SOBRE LAS SECCIONES HIPERPLANAS DE UN CONJUNTO ALGEBRAICO REAL

por

TOMAS J. RECIO MUÑIZ y VICTOR M. ESPINO SANTANA

En esta nota abordamos tres aspectos de las secciones hiperplanas de un conjunto algebraico real irreducible $V \subseteq R^n$. Si J (V) es el ideal de este conjunto en el anillo de polinomios $R[x_1, ..., x_n]$ y $\Gamma[V]$, es el anillo cociente, tratamos en primer lugar de relacionar el grado de trascendencia del cuerpo de fracciones de $\Gamma[V]$ con el número máximo de eslabones de las cadenas de ideales primos *reales* que contienen a J (V). La igualdad de estos dos números es un hecho bien conocido (cf. Galbiati-Tognoli | 1 |) pero creemos de interés el ofrecer una demostración autocontenida, utilizando secciones hiperplanas. En segundo lugar estudiamos, siendo $\lambda_0, ..., \lambda_n$ indeterminadas sobre R, la existencia de la sección genérica hiperplana de V por

$$\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0,$$

sobre un cierre real $\overline{K}$ de

$$K = R(\lambda_0, \ldots, \lambda_n),$$

y las posibilidades de especializar con valores reales la misma.

Por último, determinamos propiedades del conjunto

$$\{ (b) \in R^{n+1} / V \cap \{ b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = 0 \} \neq \phi \},$$

utilizando un teorema de Seidemberg (cf. Lojasiewicz | 1 |) como instrumento básico. En todos los casos el teorema de los ceros de Dubois-Risler (cf. Risler | 1 |) resulta imprescindible.

§ 1. Dimensión real

Recordemos que dado un anillo A y un ideal $\mathfrak{a} \subseteq$ A este ideal se llama *real* si

$$\sum_{i=1}^{m} g_i^2 \in \mathfrak{a}, \quad g_i \in A,$$

implica que $g_i \in \mathfrak{a}$.

Si $V \neq \phi$ es un conjunto algebraico irreducible real, de ideal

$$J(V) \subseteq R[x_1, \ldots, x_n],$$

sea d = grado de trascendencia de la extensión $\Gamma(V) \supseteq R$, donde

$$\Gamma[V] = R[x_1, \ldots, x_n] / J(V), \quad \text{y} \quad \Gamma(V),$$

es el cuerpo de fracciones de $\Gamma[V]$. Sea

$$J(V) = (f_1, \ldots, f_s) \quad R[x_1, \ldots, x_n];$$

y denotemos por $\mathrm{Rang}_p(f_1, \ldots, f_s)$ el rango de la matriz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)$, para puntos $p \in V$; además sea

$$\mathrm{Rang}(J(V)) = \max_{p \in V} \{\mathrm{Rang}_p(f_1, \ldots, f_n)\}.$$

Es fácil probar entonces que se verifica la igualdad

$$d = n - \mathrm{Rang}(J(V))$$

(cf. Brocker | 1 |).

Proposición (cf. Risler | 2 |).—Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de $R[x_1, \ldots, x_n]$ de dimensión d, y tal que $\mathrm{Rang}(\mathfrak{p}) = n - d$ (donde $\mathrm{Rang}(\mathfrak{p})$ se evalúa como arriba, recorriendo los puntos de la variedad real de $\mathfrak{p}$ que suponemos no vacía). Entonces $\mathfrak{p} = J(V(\mathfrak{p}))$.

DEMOSTRACIÓN.—Podemos reducirnos al caso en que el origen de coordenadas $(\mathbf{0}) \in V(\mathfrak{p})$, y además $n - d = \operatorname{Rang} J(\mathfrak{p})(\mathbf{0})$, donde $J(\mathfrak{p})(\mathbf{0})$ es la matriz jacobiana de unos generadores de $\mathfrak{p}$ evaluada en el origen.

