

D'après (6.1), $\| M_X P_t(bf) \|_\infty \leqslant C\{(2^{-k}/t) + (1/n)\} \| f \|_\infty + Ct \| \nabla f \|_\infty$. nous retiendrons cette majoration si $t \leqslant s$. Si $t \geqslant s$, on a $\| P_t(bf) \|_\infty \leqslant C(s/t)^d \| f \|_\infty$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \| T_n bf \|_\infty &\leqslant C \int_s^{+\infty} \left(\frac{s}{t}\right)^d \| f \|_\infty \frac{dt}{t} + C \int_0^s t \| \nabla f \|_\infty \frac{dt}{t} + \\ &\quad + \int_{2^{-k}}^{2^{n-k-1}} \left(\frac{C2^{-k}}{t} + \frac{1}{n}\right) \| f \|_\infty \frac{dt}{t} \leqslant \\ &\leqslant C(\| f \| + s \| \nabla f \|_\infty). \end{aligned}$$

Nous avons donc une suite T_n comme souhaité, et la Proposition 3 est démontrée.

Une variante légèrement plus élaborée du contre-exemple précédent permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit b_1 une fonction para-accrétive sur $\mathbb{R}^d$. Si b_2 est une fonction bornée telle que la Théorème Tb soit vrai pour le couple (b_1, b_2), alors b_2 est para-accrétive.*

Nous omettons la démonstration de cette proposition.

Il est possible que l'on puisse montrer que b_1 et b_2 sont para-accrétives si le Théorème *Tb* est vrai pour le couple (b_1, b_2), mais nous n'avons pas su le faire. Cela montrerait que le Théorème *Tb* est en un certain sens optimal. Toutefois, il es clair qu'il existe une extension du Théorème *Tb* où les modules des fonctions b_1 et b_2 seraient des poids de Muckenhoupt. L'absence pour l'instant d'applications pour une telle extension suggère toutefois de différer son étude.

Signalons que toute fonction bornée ainsi que son inverse n'est pas nécessairement para-accrétive. Les exponentielles imaginaires nous fournissent une infinité non dénombrable de contre-exemples.

III EXTENSIONS ET APPLICATIONS

7. Extensions

Nous allons illustrer la généralité de la méthode employée dans la démonstration du Théorème Tb para quelques extensions.

A. Espaces de nature homogène

Rappelons qu'un espace de nature homogène (X, d, μ) est un espace topologique X, muni d'une quasi-distance d et d'une mesure de Radon positive μ, pour lequel il existe une constante C telle que pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $\mu(B(x, 2r)) \leqslant C\mu(B(x, r))$, où $B(x, r)$ est la boule $\{y \in X, d(x, y) \leqslant r\}$.

Nous verrons que l'on peut définir, sur chaque espace de nature homogène, une classe d'opérateurs d'intégrale singulière comme nous l'avons fait dans le cas euclidien. Dans le cas de certains groupes de Lie nilpotents, cette classe géneralise les opérateurs de convolution considérés dans [KS]. Enfin, modulo certaines hypothèses innocentes sur l'espace (X, d, μ), le Théorème Tb se généralise.

Le point de départ est le résultat suivant de Macias et Segovia.

Théoréme 4 [MS1]. *Soit (X, d, μ) un espace de nature homogène. Il existe une quasi-distance δ topologiquement équivalente à d verifiant*

(i) $\delta(x, y) \approx \inf_B \mu(B)$, *l'inf étant pris sur toutes les boules B contenant x et y, et*

(ii) *il existe $C > 0$ et $\alpha > 0$ tels que, pour tous x, y, $z \in X$,*

$$|\delta(x, z) - \delta(y, z)| \leqslant C\delta(x, y)^{\alpha}(\delta(x, z) + \delta(y, z))^{1-\alpha}.$$

Au vu de ce résultat, on peut remplacer l'espace (X, d, μ) par (X, δ, μ). L'avantage est que, sur l'espace (X, δ, μ), la fonction δ est localement höldérienne, et que, si $C_0^\eta(X, \delta)$ est l'espace des fonctions höldériennes d'exposant η à support compact, $C_0^\eta(X, \delta)$ est dense dans $L^2(X, d\mu)$ si η est assez pettit [MS1].

Une fonction $K(x, y)$, définie pour $x \neq y$, est un noyau standard sur (X, δ, μ) s'il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|K(x, y)| \leqslant C\delta(x, y)^{-1} \quad \text{pour} \quad x \neq y, \tag{7.1}$$

et

$$(7.2) \quad |K(x',y) - K(x,y)| + |K(y,x') - K(y,x)| \leqslant C \frac{\delta(x',x)^\eta}{(\delta(x',y) + \delta(x,y))^{1+\eta}}.$$

Il est facile de voir que, si l'on prend $\delta(x,y) = |x-y|^d$ sur $(\mathbb{R}^d, dx)$, cette définition d'un noyau standard coincide avec celle du paragraphe 1.

Soient b_1 et b_2 dans $L^\infty(X,\mu)$. Comme dans le cas euclidien, un opérateur d'intégrale singulière est un opérateur continu $T: b_1 C_0^\eta(X,\delta) \to b_2 C_0^\eta(X,\delta)'$ associé à un noyau standard $K(x,y)$ au sens que, pour f et g dans $C_0^\eta(X,\delta)$ à supports disjoints.

$$\langle g, Tf \rangle = \iint g(x) b_2(x) K(x,y) b_1(y) f(y)\, d\mu(y)\, d\mu(x).$$

La démonstration du Théorème $T1$ sur les espaces de nature homogène suit de très près la démonstration du Théorème 2 donnée au paragraphe 2. Le point crucial est l'existence d'une «bonne» approximation de l'identité, destinée à remplacer les opérateurs S_k du Lemme 2.2. On a besoin d'une suite $(s_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de fonctions, définies de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$, telles que, pour un $\eta > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$(7.3) \qquad s_k(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad \delta(x,y) \geqslant C2^{-k} \quad \text{et} \quad \|s_k\|_\infty \leqslant C2^k;$$

$$(7.4) \qquad |s_k(x,y) - s_k(x',y)| \leqslant C2^{k(1+\eta)}\delta(x,x')$$

pour x, x' et y dans X:

$$(7.5) \qquad s_k(x,y) = s_k(y,x) \quad \text{pour tous} \quad x,\quad y \in X;$$

$$(7.6) \qquad \int_X s_k(x,y)\, d\mu(y) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in X.$$

Pour construire les s_k, on a besoin des deux hypothèses supplémentaires suivantes sur (X, δ, μ):

$$(7.7) \qquad \mu(X) = +\infty$$

$$(7.8) \text{ pour tout } x \in X, \qquad \mu(\{x\}) = 0.$$

On choisit une fonction h dérivable: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, égale à 1 sur $[0, 1/2]$ et à 0 sur $[2, +\infty[$. On appelle T_k l'opérateur défini par le noyau $2^{-k}h(\delta(x,y)/2^k)$. La propriété d'espace homogène et les hypothèses (7.7) et (7.8) entraînent que $T_k 1 \approx 1$. Soient M_k l'opérateur de multiplication par $1/T_k 1$, W_k l'opérateur de multiplication par $\{T_k(1/T_k 1)\}^{-1}$, et $S_k = M_k T_k W_k T_k M_k$. Les propriétés (7.3), (7.5) et (7.6) son immédiates, et (7.4) provient de la propriété (ii) de δ.