Sea $(R[\mathbf{x}]/\mathfrak{p})_{(\mathbf{0})}$ el anillo local correspondiente a dicho punto. La hipótesis sobre el rango implica que este anillo es local regular de dimensión d. Por tanto $\mathfrak{p}\, R[\mathbf{x}]_{(\mathbf{0})}$ está generado por $t_1, \ldots, t_{n-d}$ elementos de $\mathfrak{p}$ tales que su rango en el origen

$$\operatorname{Rang}_{(0)}(t_1, \ldots, t_{n-d}) = n - d.$$

Sea $f \in J(V(\mathfrak{p}))$; por el teorema de Dubois-Risler existen

$$\psi_1, \ldots, \psi_p \in R[\mathbf{x}] \quad \text{y} \quad r \in N,$$

tales que

$$f^{2r} + \sum_{i=1}^{p} \psi_i^2 \in \mathfrak{p},$$

y por tanto

$$f^{2r} + \sum_{i=1}^{p} \psi_i^2 = \sum_{j=1}^{n-d} \alpha_j t_j, \quad \alpha_j \in R[\mathbf{x}]_{(0)}.$$

Ahora es fácil ver que

$$(t_1, \ldots, t_{n-d}) \quad R[\mathbf{x}]_{(0)},$$

es un ideal real (pues se reduce, por ser $t_1, \ldots, t_{n-d}$ parte de un sistema regular de parámetros de $R[\mathbf{x}]_{(\mathbf{0})}$, a demostrar la realidad del ideal

$$(z_1, \ldots, z_{n-d}) \quad R[[z_1, \ldots, z_{n-d}]],$$

lo que es trivial).

Así

$$f \in (t_1, \ldots, t_{n-d}) \quad R[\mathbf{x}]_{(0)} = \mathfrak{p} \quad R[\mathbf{x}]_{(0)},$$

y por tanto

$$f \in \mathfrak{p} \quad R[\mathbf{x}]_{(0)} \cap R[\mathbf{x}] = \mathfrak{p}\ .$$

c. q. d.

PROPOSICIÓN.—Sea $V \subseteq R^n$ un conjunto algebraico real irreducible y no vacío de dimensión d. Existe entonces una subvariedad real de V de dimensión $d - 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea J (V) el ideal de V en $R[x_1, \ldots, x_n]$, y supongamos que el origen $(\mathbf{0}) \in V$ es un punto regular de V (es decir, de rango $n - d$); como arriba, sean $t_1, \ldots, t_{n-d}$ elementos de J (V) de rango $n - d$ en $(\mathbf{0})$ que generan J (V) $R[\mathbf{x}]_{(0)}$.

Consideremos una ecuación $h = 0$ de una hipersuperficie tal que el jacobiano de $t_1, \ldots, t_{n-d}, h$ en $(\mathbf{0})$ tenga rango $n - d + 1$ (en particular tenemos un hiperplano transversal al espacio tangente de V en $(\mathbf{0})$). Ahora los ideales primos minimales del ideal $\mathfrak{p} + (h)$ de $R[\mathbf{x}]$ tienen dimensión $d - 1$. Sean éstos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$, y consideremos que $\mathfrak{p}_1$ es el único primo entre ellos que pasa por el origen. Como siempre:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{p}_1) \leq n - (d - 1) = d + 1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{p}_1 \supseteq (t_1, \ldots, t_{n-d}, h),$$

luego se sigue que

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{p}_1) = n - d + 1,$$

y el origen es regular para V $(\mathfrak{p}_1)$; por la proposición anterior concluimos que J (V $(\mathfrak{p}_1)$) $= \mathfrak{p}_1$ y V $(\mathfrak{p}_1)$, es una subvariedad de dimensión $d - 1$, c. q. d.