On a de plus $\lim_{k\to+\infty} S_k = I$ et $\lim_{k\to-\infty} S_k = 0$, la convergence ayant lieu pour la topologie forte des opérateurs bornés sur L^2. Le reste de la démonstration du Théorème 2 donnée plus haut est encore valable dans le contexte des espaces de nature homogène.

Pour démontrer la Théorème Tb dans le cadre des espaces de nature homogène, il nous faut en outre un substitut à la Proposition 2. La propriété (B) est modifiée en remplaçant les cubes dyadiques par des boules. Pour construire des fonctions v_k comme dans $(B) \Rightarrow (D)$, on décompose, pour tout k, X en use union disjointe d'ensembles $E_{k,J}$ dont la mesure est $\geqslant C2^{-k}$ et le diamètre pour la quasi-distance δ est inférieur à $C2^{-k}$. Il faut encore, pour que la condition «pour tout $y \in X$, la fonction $v_k(\cdot, y)$ est constante sur chaque $E_{k,J}$» entraîne assez de régularité en x pour pouvoir être utilisée dans le Lemme 3.1, que la mesure de l'ensemble des points de X dont la distance à la frontière d'un des $E_{k,J}$ est inférieure à t décroisse suffisamment vite avec t.

On est amené à faire l'hypothèse supplémentaire suivante sur (X, δ, μ):

(7.9) Il est possible de choisir la quasi-distance du théorème de Macias et Segovia de telle sorte que, en plus de (i) et de (ii), on ait

(iii) il existe $\gamma > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $x \in X$ et tous $r > s > 0$, $\mu(B(x, r) \backslash B(x, s)) \leqslant C(r - s)^{\gamma} r^{1-\gamma}$.

Avec les hypothèses supplémentaires (7.7), (7.8) et (7.9), on peut démontrer une proposition semblable à la Proposition 2. Le reste de la démonstration du Théorème Tb se déroule alors à peu près comme dans le cas euclidien, de sorte que le Théorème Tb est vrai sur (X, δ, μ). Nous omettons les détails de la démonstration.

B. Opérateurs agissant sur des fonctions à valeurs matricielles

Le Théorème Tb s'étend aussi sans grande modification au cas où l'opérateur T envoie des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dans des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le noyau $K(x, y)$ est alors une matrice $n \times n$ dont les coefficients sont notés $K_{i,j}(x, y)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. On dira que K est un noyau standard si les $K_{i,j}$ sont des noyaux standard. Il est commode de considérer l'opérateur T comme agissant sur les fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients complexes), au lieu de $\mathbb{R}^n$.

Nous définissons la dualité sur les fonctions à valeurs matricielles à l'aide de la forme bilinéaire

$$\langle G, F \rangle = \int \tilde{G}(x) F(x)\, dx, \tag{7.10}$$

où $\tilde{G}(x)$ est pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ la matrice transposée de $G(x)$. Notons que le produit $\langle G, F \rangle$ est une matrice constante.

On notera $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}_n(C))$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact définies sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$; si B est une fonction à valeurs matricielles, BC_0^∞ sera l'image de C_0^∞ pour l'opérateur de multiplication à gauche par $B(x)$.

On se donne donc deux fonctions $B_1(x)$ et $B_2(x)$, à valeurs dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $B_1^{-1}(x)$ et $B_2^{-1}(x)$ existent et soient bornées. Un SIO est un opérateur linéaire continu $T: B_1 C_0^\infty \to (B_2 C_0^\infty)'$ (où le dual est défini à l'aide du produit bilinéaire ci-dessus), pour lequel il existe un noyau standard $K(x, y) = ((K_{i,j}(x, y))$ tel que, si F et G sont dans C_0^∞ et ont des supports disjoints,

$$\langle B_2 G, TB_1 F\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{G}(x)\tilde{B}_2(x)K(x, y)B_1(y)F(y)\, dy\, dx.$$

Définissons la transposition des opérateurs par la formule $\langle G, {}^tTF\rangle = \langle F, TG\rangle^{\sim}$. Ainsi, le transposé de l'opérateur de multiplication à gauche par $B(x)$ est l'opérateur de multiplication à gauche par $B(x)$. D'autre part, si T est un SIO, alors ${}^tT$ est un SIO, et son noyau est $K(y, x)$.

Avec ces notations, on a le théorème suivant:

Théorème TB. *Soient B_1 et B_2 deux fonctions bornées de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, et telles que B_1^{-1} et B_2^{-1} existent et soient bornées. On suppose que B_1 et B_2 satisfont à la condition (D) de la Proposition 2, où (3.7) est remplacée par*

(3.7)′ *pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\int u_k(x, y)B(y)\, dy$ est inversible, et la norme de son inverse est inférieure à C_1.*

Soit $T: B_1 C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})) \to [B_2 C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))]'$ un SIO. *Alors T admet une extension continue sur $L^2(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ si et seulement si $\mathfrak{M}_{\tilde{B}_2} TM_{B_1}$ est faiblement borné, $TB_1 \in$* BMO, et *${}^tTB_2 \in$* BMO.

Les définitions de TB_1, ${}^tTB_2$, et de la bornitude faible de $M_{\tilde{B}_2}TM_{B_1}$ sont les mêmes que dans le cas scalaire.

La démonstration de ce théorème est la même que celle du Théorème *Tb*; nous en omettons les détails.

La Proposition 2 ne semble pas se généraliser aux fonctions à valeurs matricielles. Dans la démonstration de (*B*) ⇒ (*D*), pour pouvoir prouver que l'intégrale de b sur chaque E_J est assez grande, il faudrait que si deux matrices A et B sont telles que $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\epsilon}$ et $\|B^{-1}\| \geqslant \frac{C}{\epsilon}$, alors $\|(A - B)^{-1}\| \leqslant \frac{2}{\epsilon}$. Une telle propriété est naturellement fausse en général, et nous ne savons pas démontrer le Théorème *TB* pour une fonction à valeurs matricielles B qui satisferait à la condition (*B*) de la Proposition 2.

C. Les nombres de Clifford

Rappelons que l'algèbre de Clifford $C_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre sur $\mathbb{R}$ engendrée par une unité $e_0 = 1$ et n éléments $e_1, \ldots, e_n$, avec les relations $e_i^2 = -1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $e_i e_j = -e_j e_i$ pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Si $A = (i_1, \ldots, i_k)$ est une suite finie strictement croissante de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $e_A = e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$; par convention, $e_\phi = e_0$. Les e_A forment une base de $C_n(\mathbb{R})$, qui est donc de dimension 2^n sur $\mathbb{R}$.

Les nombres de Clifford sont le sous-espace vectoriel de dimension $n+1$ engendré par $e_0, \ldots, e_n$. Si $x = x_0 + x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ est un nombre de Clifford non nul, et si $|x|^2 = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$, alors x est inversible, et $x^{-1} = (2/|x|^2)(x_0 - x_1 e_1 - \cdots - x_n e_n)$. En particulier, $|1/x| = 1/|x|$, et la propriété qui nous faisait défaut pour les matrices est vraie. La Proposition 2 est donc encore vraie pour les fonctions b bornées définies sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans les nombres de Clifford.

Como l'algèbre de Clifford opère sur elle-même (par exemple par multiplication à gauche), on déduit du Théorème *TB* et la remarque précédente que le Théorème *Tb* reste valable lorsque T est associé à un noyau $K(x, y)$ à valeurs dans $C_n(\mathbb{R})$, et b_1, b_2 sont deux fonctions para-accrétives définies sur $\mathbb{R}^d$ et à valeurs dans les nombres de Clifford.

8. Opérateur de Cauchy et calcul fonctionnel holomorphe en plusieurs variables

Une conséquence facile du Théorème *Tb* est la continuité sur L^2 de l'opérateur défini par le noyau de Cauchy sur une courbe corde-arc. Rappelons qu'une courbe rectifiable Γ du plan complexe, admettant la paramétrisation par la longueur d'arc $s \to z(s)$, définie pour $s \in \mathbb{R}$, est dite corde-arc si, pour une constante $C \geqslant 1$ et tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, $|z(s) - z(t)| \geqslant \frac{1}{C}|s - t|$.

Si Γ est une courbe corde-arc, alors le noyau $K(x, y) = 1/(z(x) - z(y))$ est un noyau standard, et de plus antisymétrique. Nous avons vu au paragraphe 1 (formules (1.4) et (1.5)) que $K(x, y)$ définit un SIO $T: z'C_0^\infty(\mathbb{R}) \to z'C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $M_{z'}TM_{z'}$ soit faiblement borné. On vérifie sans peine que $Tz' = {}^tTz' = 0$ (dans BMO) en utilisant la formule de Cauchy. De plus, la fonction z' vérifie clairement la propriété (B) de la Proposition 2, de sorte que l'on peut appliquer le Théorème *Tb* et qu'on obtient la continuité sur L^2 de l'opérateur T.

Rappelons que ce résultat est une conséquence facile du Théorème de Coifman-McIntosh-Meyer [CMM1] (voir [CDM]). Notons aussi que, lorsque Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne, ce résultat découle, par le même argument, du Théorème de McIntosh et Meyer cité au paragraphe 2.

L'extension du Théorème Tb aux nombres de Clifford permet de démontrer directement que le noyau de Cauchy-Clifford associé au graphe d'une fonction lipschitzienne: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Comme ce résultat est, de toute façon, une conséquence facile du Théorème de Coifman, McIntosh et Meyer, nous ne donnons pas les détails (voir [DJS]).

Nous nous proposons d'étendre en plusieurs dimensions la construction par Coifman et Meyer [CM2] d'un calcul fonctionnel holomorphe en $(1/(1 + i\varphi'))(d/dx)$, où φ est une fonction lipschitzienne: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappelons de quoi il s'agit.

Soit H_α l'espace des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ admettant un prolongement holomorphe borné sur le secteur $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}\, z| < \alpha|\mathrm{Re}\, z|\}$, et soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ le graphe d'une fonction lipschitzienne φ vérifiant $\|\varphi'\|_\infty < \alpha$, *c-à-d.* $\Gamma = \{x + y, y = \varphi(x)\}$. Soit $m \in H_\alpha$. On fait les hypothèses a priori que φ est à support compact et qu'il existe $C > 0$ et $a > 1$ tels que, pour tout $z \in S_\alpha$, $\mathrm{Log}\,|m(z)| \leqslant C - (1/C)|z|^a$.

Sous ces hypothèses, Coifman et Meyer [CM2] associent au couple (m, Γ) un opérateur M_Γ défini par la formule

$$M_\Gamma f(z) = \int_{\mathbb{R}} \int_\Gamma e^{2i\pi t(z-w)} f(w) m(t)\, dw\, dt,$$

où $f \in L^1(\Gamma, ds)$ a un support compact, et $z \in \Gamma$.

Lorsque $\Gamma = \mathbb{R}$, M_Γ est, à une constante près, le multiplicateur de Fourier de symbole m; lorsque Γ est quelconque, et $m(t) = sgn(t)$, M_Γ n'est autre que l'opérateur de Cauchy sur la courbe Γ. Coifman et Meyer démontrent le théorème suivant.

Théorème 5 [CM2]. *L'opérateur M_Γ est borné sur $L^2(\Gamma, ds)$ avec une norme qui ne dépend que de $\|m\|_\alpha = \sup_{z \in S_\alpha} |m(z)|$ et de $\|\varphi'\|_\infty$.*

Signalons que, lorsque Coifman et Meyer démontrèrent ce théorème, la continuité sur L^2 de l'opérateur de Cauchy sur les courbes lipschitziennes n'était connue que sous la restriction de Calderón $\|\varphi'\|_\infty \leqslant \delta_0$, qui était donc ajoutée aux hypothèses.

Vérifions que ce théorème peut se démontrer en utilisant le Théorème de McIntosh et Meyer cité au paragraphe 2. On considère l'opérateur T_Γ, défini de $(1 + i\varphi')C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans son dual par $\langle g, T_\Gamma f\rangle = \int_\Gamma \tilde{g}(z) M_\Gamma \tilde{f}(z)\, dz$, où $\tilde{f}(x + i\varphi(x)) = (1 + i\varphi'(x))^{-1} f(x)$ et $\tilde{g}(x + i\varphi(x)) = (1 + i\varphi'(x))^{-1} g(x)$. Nous voulons appliquer le Théorème 3, avec $b = 1 + i\varphi'$, à l'opérateur T_Γ.

Le noyau de T_Γ est

$$K(x, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t(x + i\varphi(x) - y - i\varphi(y))} m(t)\, dt.$$

L'hypothèse a priori faite sur m entraîne que la fonction L définie par $L(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi tz} m(t)\,dt$ est analytique et bornée sur S_α. De plus, en utilisant un changement de contour et en faisant tourner l'axe des x jusqu'à ce que tz soit réel, on obtient le résultat suivant: pour tout $\gamma < \alpha$, il existe une constante $C_\gamma > 0$, ne dépendant que de γ, α, et $\|m\|_\alpha$, telle que

$$|L(z)| \leqslant \frac{C_\gamma}{|z|} \quad \text{et} \quad |L'(z)| \leqslant \frac{C_\gamma}{|z|^2} \quad \text{sur } S_\gamma.$$

Ces inégalités entraînent que K est un noyau 1-standard. Les égalités $T_\Gamma(1 + i\varphi') = {}^tT_\Gamma(1 + i\varphi') = 0$ découlent de la formule de Cauchy, et il ne reste qu'à vérifier que $M_{1+i\varphi'} T_\Gamma M_{1+i\varphi'}$ est faiblement borné. Ce sera une conséquence immédiate du lemme suivant.

Lemme 8.1. *Il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que α et de $\|\varphi'\|_\infty$, telle que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ supportée par un intervalle I,*

$$\|T_\Gamma M_{1+i\varphi'} f\|_\infty \leqslant C\|m\|_\alpha\{\|f\|_\infty + |I|\,\|f'\|_\infty\}.$$

Par homogénéité, on peut se contenter de démontrer le lemme lorsque $|I| = 1$. Choisissons $a > 1$ assez petit pour que $\operatorname{Re} z^a > 0$ dans $\{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| < \alpha \operatorname{Re} z\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit une fonction g_x de la façon suivante. On convient que $z^a = \exp(a \operatorname{Log} z)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$ et $z^a = (-z)^a$ pour $\operatorname{Re} z < 0$, et l'on pose $g_x(y) = f(x)\exp[-(x + i\varphi(x) - y - i\varphi(y))^a]$. On majore $|T_\Gamma Mf(x)|$ par $|T_\Gamma M(f - g_x)(x)| + |T_\Gamma M g_x(x)|$.