COROLARIO.—Sea $V \subseteq R^n$ conjunto algebraico irreducible real de dimensión d. Entonces existen cadenas de ideales primos reales de la forma

$$R[\mathbf{x}] \underset{+}{\supset} \mathfrak{p}_0 \underset{+}{\supset} \cdots \underset{+}{\supset} \mathfrak{p}_d = \mathrm{J}\ \mathrm{V}),$$

y no existe ninguna con mayor número de elementos.

NOTA.—Si $\mathfrak{p}$ es el ideal primo real de un conjunto algebraico real irreducible y $h = 0$ la ecuación de una hipersuperficie real (y por tanto el ideal (h) es real), el ideal suma $\mathfrak{p} + (h)$ no tiene por qué tener primos asociados reales. Así por ejemplo

$$((x^2 - z\,y^2) + (z + \alpha)) \quad R\,[x, y, z],$$

con $\alpha > 0$, puesto que

$$(x^2 - z\,y^2\,,\; z + \alpha) = (x^2 + \alpha\,y^2\,,\; z + \alpha)\,.$$

Esta anomalía motiva que en lo expuesto anteriormente sea necesario escoger una sección de V por una hipersuperficie $h = 0$ adecuadamente elegida de manera que el radical de J (V) + (h) tenga algún primo real.

§ 2. LA SECCIÓN HIPERPLANA GENÉRICA

Sea $V \subseteq R^n$ un conjunto algebraico real irreducible de dimensión $d \geqslant 1$; sea

$$J\,(V) = (F_1\,(\mathbf{x})\,,\, \ldots,\, F_r\,(\mathbf{x})) \quad R\,[\mathbf{x}]\,.$$

Sean $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ elementos algebraicamente independientes sobre R $(\mathbf{x})$ y consideremos el cuerpo

$$R\,(\lambda_0\,, \ldots, \lambda_n) = R\,(\boldsymbol{\lambda}) = K,$$

y el anillo de polinomios K $[\mathbf{x}]$. Sea

$$H = J\,(V)\;K\,[\mathbf{x}] + (\lambda_0 + \lambda_1\,x_1 + \ldots + \lambda_n\,x_n)\;K\,[\mathbf{x}]\,.$$

PROPOSICIÓN.—H es un ideal propio, primo y real de K $[\mathbf{x}]$, de dimensión $d - 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Sean

$$t_i\,(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) \in K\,[\mathbf{x}], \quad 1 \leq i \leq m,$$

tales que $\sum_{i=1}^{m} t_i^2 \in \mathrm{H}$, es decir

$$\sum_{i=1}^{m} t_i^2 = \Sigma\, p_j\, \mathrm{F}_j + q\,(\lambda_0 + \lambda_1\, x_1 + \ldots + \lambda_n\, x_n).$$

Multiplicando por un polinomio en λ adecuado, podemos reducirnos a suponer que $t_i, p_j, q \in \mathrm{R}\,[\lambda, \mathbf{x}]$. Más aún, dividiendo cada t_i por $\lambda_0 + \ldots + \lambda_n\, x_m$ tomando λ_0 como indeterminada, consideremos que $\delta_{\lambda_0}\,(t_i) = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces para cada $(\mathbf{a}) \in \mathrm{V} \subseteq \mathrm{R}^m$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{m} t_i^2\,(\lambda, \mathbf{a}) = q\,(\lambda, \mathbf{a})\,(\lambda_0 + \lambda_1\, a_1 + \ldots + \lambda_n\, a_n),$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{m} t_i^2\,(\lambda, \mathbf{a}) = 0.$$

Considerando

$$\sum_{i=1}^{m} t_i^2\,(\lambda, \mathbf{x}),$$

como un polinomio en λ con coeficientes en $\mathrm{R}\,[\mathbf{x}]$, observamos que para todo $(\mathbf{a}) \in \mathrm{V}$ todos los coeficientes se anulan. Luego

$$\sum_{i=1}^{m} t_i^2\,(\lambda, \mathbf{x}) \in \mathrm{J}\,(\mathrm{V}) \quad \mathrm{R}\,[\lambda, \mathbf{x}].$$

Como este ideal es real según se comprueba fácilmente, deducimos que para todo

$$i = 1, 2, \ldots, m, \qquad t_i\,(\lambda, \mathbf{x}) \in \mathrm{J}\,(\mathrm{V}) \quad \mathrm{R}\,[\lambda, \mathbf{x}].$$

Así H es real.