Un changement de contour montre que

$$\begin{aligned} T_\Gamma M_{1+i\varphi'} g_x(x) &= \int_{\mathbb{R}} L(x + i\varphi(x) - y - i\varphi(y))(1 + i\varphi'(y)) g_x(y)\,dy = \\ &= \int_{\Gamma_x = \{x + i\varphi(x) - y - i\varphi(y), y \in \mathbb{R}\}} L(z) f(x) \exp(-z^a)\,dz = \\ &= f(x) \int_{\mathbb{R}} L(u) \exp(-u^\alpha)\,du. \end{aligned}$$

Avec notre définition, $u^\alpha = |u|^\alpha$ pour u réel, et la transformée de Fourier de $\exp(-u^\alpha)$ est intégrable, de sorte que, en utilisant Plancherel, on obtient

$$|T_\Gamma M_{1+i\varphi'} g_x(x)| \leqslant C_a \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Le terme $T_\Gamma M_{1+i\varphi'}(f - g_x)(x)$ est majoré par

$$\|m\|_\alpha \int_{\mathbb{R}} |L(x + i\varphi(x) - y - i\varphi(y))(1 + i\varphi'(y))(f(y) - g_x(y))|\,dy.$$

En vertu de la régularité et de la décroissance de $f - g_x$, le second terme est donc dominé par $C\|m\|_\alpha(|I|\,\|f'\|_\infty + \|f\|_\infty)$.

Le Lemme 8.1 est démontré, et le théorème de McIntosh et Meyer s'applique.

Rappelons comment l'opérateur $T_\Gamma M_{1+i\varphi'}$ peut être interprété en termes de calcul fonctionnel. Soit T le multiplicateur de Fourier de symbole m, que l'on peut noter $m(D)$, où $D = (1/i)(d/dx)$. L'opération $m \to m(D)$ est un homorphisme d'algèbres de Banach entre L^∞ et l'ensemble des opérateurs bornés sur L^2, et définit un calcul fonctionnel pour D. Soient h un difféomorphisme croissant bilipschitzien de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et V_k l'opérateur défini par $V_h f = f \circ h$. L'opération $m \to V_h m(D) V_n^{-1}$ définit un calcul fonctionnel pour l'opérateur $V_h D V_h^{-1} = M_{h'}^{-1} D$.

D'autre part, le noyau de $m(M_{h'}^{-1}D) = V_h m(D) V_h^{-1}$ est égal à $L(h(x) - h(y))h'(y)$. Si l'on remplace $h(x)$ par $x + i\varphi(x)$, on obtient le noyau de l'opérateur $T_\Gamma M_{1+i\varphi'}$. Plus précisément, le théorème de Coifman et Meyer permet de montrer que $V_h T V_h^{-1}$ est une fonction analytique réelle de h', définie dans l'ouvert $\{u \in L^\infty, \inf u > 0\}$ de $L^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$. Cette fonction analytique réelle admet un prolongement holomorphe dans l'ouvert $\{u \in L^\infty_{\mathbb{C}}, \inf |u| > 0$ et $|Im\, u| < \gamma \operatorname{Re} u\}$, pour un certain $\gamma > 0$. L'opérateur $T_\Gamma M_{1+i\varphi'}$ est précisément la valeur de ce prolongement au point $u = 1 + i\varphi'$. On peut aussi montrer que $m \to$ $\to T_\Gamma M_{1+i\varphi'}$ définit un calcul fonctionnel holomorphe pour l'opérateur $M_{1+i\varphi'}^{-1} D$, défini pour $m \in H_\alpha$. Nous renvoyons à [J1] pour les détails concernant le prolongement complexe de $V_h T V_{h^{-1}}$.

Nous nous intéressons maintenant au problème analogue en dimension $d > 1$. Soient m une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}^d$, et T le multiplicateur de symbole m. Pour tout difféomorphisme bi-lipschitzien h de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même, soient $J_h(x)$ la matrice jacobienne de h au point x et V_h l'opérateur défini par $V_h f = f \circ h$. Nous voulons étudier $V_h T V_h^{-1}$ en tant que fonction de J_h. Plus précisément, soient J le sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_d(\mathbb{R}))$ constitué des fonctions matrices jacobiennes des fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, et $\mathfrak{U}$ l'ouvert de J correspondant aux difféomorphismes bi-lipschitziens.

Coifman et Meyer ont posé la question suivante: quelles hypothèses doit-on faire sur m pour que $V_h T V_h^{-1}$ soit une fonction analytique de $J_h \in \mathfrak{U}$, et que peut-on dire dans ce cas de son prolongement analytique complexe? Ce problème est étudié dans [J1], où il est démontré qu'une condition nécessaire est l'existence d'une extension holomorphe de m bornée sur un secteur de $\mathbb{C}^d$ du type

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C}^d, \sum_{1 \leq i \leq d} |\operatorname{Im} z_i|^2 \leqslant \alpha \sum_{1 \leq i \leq d} |\operatorname{Re} z_i|^2 \right\}.$$

Yves Meyer a remarqué que si cette propriété est vraie pour un $\alpha > 1$, alors m est constante. On ne s'intéressera donc qu'au cas où $\alpha < 1$.

Nous allons montrer que cette condition sur m est également suffisante.

Soit H_α l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$ et admettant une extension holomorphe bornée dans S_α, et, pour $m \in H_\alpha$, $\|m\|_\alpha = \sup_{z \in S_\alpha} |m(z)|$. Soit $J_{\mathbb{C}}$ le sous-espace fermé de $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))$ constitué par les fonctions matrices jacobiennes des fonctions lipschitziennes définies de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}^d$, et soit $\mathfrak{U}_{\alpha,\epsilon}$ l'ouvert de $J_{\mathbb{C}}$ correspondant aux applications $v = (v_i)_{1 \leq i \leq d}$ telles que, pour un $\epsilon' < \epsilon$ et un $\alpha' < \alpha$, on ait

$$\epsilon'|x-y|^2 \leqslant \sum_{1 \leq i \leq d} |v_i(x) - v_i(y)|^2 \leqslant \frac{1}{\epsilon'} |x-y|^2$$

et

$$\sum_{1 \leq i \leq d} |\operatorname{Im} v_i(x) - \operatorname{Im} v_i(y)|^2 \leqslant \alpha' \sum_{1 \leq i \leq d} |\operatorname{Re} v_i(x) - \operatorname{Re} v_i(y)|^2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Théorème 6. *Soit $m \in H_\alpha$. La fonction définie de $\mathfrak{U}$ dans l'espace des opérateurs bornés sur $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$ qui à J_h associe $V_h T V_h^{-1}$ est analytique réelle dans $\mathfrak{U}$ et admet un prolongement analytique complexe borné sur chaque ouvert $U_{\gamma,\epsilon}$, où $\gamma < \alpha$ et $\epsilon > 0$.*

Remarquons que la condition $\alpha < 1$ nous permet, en multipliant m par $\exp\left(-C\sum_i z_i^2\right)$, qui est dominé sur S_α par $\exp\left(C'\sum z_i^2\right)$, de faire l'hypothèse qualitative qu'il existe C et $C' > 0$ tels que $|m(z)| \leqslant C\exp\left(-C'\sum_i |z_i|^2\right)$. Le cas géneral en découle alors par passage à la limite.

La démonstration de ce théorème a la même structure que celle du théorème de Coifman-Meyer utilisant le théorème de McIntosh-Meyer.