Para demostrar que H es primo podemos, como arriba, reducirnos a considerar el caso de un producto

$$q(\lambda, \mathbf{x}) \cdot s(\lambda, \mathbf{x}) = \Sigma \quad p_j \, F_j + m(\lambda_0 + \ldots + \lambda_n x_n),$$

donde

$$p_j, m, q, s \in \quad R[\lambda, \mathbf{x}],$$

y donde q, s no poseen términos en λ_0. Entonces

$$q(\lambda, \mathbf{a}) \, s(\lambda, \mathbf{a}) = 0,$$

para todo $(\mathbf{a}) \in V$ y por tanto

$$q(\lambda, \mathbf{x}) \, s(\lambda, \mathbf{x}) \in J(V) \quad R[\lambda, \mathbf{x}].$$

Como este ideal es primo se sigue que q ó s pertenece a $J(V) \, R[\lambda, \mathbf{x}]$ y en particular a H.

Veamos por último que H es propio. En efecto, si

$$1 = \Sigma \quad p_j \, F_j + q(\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n),$$

y reduciéndonos al caso de polinomios mediante multiplicación por un $t(\lambda)$ conveniente, obtenemos

$$t(\lambda) = \Sigma \quad p_j' \, F_j + q' (\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n),$$

con $t, p'_j, q' \in R \mid \lambda, \mathbf{x} \mid$. Ahora, para cada $(\mathbf{a}) \in V$

$$t(\lambda) = q'(\lambda, \mathbf{a}) \ (\lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n),$$

y puesto que $\dim(V) \geqslant 1$, y posee por tanto V infinitos puntos, resulta ser $t(\lambda)$ divisible por infinitos factores irreducibles no asociados o bien $t(\lambda) = 0$. Absurdo.

Se verifica que

$$\dim \ {}^{K[x]}/_{J(V)K[x]} = \dim \ {}^{R[x]}/_{J(V)} = d,$$

de acuerdo con un conocido resultado de álgebra conmutativa (cf. Zariski-Samuel | 1 | Ch. VII, § 11, Th. 35); y por el teorema del ideal principal se sigue que

$$\dim {}^{K[\mathbf{x}]}/_{H} = d - 1, \qquad \text{c. q. d.}$$

PROPOSICIÓN.—Existe un cuerpo $\overline{K} \supseteq K$ realmente cerrado tal que $V_{\overline{K}}(H) \subseteq (\overline{K})^n$ es un conjunto algebraico no vacío irreducible y de dimensión $d - 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Por ser $H \subseteq K[\mathbf{x}]$ un ideal primo real, el cuerpo F de fracciones del anillo cociente $K[\mathbf{x}]/H$ es ordenable y por tanto F induce en $K = R(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ un orden (para cada orden elegido en F).

Sea $\overline{K}$ el cierre real correspondiente a dicho orden (fijado a través de F) de K.

Sea $g \in K[\mathbf{x}]$, tal que $g(f) = 0$ para todo f de $V_{\overline{K}}(H)$. Entonces (cf. Weispfenning | 1 | Th. 5.1) existen $h \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ números naturales, $0 < p_i \in K$, $j_i \in K[\mathbf{x}]$ tales que

$$g^{2h} + \sum_i p_i j_i^2 \in H.$$

Esto significa que en F se tiene (tomando clases módulo H)

$$\bar{g}^{2h} + \sum_i p_i \bar{j}_i^2 = 0,$$

donde $p_i \in K$ se identifica con el correspondiente elemento de F. Por ser F extensión ordenada de K, se sigue que en particular: $\bar{g} = \bar{0}$, o lo que es lo mismo $g \in H$. Así pues, $J(V_{\overline{K}}(H)) = H$ y la proposición se sigue de la anterior, c. q. d.