Le noyau de $V_h T V_h^{-1}$ est $L(h(x) - h(y)) \det J_h(y)$, où L est défini sur $\mathbb{R}^d$ par

$$L(x) = \int_{\mathbb{R}^d} exp\left(2\pi i \sum_j x_j \xi_j\right) m(\xi)\, d\xi.$$

L'hypothèse a priori sur m entraîne que L se prolonge en une fonction entière sur $\mathbb{C}^d$. De plus, comme en dimension 1, pour tout $\gamma < \alpha$ on a

$$|L(z)| \leqslant C\|m\|_\alpha \Big(\sum_j |z_j|^2\Big)^{-d/2}$$

et

$$|\operatorname{grad} L(z)| \leqslant C\|m\|_\alpha \Big(\sum_j |z_j|^2\Big)^{-(d+1)/2} \quad \text{pour tout} \quad z \in S_\gamma,$$

où la constante C ne dépend que de γ et de α. On en conclut que le noyau $L(v(x) - v(y))$ est uniformément 1-standard lorsque J_v reste dans l'ouvert

$\mathcal{U}_{\gamma,\epsilon}$. Comme L est entière, ce noyau définit sans ambiguïté un opérateur $T_{m,v}$. Il reste à montrer que $T_{m,v}$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, avec une norme inférieure à $C(\alpha, \gamma, \epsilon)\|m\|_\alpha$. Le théorème en découlera car $T_{m,v}$ est une fonction holomorphe de v.

Des arguments du même type que ceux utilisés en dimension 1 permettent de montrer que $T_{m,v}(\det J_v) = {}^t T_{m,v}(\det J_v) = 0$ et que $M_v T_{m,v} M_v$ est faiblement borné, où M_v est l'opérateur de multiplication ponctuelle par $\det J_v$. Toutefois, le théorème de McInstosh-Meyer ne peut s'utiliser lorsque la fonction $\det J_v$ n'est pas accrétive, ce qui est en général le cas lorsque α n'est pas proche de 0. Neanmoins, le Théorème Tb et le lemme suivant permettent de conclure.

Lemme 8.2. *Sous les hypothèses du Théorème* 6, *la fonction* J_v *est para-accrétive.*

Pour démontrer le lemme, observons que pour tout $t > 0$ et tout $J_v \in \mathcal{U}_{\gamma,\epsilon}$, un changement de contour donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} t^d \exp\left\{-t^2 \sum_j (v_j(x) - v_j(y))^2\right\} \det J_v(y)\, dy = C_0,$$

où $C_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-|x|^2)\, dx$.

En prenant $t = 2^k$ et en posant

$$u_k(x, y) = 2^{kd}\left(\exp\left[-2^{2k} \sum_j (v_j(x) - v_j(y))^2\right]\right)\varphi\left(\frac{(x-y)2^k}{M}\right),$$

où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est égale à 1 au voisinage de l'origine, et où M est assez grand, on voit que $\det J_v$ vérifie la condition (C) de la Proposition 2. Ceci démontre le Lemme 8.2 et le Théorème 6.

Comme en dimension 1, le Théorème 6 peut être interprété en termes de calcul fonctionnel holomorphe. Soit $v\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ tel que $J_v \in \mathcal{U}_{\gamma,\epsilon}$ pour un $\gamma < \alpha$ et un $\epsilon < 0$, et notons J_v^{-1} grad le système de champs de vecteurs $(L_j)_{1 \le j \le d}$ définis par $L_j(x) = \sum_k a_{j,k}(x)(\partial/\partial x_k)$, où les $a_{j,k}(x)$ sont les coefficients de la matrice $J_v^{-1}(x)$. On pose, pour $m \in H_\alpha$, $m\left(\frac{1}{i} J_v^{-1} \operatorname{grad}\right) = T_{m,v} M_v$ (le Théorème 6 permet de donner un sens à $T_{m,v}M_v$, même quand m n'est pas dominé par $\exp\left(-C' \sum |z_j|^2\right)$).

L'application ϕ qui à m associe $m\left(\frac{1}{i} J_v^{-1} \operatorname{grad}\right)$ est une application linéaire bornée de H_α dans l'espace des opérateurs bornés sur L^2, qui a les propriétés suivantes:

(i) si m_1 et m_2 sont dans H_α, alors

$$\phi(m_1 m_2) = \phi(m_1)\phi(m_2);$$

(ii) si $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite dans H_α, avec $\|m_j\| \leqslant C$ et qui converge vers $m \in H_\alpha$ uniformément sur tout compact de S_α, alors $\lim_{j\to\infty} \phi(m_j) = \phi(m)$ pour la topologie forte des opérateurs;

(iii) si $|m(z)| \leqslant C \exp(-C'|z_i|^2)$ pour un C et un $C' > 0$, alors $\phi(m)$ est l'opérateur donné par intégration contre le noyau $L(v(x) - v(y)) \det J_v(y)$, où L est la fonction entière définie sur $\mathbb{C}^d$ par

$$L(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{d} z_j \xi_j\right) m(\xi)\, d\xi.$$

Notons que les propriétés (ii) et (iii) déterminent uniquement le calcul fonctionnel qui à m associe $m\left(\frac{1}{i} J_v^{-1} \operatorname{grad}\right)$. La propriété (iii) est vraie par définition; la partie (ii) ainsi que le fait que $\phi(m)$ est un opérateur borné découlent du théorème. La propriété d'homomorphisme est vraie quand v est réelle, car alors $\phi(m) = V_h T_h^{-1}$, où $T = m\left(\frac{1}{i}\operatorname{grad}\right)$ est le multiplicateur de symbole m; elle reste vraie pour v complexe par prolongement analytique.

Nous allons formuler ce résultat de façon un peu différente.

Théorème 7. *Soit $(L_j)_{1\leq j\leq d}$ un système de d champs de vecteurs à coefficients bornés, continûment différentiables et à coefficients dans $\mathbb{C}^d$. Soient $(a_{j,k})_{1\leq k\leq d}$ les coefficients de L_j, de sorte que $L_j = \sum_k a_{i,k}(\partial/\partial x_k)$. On suppose que les champs L_j commutent deux à deux, et que la matrice $((a_{j,k}))$ possède un inverse $B = ((b_{j,k}))$ uniformément bornée et se factorisant sous la forme $B = (I + iU)V$, où U et V sont des matrices réelles, et $\|U\| \leqslant \eta$ pour un certain $\eta \in]0, 1[$. Alors, pour tout $\alpha \in]\eta^2, 1[$, on a un calcul fonctionnel $m \xrightarrow{\phi} m\left(\frac{1}{i}L_1, \ldots, \frac{1}{i}L_d\right)$, défini sur H_α, et à valeurs dans les opérateurs bornés sur $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Nous allons montrer que, sous les hypothèses du théorème, les L_j proviennent d'une application lipschitzienne $v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$, telle que $J_v \in \mathfrak{U}_{\gamma,\epsilon}$. Par calcul fonctionnel, nous entendons une fonction ϕ, qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) ci-dessus. Le Théorème 7 sera donc une conséquence de ce qui a éte dit plus haut et du lemme suivant.

Lemme 8.2. *Si les L_j sont comme dans le Théorème 7, il existe $v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$, de classe C^2, et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout $\gamma > \eta^2$, $J_v \in \mathfrak{U}_{\gamma,\epsilon}$ et $J_v^{-1}(x) = ((a_{j,k}(x)))$ pour tout x.*

Monstrons d'abord qu'il existe $v: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^d$ tel que $J_v^{-1} = ((a_{j,k}))$. Soit $((b_{j,k})) = ((a_{j,k}))^{-1}$. Pour conclure que $((b_{j,k}))$ est une matrice jacobienne, il nous faut montrer que $(\partial b_{j,k}/\partial x_l) = (\partial b_{l,k}/x_j)$ pour tous j, k, l.

Les relations $L_iL_j = L_jL_i$ entraînent, en identifiant les coefficients $\partial/\partial x_l$ dans les produits L_iL_j et L_jL_i, que $L_ia_{j,l} = L_ja_{i,l}$ pour tous i, j, l. Autrement dit,

$$\sum_m a_{i,m}\frac{\partial}{\partial x_m}a_{j,l} = \sum_n a_{j,n}\frac{\partial}{\partial x_n}a_{i,l}.$$

On considère ces égalités (pour $i = 1, \dots, d$ et (j, l) fixé) comme un système d'équations en les $(\partial/\partial x_m)a_{j,l}$, que l'on résoud en inversant la matrice $((a_{i,m}))$. On obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_m}a_{j,l} = \sum_i b_{m,i}\sum_n a_{j,n}\frac{\partial}{\partial x_n}a_{i,l},$$

pour tous m, j, l.

On résoud maintenant les équations

$$\sum_n a_{j,n}\left(\sum_i b_{m,i}\frac{\partial}{\partial x_n}a_{i,l}\right) = \frac{\partial}{\partial x_m}a_{j,l}$$

pour $1 \leqslant j \leqslant n$ en inversant la matrice $((a_{j,n}))$. On obtient

$$\sum_i b_{m,i}\frac{\partial}{\partial x_n}a_{i,l} = \sum_j b_{n,j}\frac{\partial}{\partial x_m}a_{j,l}$$

pour tous m, n, l.

Comme $\sum_i b_{m,i}a_{i,l}$ et $\sum_j b_{n,j}a_{j,l}$ sont constants, on obtient

$$-\sum_i\left(\frac{\partial}{\partial x_m}b_{m,i}\right)a_{i,l} = -\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial x_m}b_{n,j}\right)a_{j,l}$$

pour tous m, n, l. La matrice $((a_{i,l}))$ étant inversible, cela entraîne que $(\partial/\partial x_n)b_{m,j} = (\partial/\partial x_m)b_{n,j}$ pour touts j, m, et b. Donc la matrice $((b_{j,k}))$ est bien, localement la matrice jacobienne d'une fonction v. Par simple connexité, on peut trouver une fonction v de classe C^2 telle que $((b_{j,k})) = J_v$.

Il nous reste à montrer que l'on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $J_v \in \mathfrak{U}_{\gamma,\epsilon}$ pour tout $\gamma \in]\eta^2, \alpha[$. Par hypothèse, on peut écrire $J_v = (I + iU)V$, où $V = \operatorname{Re} J_v$ est une matrice bornée ainsi que son inverse.

Lemme 8.3. *L'application $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui à x associe $h(x) = \operatorname{Re} v(x)$ est un difféomorphisme bi-lipschitzien de $\mathbb{R}^d$.*

Admettons que nous ayons démontré le lemme. La matrice jacobienne de l'application qui à x associe $\operatorname{Im} v(h^{-1}(x))$ est $UV(h^{-1}(x))V^{-1}(h^{-1}(x)) = U(h^{-1}(x))$. Par conséquent,

$$\sum_i |\operatorname{Im} v_i(h^{-1}(x) - \operatorname{Im} v_i(h^{-1}(y))|^2 \leqslant \eta^2 \sum_i |x_i - y_i|^2$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On en déduit en composant avec h que

$$\sum_i |\operatorname{Im} v_i(s) - \operatorname{Im} v_i(t)|^2 \leqslant \eta^2 \sum_i |\operatorname{Re} v_i(s) - \operatorname{Re} v_i(t)|^2$$

pour s, $t \in \mathbb{R}^d$. Comme $h = \operatorname{Re} v$ est bi-lipschitzienne, il s'ensuit que J_v est dans $\mathfrak{U}_{\gamma, \epsilon}$ pour tout $\gamma \in]\eta^2, \alpha[$ et un certain $\epsilon > 0$.

La démonstration du Lemme 8.3 nous a été communiquée par J. C. Sikorav. L'application h est, localement, un difféomorphisme bi-lipschitzien car $V = J_h$ est borné ainsi que son inverse. Nous devons montrer que le résultat global en découle. Soit $\gamma: [0, 1] \to \mathbb{R}^d$ un arc rectifiable tel que $\gamma(0)$ soit dans $h(\mathbb{R}^d)$. Montrons qu'il existe un arc rectifiable $\tilde{\gamma}: [0, 1] \to \mathbb{R}^d$, tel que $\gamma(t) = h(\tilde{\gamma} t))$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. En effet, si l'on peut trouver une arc continu $\tilde{\gamma}$, défini sur $[0, t_0[$ pour un $t_0 < 1$, et tel que $\gamma(t) = h(\tilde{\gamma}(t))$ pour $t < t_0$, alors $\tilde{\gamma}$ est rectifiable, et sa longueur d'arc est inférieure à une constante fois la longueur de l'arc γ. Par conséquent, $\lim_{t \to t_0} \tilde{\gamma}(t)$ existe, et le résultat local permet de prolonger $\tilde{\gamma}$ à un intervalle $[0, t_0 + \epsilon]$. Par compacité, on peut définir $\tilde{\gamma}$ sur $[0, 1]$. De plus, l'arc $\tilde{\gamma}$ est une fonction continue de γ si, par exemple, $\gamma(0)$ et $\tilde{\gamma}(0)$ sont deux points fixes. On en déduit que h est surjective. De plus, si h n'était pas injective, on pourrait trouver un arc de $\mathbb{R}^d$, joignant deux points distincts A et B, dont l'image par h soit une boucle. En déformant cette boucle en un point, et en choisissant un relèvement de chaque boucle intermédiaire qui joigne A et B, on obtiendrait des arcs joignant A et B, et dont la longueaur tendrait vers 0. Donc, h est bijective, et comme l'image d'un arc est un arc de longueur comparable, il s'ensuit que h est bi-lipschitzienne.

Signalons pour conclure que l'hypothèse faite dans le Théorème 6 sur la matrice $((a_{j,k}))$, qui est invariante par changement de varible bi-lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, est vérifié automatiquement dès que $\|I - ((a_{j,k}))\| < \eta'$ pour un $\eta' < \frac{1}{3}$. En effect, dans ce cas $\|I - ((b_{j,k}))\| < \eta''$ avec $\eta'' < \frac{1}{2}$, d'où il découle que $\|((\operatorname{Im} b_{j,k}))\| < \eta''$ et $\|((\operatorname{Re} b_{jk}))^{-1}\| < 1/(1 - \eta'')$. ce qui entraîne l'inégalité $\|\mathfrak{U}\| \leqslant \eta$ avec $\eta = \eta''/(1 - \eta'') < 1$.

9. Applications a l'interpolation

La démonstration du Théorème $T1$ dans le cas où $T1 = {}^tT1 = 0$ esquissée au paragraphe 2 montre le lien entre les critères généraux de continuité sur L^2

d'opérateurs d'intégrale singulière et l'interpolation. Un autre exemple de ce lien est donné par le théorème suivant, démontré par P. G. Lemarié.

Pour $0 < s < d/2$, on note B^s l'espace de Sobolev d'exposant s, c'est-à-dire le complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|f\|_{B^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi\right)^{1/2}$.

Théorème 8 [L2] [M]. *Soit $T = C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^d)'$ un opérateur linéaire faiblement borné, associé à un noyau K vérifiant* (1.1) *et*

$$|K(x,y) - K(x',y)| \leqslant \frac{C|x'-x|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}} \tag{9.1}$$

pour $|x'-x| < |x-y|/2$. Si de plus $T1 = 0$, alors T s'étend en un opérateur continu sur B pour $0 < s < \delta$.

Nous noterons dans la suite $[X, Y]_\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, les espaces d'interpolation complexe entre deux espaces X et Y.