NOTA.—1. Se demuestra fácilmente que

$$J(V_{\overline{K}}(J(V)) = J(V)\,\overline{K}[\mathbf{x}],$$

y por tanto que $V_{\overline{K}}(J(V))$ es una variedad irreducible de dimensión d. Asimismo se verifica que

$$V_{\overline{K}}(H) \subsetneq V_{\overline{K}}(J(V)).$$

2. El concepto de irreducibilidad al que se refiere arriba es, naturalmente, la K-irreducibilidad. Así para

$$V = \{(x, y) \varepsilon R^2 / x^2 + y^2 = 1\},$$

la sección plana genérica $V_{\bar{K}}$ (H) puede construirse sobre cualquier cierre real K de $K = R(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, que corresponda a un orden de K donde

$$1 - \frac{\lambda^2_0}{\lambda^2_1} + \frac{\lambda^2_2}{\lambda^2_1} \geq 0,$$

y está formada por dos puntos de $\overline{K}$ (que forman un conjunto algebraico K-irreducible).

Dado

$$(a) = (a_0, \ldots, a_n) \varepsilon R^{n+1},$$

consideremos el homomorfismo de especialización

$$\begin{array}{ccc} R[\lambda_0, \ldots, \lambda_n] & \xrightarrow{P_a} & R \\ \lambda_0 & \longrightarrow & a_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \longrightarrow & a_n \end{array}$$

y su extensión, que denominaremos también P_a a un lugar del cuerpo $K = R(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ con valores en R. Dada una extensión algebraica de K, el teorema de extensión de lugares (cf. Zariski-Samuel | 1 |, vol. II, Ch. VI, § 4) garantiza la existencia de un lugar, extensión del dado, del nuevo cuerpo con valores en C. Un teorema de Lang (cf. Lang | 1 |), por otra parte, asegura la existencia de un cierre real de K y de un lugar extendiendo el dado y con valores en R, pero sin que sea posible «a priori» determinar el cierre real. Dado que la construcción efectuada de la sección hiperplana genérica presupone la elección previa de un cierre real, el teorema de Lang no sirve para especializar puntos de dicha sección genérica. En este sentido resulta de interés la siguiente:

PROPOSICIÓN.—Sea

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in V_{\overline{K}}(H).$$

Entonces existe un conjunto $U \subseteq R^n$ semialgebraico no vacío (i. e. dado como unión finita de conjuntos de puntos que verifican desigualdades en número finito) tal que para todo $(a_0, \ldots, a_n) \in U$ se tiene:

(i) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ pertenecen al anillo de valoración de una extensión de $P_{\mathbf{a}}$ en $\overline{K}$, y

(ii) $(P_{\mathbf{a}}(\beta_1), \ldots, P_{\mathbf{a}}(\beta_n)) \in R^n$ y es un punto de la sección de $V \subseteq R^n$ por el hiperplano

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $\overline{K}$ es algebraico sobre K, y trabajamos con cuerpos de característica cero, el teorema del elemento primitivo permite reducirnos al caso del cuerpo

$$K(\theta) = K(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

con θ verificando la ecuación

$$z^m + g_1(\lambda) z^{m-1} + \ldots + g_m(\lambda) = 0,$$

con coeficientes en

$$K = R(\lambda_0, \ldots, \lambda_n).$$

Para todos aquellos valores de $(\mathbf{a})$ donde

$$g_1(\lambda), \ldots, g_m(\lambda),$$

estén simultáneamente definidos, tenemos, por la propiedad de los anillos de valoración de ser íntegramente cerrados, que θ pertenece a tales anillos.

Así, en estos casos, podemos considerar $P_{\mathbf{a}}(\theta)$, que será un elemento de $\mathbb{C}$ verificando la ecuación con coeficientes reales

$$z^m + g_1(\mathbf{a}) z^{m-1} + \ldots + g_m(\mathbf{a}) = 0.$$

Sea Ω un cierre algebraico de K, con $\Omega \supseteq \overline{K}$, y sean

$$\theta_1 = \theta, \theta_2, \ldots, \theta_m,$$

las raíces distintas de la ecuación

$$z^m + \ldots + g_m(\lambda) = 0,$$

tales que

$$\theta_1, \ldots, \theta_r \in \overline{K}, \theta_{r+1}, \ldots, \theta_m \in \Omega - \overline{K}.$$

Ahora (cf. Jacobson | 7 |, Ch. VI, § 6, Lema 1) la propiedad de tener r raíces en $\overline{K}$ es racionalmente especializable, esto es, existen

$$\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_k(\lambda) \in K,$$

tal que para cualquier $(\mathbf{a})$ con

$$\psi_1(\mathbf{a}), \ldots, \psi_k(\mathbf{a}),$$

definidas y con los mismos signos que

$$\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_k(\lambda),$$

respectivamente, entonces todos los coeficientes $g_1(\lambda), \ldots, g_m(\lambda)$ están definidos para $(\mathbf{a})$ y la ecuación especializada $z^m + \ldots + g_m(\mathbf{a}) = 0$ tiene r raíces reales precisamente. Es fácil deducir usando el teorema de Artin (cf. Jacobson, loc. cit., Th. 13), que el conjunto de tales $(\mathbf{a})$ constituye un conjunto semialgebraico no vacío y abierto. Concluimos de lo dicho más arriba que, puesto que $P_{\mathbf{a}}(\theta_1), \ldots, P_{\mathbf{a}}(\theta_m)$ son las raíces de la ecuación especializada, alguna de ellas (pues $r \geqslant 1$) será real. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que se trata de $P_{\mathbf{a}}(\theta_1)$. Dado que $K(\beta_1, \ldots, \beta_n) = K(\theta_1)$, escribiendo $\beta_1, \ldots, \beta_n$ en términos de θ_1, obtenemos fácilmente la proposición, c. q. d.

§ 3. El conjunto de secciones hiperplanas no vacías

Dado un conjunto algebraico real $V \subseteq R^n$ irreducible, no vacío y no reducido a un punto estudiamos en este último apartado algunas propiedades del conjunto.

$$T = \{(b_0, \ldots, b_n) \in R^{n+1} / \{b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n = 0\} \cap V \neq \phi\}.$$

Para ello consideramos, de manera análoga a la sección anterior, unas indeterminadas

$$(\lambda) = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n),$$

de manera que $R[\mathbf{x}, \lambda]$ es un anillo de polinomios en $2n + 1$ variables. Sea en este último anillo el ideal

$$H = J(V) \; R[\mathbf{x}, \lambda] + (\lambda_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \; R[\mathbf{x}, \lambda],$$

y sea S el conjunto algebraico de R^{2n+1} dado por H. Si es d la dimensión de V se verifica:

Proposición.—S es un conjunto algebraico irreducible de dimensión $n + d$ y cuyo ideal en $R[\mathbf{x}, \lambda]$ es H.

Demostración.—Análoga a la de la primera proposición del apartado anterior.

Sea ahora

$$\begin{array}{rl} \pi\colon R^{2n+1} & \longrightarrow R^{n+1} \\ (\mathbf{x}, \lambda) & \longrightarrow (\lambda) \end{array}$$

la proyección sobre las (λ) coordenadas. Claramente $\pi(S) = T$. Como consecuencia de un teorema de Seidemberg (cf. Lojasiewicz | 1 |), $\pi(S)$ es un conjunto semialgebraico.