Le Théorème $T1$, dans le cas où $T1 = {}^tT1 = 0$, se déduit du Théorème 8 par dualité et interpolation, en utilisant le fait que L^2 est l'espace d'interpolation complexe $[B^s, (B^s)')]_{1/2}$.

Le Théorème de McIntosh et Meyer cité au paragraphe 2 a été démontré de la même manière, à ceci près qu'on a besoin d'un résultat d'interpolation plus difficile, à savoir que $L^2 = [bB^s, (B^s)']_{1/2}$, où b est une fonction accrétive [CMM1], [KM].

Réciproquement, on peut utiliser la démonstration du Théorème Tb pour prouver des résultats d'interpolation. En aprticulier, nous verrons que si b est para-accrétive, $[bB^s, (B^s)']_{1/2} = L^2$. Nous verrons également que la para-accrétivité est une condition nécesaire pour que ce résultat d'interpolation ait lieu. Ceci suggère que l'intérêt de cette classe de fonctions existe peut-être indépendamment de la théorie des intégrales singulières.

Rappelons maintenant la définition des espaces de Sobolev L^p_α. Soit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la classe Schwartz. Pour $\alpha > 0$, Δ^α est défini sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\Delta^\alpha f(\xi) = |\xi|^{2\alpha} f(\xi)$.

La définition de $\Delta^{-\alpha}$ nécessite quelques précautions. On choisit l'entier $k = 2\alpha - 1$ pour 2α entier, et $k = [2\alpha]$ autrement. Soit $\mathcal{P}_k$ l'espace vectorial des polynômes de degré $\leqslant k$, et soit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_k &= \left\{ f \in \mathcal{S}, \int \hat{f}(x) x^\beta \, dx = 0 \quad \text{pour tout multi-indice } \beta \text{ tel que } |\beta| \leqslant k \right\} \\ &= \{ f \in \mathcal{S}, D^\beta f(0) = 0 \quad \text{pour tout } \beta \text{ tel que } |\beta| \leqslant k \}. \end{aligned}$$

L'operateur $\Delta^{-\alpha}$ peut être défini sur $\mathcal{S}_k$, et $\Delta^{-\alpha}(\mathcal{S}_k)$ est composé de fonctions C^∞ qui décroissent à l'infini comme $|x|^{-d-(k+1)+2\alpha}$, donc au moins comme $|x|^{-d}$. Par dualité, on peut définit $\Delta^{-\alpha}$ de $L^1((1+|x|)^{-d} dx)$ dans $(\mathcal{S}_k)' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)/\mathcal{P}_k$. en particulier, on peut définir $\Delta^{-\alpha}$ sur L^p, $1 < p < +\infty$.

Si $1 < p < +\infty$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev L^p_α par $L^p_\alpha = \Delta^{-\alpha/2} L^p$. Notons que, lorsque $\alpha > 0$, L^p_α est un espace de distributions définies modulo des polynômes.

Les propriétés d'interpolation des L^p_α sont classiques. Nous voulons savoir si elles restent vraies lorsqu'on perturbe les espaces de Sobolev à l'aide de fonctions bornées.

Soit $b \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $1/b$ soit aussi bornée. On définit des espaces X^p_α par

$$X^p_\alpha = bL^p_\alpha \quad \text{si} \quad \alpha > 0 \tag{9.2}$$

et

$$X^p_\alpha = L^p_\alpha \quad \text{si} \quad \alpha < 0.$$

Quand $\alpha > 0$, X^p_α est défini modulo $b\,\mathcal{P}_k$, où $k = \alpha - 1$ si α est entier et $k = [\alpha]$ autrement. Notons aussi que $X^p_\alpha = b\Delta^{-\alpha/2}L^p$ pour $\alpha \geqslant 0$ et $X^p_\alpha = \Delta^{-\alpha/2}bL^p$ pour $\alpha < 0$. On peut se demander à quelle condition sur b l'espace d'interpolation complexe entre deux X^p_α est un X^p_α. Le théorème suivant permet de répondre à cette question.

Théorème 9. *On se donne $b \in L^\infty_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^d)$, telle que $1/b$ soit aussi bornée. Pour $1 < p_0, p_1 < +\infty, \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ et $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, on définit p et α par*

$$\frac{1}{p} = (1-\theta)\frac{1}{p_0} + \theta\frac{1}{p_1} \quad \textit{et} \quad \alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1. \tag{9.3}$$

Si b est para-accrétive, alors, pour tous les choix de p_0, p_1, α_0, α_1, et θ,

$$[X^{p_0}_{\alpha_0}, X^{p_1}_{\alpha_1}]_\theta = X^p_\alpha, \quad \textit{avec équivalence de normes.} \tag{9.4}$$

Réciproquement, s'il existe p_0, p_1, α_0, α_1 avec $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_1 < 0$ tels que (9.4) *soit satisfaite pour tout $\theta \in [0, 1]$, alors b est para-accrétive.*

Nous nous contentons d'esquisser la démonstration du Théorème 9 (on peut trouver une démonstration plus précise dans [DJS]).

Le théorème est classique lorsque $b = 1$, et (9.4) découle du cas classique lorsque α_0 et α_1 ont le même signe. Le théorème de réitération de T. Wolff [W] nous permet alors de nous restreindre au cas où α_0 et α_1 sont petits et de signes opposés.

L'idée de la démonstration de la partie directe est, comme dans le cas classique, de prouver l'équivalence de la norme de X^p_α avec la norme L^p d'une sorte de fonction d'aire, ce qui permet de réduire l'interpolation des X^p_α à celle des L^p à valeurs vectorielles.

Les fonctions d'aires, au lieu d'être construites à l'aide de l'opérateur de convolution par une fonction ψ_t de moyenne nulle, seront construites à l'aide des opérateurs Δ_k définis au paragraphe 3 (après l'énoncé de la Proposition 2). Les estimations importantes sont les suivantes:

$$\left\| \left\{ \sum_k |\Delta_k f(x)|^2 2^{2\alpha k} \right\}^{1/2} \right\|_{L^p} \leqslant C_{\alpha,p} \| f \|_{X^p_\alpha}; \tag{9.5}$$

(9.6) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} M_b \Delta_k M_b \Delta_k^N - I$ tend vers 0 en norme d'opérateur sur X^p_α quand $N \to +\infty$, où l'on a noté $\Delta_k^N = \sum_{j=-N}^{N} \Delta_{k+j}$;

$$\frac{1}{C_{\alpha,p}} \| f \|_{X^p_\alpha} \leqslant \left\| \left\{ \sum_k |\Delta_k f(x)|^2 2^{2\alpha k} \right\}^{1/2} \right\|_{L^p}. \tag{9.7}$$

La démonstration de (9.5), (9.6) et (9.7) est un peu fastidieuse, et nous la passons sous silence. Le cas important est celui où $\alpha = 0$ et $p = 2$, où (9.5) et (9.6) découlent facilement des estimations prouvées aux paragraphes 2 et 4; on en déduit (9.5) et (9.6) dans le cas $\alpha = 0$, $1 < p < +\infty$, puis dans le cas général, en utilisant des arguments d'opérateurs de Calderón-Zygmund à valeurs vectorielles. L'estimation (9.7) est alors une conséquence facile de (9.5) et (9.6) par un argument de dualité.

On note A^p_α l'espace des fonctions mesurables $F(x, k)$, définies sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}$, et telles que $\left\{ \sum |F(x, k)|^2 2^{2\alpha k} \right\}^{1/2}$ soit dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. On montre sans peine que $[A^{p_0}_{\alpha_0}, A^{p_1}_{\alpha_1}]_\theta = A^p_\alpha$, ce qui va nous permettre de déduire (9.4) de (9.5), (9.6) et (9.7).

En effet, on peut définir ϕ par

$$F(x, k) \xrightarrow{\phi} f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} M_b \Delta_k F(\cdot, k)(x).$$

Comme (9.6) implique que $\sum_k M_b \Delta_k M_b \Delta_k^N$ est inversible sur les X^p_α pour N assez grand et (9.5) implique que $F(x, k) = M_b \Delta_k^N f \in A^p_\alpha$ quand $f \in L^p_\alpha$, on en déduit que ϕ envoie les A^p_α surjectivement dans les X^p_α. Par interpolation, ϕ envoie $[A^{p_0}_{\alpha_0}, A^{p_1}_{\alpha_1}]_\theta = A^p_\alpha$ dans $[X^{p_0}_{\alpha_0}, X^{p_1}_{\alpha_1}]_\theta$, qui contient dont X^p_α.

D'autre part, l'application ψ définie par $f(x) \xrightarrow{\psi} F(x, k) = \Delta_k f(x)$ envoie les X^p_α dans les A^p_α à cause de (9.5), et par conséquent envoie $[X^{p_0}_{\alpha_0}, X^{p_1}_{\alpha_1}]_\theta$ dans $[A^{p_0}_{\alpha_0}, A^{p_1}_{\alpha_1}]_\theta = A^p_\theta$. Soit $f \in [X^{p_0}_{\alpha_0}, X^{p_1}_{\alpha_1}]$; f est dans la somme $X^{p_0}_{\alpha_0} + X^{p_1}_{\alpha_1}$, et de plus $\Delta_k f$ est dans A^p_α. De même $F(x, k) = M_b \Delta_k^N f(x)$ est dans A^p_α et $\phi(F) = \sum_k M_b \Delta_k M_b \Delta_k^N f$ est dans X^p_α, où l'on a choisi N assez grand pour que $\sum_k M_b \Delta_k M_b \Delta_b^N$ soit inversible sur $X^{p_0}_{\alpha_0} + X^{p_1}_{\alpha_1}$ et sur X^p_α. On en déduit que f est dans X^p_α, et donc que $[X^{p_0}_{\alpha_0}, X^{p_1}_{\alpha_1}] \subset X^p_\theta$, ce qui termine la démonstration de la partie directe.

Pour la partie réciproque, on commence par utiliser le théorème de réitération classique pour se réduire au cas où $\alpha_0 > 0 > \alpha_1$ sont tous deux très petits en valeur absolue, ce qui permet de ne pas avoir à définir $X^{p_1}_{\alpha_1}$ modulo des polynômes. Si b n'est pas para-accrétive, on choisit θ tel que α soit 0 (de sorte que $A^p_\alpha = L^p$), et on construit des opérateurs K qui envoient $X^{p_i}_{\alpha_i}$ dans $A^{p_i}_{\alpha_i}$ pour $i = 0$, 1, mais ont une norme aussi grande qu'on veut de X^p_α dans A^p_α. Nous n'entrons pas dans les détails.

Bibliographie

[A] Aguirre, J. Multilinear pseudo-differential operators and paraproducts, Ph. D Thesis, *Washington University*, (1981).

[BDS] Brackx, F., Delanghe, R., et Sommen, F. Clifford analysis, Pitman, (1982).

[C1] Calderón, A. P. Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **53** (1965), 1092-1099.

[C2] Calderón, A. P. Cauchy integrals of Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **74** (1977), 1324-1327.

[CDM] Coifman, R. R., David, G. et Meyer, Y. La solution des conjectures de Calderón, *Adv. in Math.*, **48** (1983), 144-148.

[C De M] Coifman, R. R., Deng, P. G. et Meyer, Y. Domaine de la racine carrée de certains opérateurs différentiels accrétifs, *Ann. Inst. Fourier 33,* **2** (1983), 123-134.

[CMM1] Coifman, R. R., McIntosh, A. et Meyer, Y. L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, *Ann. of Math.*, **116** (1982), 361-388.

[CMM2] Coifman, R. R., McIntosh, A. et Meyer Y. The Hilbert transform on Lipschitz curves, *Proc. of the Centre for Mathematical Analysis, Miniconference on P.D.E.'s*, Canberra, July 9-10, 1981.

[CM1] Coifman, R. R. et Meyer Y. Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57, S.M.F. (1978).

[CM2] Coifman, R. R. et Meyer, Y. Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderón's theorem, and analysis on Lipschitz curves, *Lect. Notes in Math., Springer-Verlag,* **779** (1979), 109-122.

[CW1] Coifman, R. R. et Weiss, G. Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes, *Lect. Notes in Math., Springer Verlag,* **242** (1971).

[CW2] Coifman, R. R. et Weiss, G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **83** (1977), 569-645.

[CZ] Calderón, A. P. et Zygmund, A. On the existence of certain singular integrals, *Acta Math.,* **88** (1952), 85-139.

[DJ] David, G. et Journé, J. L. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators, *Annals of Math.,* **120** (1984), 371-397.

[DJS] David, G., Journé, J. L. et Semmes, S. Calderón-Zygmund operators, para-accretive functions, and interpolation, preprint.

[FJK] Fabes, E., Jerison, D. et Kenig, C. Multilinear Littlewood-Paley estimates with applications to partial differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **79** (1982), 5746-5750.

[FS] Fefferman, C. et Stein, E. H^p-spaces of several variables, *Acta Math.*, **129** (1972), 137-193.

[JN] John, F. et Nirenberg, L. On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 415-426.

[J1] Journé, J. L. Thèse de 3ème cycle, Orsay n.° 2955 (1981).

[J2] Journé, J. L. Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators, and the Cauchy integral of Calderon, *Lect. Notes in Math., Springer-Verlag*, **994** (1983).

[KM] Kenig, C. et Meyer, Y. Kato's square roots of accretive operators and Cauchy kernels on Lipschitz curves are the same, Mittag-Leffler report n.° 4, (1983).

[KS] Knapp, A. W. et Stein, E. M. Intertwining opeators on semi-simple Lie groups, *Ann. Math.*, **93** (1971), 489-578.

[L1] Lemarié, P. G. Algèbres d'opérateurs et semi-groupes de Poisson sur un espace de nature homogène. Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1984.

[L2] Lemarié, P. G. Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières, à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier.*

[MS1] Macias, R. A. et Segovia, C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous teype, *Adv. in Math.*, **33** (1979), 257-270.

[MS2] Macias, R. A. et Segovia, C. A decomposition into atoms of distributions on spaces of homogeneous type, *Adv. in Math.*, **33** (1979), 271-309.

[MM] McIntosh, A. et Meyer, Y. Algèbre d'opérateurs définis par des intégrales singulières, à paraître dans les *C. R. Acad. Sci. Paris.*

[M] Meyer, Y. Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund, à paraître aux Actes du Colloque Schwartz, Astérisque.

[Mu] Murray, M. A. Ph. D Thesis, *Yale University*, (1983).

[P] Peetre, J. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, *Ann. Math. Pura Appl.*, **72** (1966), 295-304.

[S] Stein, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions, *Princeton University Press*, 1970.

[W] Wolff, T. A note on interpolation spaces, *Lect. Notes in Math.*, **908** (1981), 199-204. Harmonic analysis (edited by F. Ricci and G. Weiss), *Springer-Verlag.*

Guy David
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau CEDEX France

Jean-Lin Journé
Université de Strasbourg
I.R.M.A.
7 Rue Descartes
67 Strasbourg, France

Stephen Semmes
Yale University Box 2155
New Haven, CT 06520
U.S.A.