Proposición.—T es denso en la topología de Zariski de R^{n+1}.

Demostración.—Sea $f(\lambda) \in R[\lambda]$ tal que $f(T) = 0$.

Considerando $f(\lambda)$ como elemento de R $[\mathbf{x}, \lambda]$, resulta que $f(\lambda)$ es nulo sobre S y, por tanto, $f(\lambda) \in$ H. Así resulta que $f(\lambda)$ es divisible por

$$\lambda_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n,$$

para todo $(\mathbf{a}) \in$ V. Por tanto $f(\lambda) = 0$, c. q. d.

1. Consideremos

$$V = \{ x^2 + y^2 = 1 \} \subseteq R^2.$$

En este caso

$$T = \{ \lambda^2_2 - \lambda^2_0 + \lambda^2_1 \geq 0 \}.$$

2. Análogamente, si

$$V = \{ x y - 1 = 0 \}, \quad T = \{ \lambda^2_0 - 4 \lambda_2 \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0 \}.$$

NOTA.—1. Observamos que en general T no tiene por qué ser abierto o cerrado (para la topología de Zariski o para la usual de R^{n+1}), ni construible (i. e. localmente cerrado para la topología de Zariski), según muestran los ejemplos anteriores.

2. Se sigue de las propiedades generales de los conjuntos semialgebraicos (cf. Recio | 1 |, | 2 |) que π (S) tiene interior no vacío para la topología usual, e incluso es posible que π (S) contenga un abierto no vacío para la topología de Zariski, como muestra el conjunto

$$T = \{ \lambda_2 = 0, \ \lambda_1 \geq 0, \ \lambda_0 \geq \lambda_1 \} \cup \{ \lambda_2 = 0, \ \lambda_1 \leq 0, \ \lambda_1 \geq \lambda_0 \} \cup \{ \lambda_2 \neq 0 \},$$

correspondiente a

$$V = \{ x^2 + y^2 - x^3 = 0 \}.$$

Departamento de Algebra y Fundamentos
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense (Madrid-3)

BIBLIOGRAFÍA

BRÖCKER, TH. | 1 |: *Differentiable Germs and Catastrophes.* London Math. Soc. Lect. Notes, 17; Cambridge U. P., 1975.

GALBIATI, M. y TOGNOLI, A. | 1 |: *Alcune propieta delle varieta algebriche reale.* «Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa», 27, 1973, págs. 359-404.

JACOBSON, N. | 1 |: *Lectures in Abstract Algebra,* vol. III, GTM, Springer-Verlag, 1975.

LANG, S. | 1 |: *The theory of real places.* «Annals of Math.» (1953), pág. 378-391.

LOJASIEWICZ, S. | 1 |: *Ensembles Semianalytiques.* IHES, 1965.

RECIO, T. | 1 |: *Conjuntos preanalíticos...* Mem. y Monografía de Mat. Instituto «Jorge Juan» de Mat. C. S. I. C., 1977.

— — | 2 |: *Una descomposición de un conjunto semialgebraico.* «Actas IV Reunión de Matemáticos de Expresión Latina», Mallorca, 1977.

ZARISKI-SAMUEL | 1 |: *Commutative Algebra,* vols. I y II, GTM, Springer-Verlag, 1975.

RISLER, J. J. | 1 |: *Le théorème des zéros en Géométriques Algébrique et Analytique Réelles.* «Bull. Soc. Math. France», 104, 1976, páginas 113-127.

— — | 2 |: *Sur l'anneau des fonctions de Nash globales.* «Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.», 4.^{e} série, t. 8, 1975, págs. 365-378.

WEISPFENNING, V. | 1 |: *Two model theoretic proofs of Rückert's Nullstellensatz.* «Trans. Am. Math. Soc.», 203, 1975, págs. 331-342.