LOS RETICULOS DE LAS CLASES DE SCHUNCK NORMALES Y DE LAS CLASES DERIVADAS

por

J. LAFUENTE (1)
Departamento de Algebra y Fundamentos
Universidad de Zaragoza

ABSTRACT

All groups to be considered are finite. The main result of this paper is the following: the normal Schunck classes compose a complete and distributive lattice antiisomorphic to the lattice composed by the Derived classes (s. [5]). It begins with a first section of machinery which establishes that the Derived classes are precisely the classes of groups G such that every simple section of G appartains to a σ-closed class (s. 1.6) of simple groups; therefore the Derived classes are a natural generalization of the classes of π-groups. Finally we study the lattice properties of the normal Schunck classes relative to a class of groups.

En cualquier clase de grupos que se considere supondremos que si un grupo G pertenece a la clase, también pertenece todo grupo isomorfo a G. La nomenclatura utilizada es la usual. Daremos previamente algunos resultados y definiciones. $\mathcal{C}$ y $\mathfrak{D}$ serán clases de grupos y $\mathcal{H}$ un homomorfo.

$$\text{sim}\, \mathcal{C} = \{S \in \mathcal{C} \mid S \text{ es simple}\}$$
$$\mathcal{H}^* = \{G \mid G/N \in \mathcal{H} \text{ implica } G = N\}$$
$$\mathcal{H}' = \{G \mid \forall\, S \leq G, S \in \mathcal{H}^*\} \quad \text{(v, [6] pg. 260)}$$

$\mathcal{H}$ es clase de Schunck normal si todo grupo posee $\mathcal{H}$-envoltura normal; si $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{D}$ y todo $\mathfrak{D}$-grupo posee $\mathcal{H}$-envoltura normal, llama-

(1) Este trabajo es parte de la Tesis Doctoral del autor, leída en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza el 2 de abril de 1977.

mos a $\mathcal{H}$ $\mathcal{D}$-clase de Schunck normal. Si G posee $\mathcal{H}$-envoltura normal, ésta es igual a $G^{\mathcal{H}'}$ y a $G_{\mathcal{H}}$ (1.2 de [5]).

Una clase Derivada es una clase χ tal que existe un homomorfo $\mathcal{H}$ verificando $\mathcal{H}' = \chi$. Equivale a ser χ un homomorfo s-cerrado y extensible; χ^* es clase de Schunck normal y $\chi^{*\prime} = \chi$ (2.3 de [5]).

El operador S que a cada homomorfo le asocia $S(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'^*$ es clausura, y los homomorfos fijados por S son las clases de Schunck normales (2.6 de [5]).

Si $\mathcal{C}$ es $\mathcal{D}$-clase de Schunck normal, $\mathcal{C} = \mathcal{C}'^* \cap \mathcal{D}$ (2.7 de [5]).

$\mathcal{U}$, $\mathcal{S}_\pi$ y $\mathcal{B}_\pi$ representarán respectivamente las clases de todos los grupos, de los π-grupos y de los grupos π-perfectos (esto es, sin factor no trivial π-grupo).

C_n, A_n y S_n serán, respectivamente, el grupo cíclico de orden n, y los grupos alternado y simétrico de grado n.

§ 1. Las clases derivadas definidas mediante un operador clausura

En todo el párrafo, $\mathcal{C}$ será una clase de grupos verificando $1 \in \mathcal{C}$.

1.1. Definición.—Para cada clase $\mathcal{C}$, se define

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \{G \mid \text{si S es sección simple de G, entonces } S \in \mathcal{C}\}.$$

Es de notar que siempre $\langle \mathcal{C} \rangle \neq \varnothing$, pues $1 \in \mathcal{C}$ implica $1 \in \langle \mathcal{C} \rangle$.

1.2. Lema.—Dado un grupo G, y siendo N subgrupo normal de G, si R es sección simple de G, entonces R es sección de N o de G/N.

Demostración.—Sea $S \leqslant G$ y $T \trianglelefteq S$ de forma que $R \cong S/T$. Distinguiremos distintos casos.

1. $N \leqslant T$.

Entonces, S/T es sección de G/N.

2. $N \nleqslant T$, $N \leqslant S$.

$N\,T \trianglelefteq S$ y $T \leqslant N\,T$ implica $T = N\,T$ o $S = N\,T$, ya que S/T es simple. Como $N \nleqslant T$, se sigue que $S = N\,T$, y se tiene:

$$S/T = N\,T/T \cong N/N \cap T$$

Luego $R \cong N/N \cap T$ que es sección de N.

3. $N \not\leqslant S$ y $S \not\leqslant TN$.
Como

$$SN/TN = STN/TN \cong S/S \cap TN$$

y $T \leqslant S \cap TN \trianglelefteq S$, al ser S/T simple y $S \not\leqslant TN$, se tiene que $T = S \cap TN$ y por tanto, que $R \cong SN/TN$ que es sección de G/N.
4. $N \not\leqslant S$ y $S \leqslant TN$.

$$S \cap N/T \cap N = S \cap N/T \cap (S \cap N) \simeq T(S \cap N)/T.$$

Como $S \leqslant TN$, por la identidad de Dedekind,

$$S = T(S \cap N) \quad \text{y} \quad R \cong S \cap N/T \cap N$$

que es sección de N.

1.3. Proposición.—Para cada clase $\mathcal{C}$, $\langle \mathcal{C} \rangle$ es una clase Derivada.

Demostración.—$\langle \mathcal{C} \rangle$ es homomorfo s-cerrado, pues si S es sección de G/N o de H (siendo $H \leqslant G$), S es sección de G.
$\langle \mathcal{C} \rangle$ es extensible por el lema anterior.

1.4. Definición.—Llamaremos base de la clase $\mathcal{C}$ a:

$$b(\mathcal{C}) = \{S \mid S \text{ es sección simple de algún } G \in \mathcal{C}\}.$$

1.5. Proposición.—Son equivalentes las siguientes afirmaciones:
a) $\mathcal{C} \subseteq \langle \mathcal{C} \rangle$.
b) $b(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$.
c) $b(\mathcal{C}) = \text{sim}\, \mathcal{C}$.

Demostración.—a) $\Longrightarrow$ b) Si $S \in b(\mathcal{C})$, existe $G \in \mathcal{C}$ de forma que S es sección simple de G; como $\mathcal{C} \subseteq \langle \mathcal{C} \rangle$, $G \in \langle \mathcal{C} \rangle$, luego $S \in \mathcal{C}$.
b) $\Longrightarrow$ c) Es obvio.
c) $\Longrightarrow$ a) Si $G \in \mathcal{C}$ y S es sección simple de G.

$$S \in b(\mathcal{C}) = \text{sim}\, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C},$$

luego $G \in \langle \mathcal{C} \rangle$.

1.6. DEFINICIÓN.—Diremos que una clase $\mathcal{C}$ es σ-cerrada si verifica cualquiera de los apartados anteriores. Es decir: si $\mathcal{C}$ es cerrada para secciones simples.

Resulta inmediata la siguiente:

1.7. PROPOSICIÓN.—El operador que a cada clase de grupos $\mathcal{C}$ le asocia la clase

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup b(\mathcal{C})$$

es de clausura.

Obsérvese que las clases fijadas por el anterior operador son precisamente las clases σ-cerradas. Son ejemplos de tales clases los homomorfos s-cerrados y, para cada clase $\mathcal{C}$, la clase $b(\mathcal{C})$.

1.8. PROPOSICIÓN.—Sea Σ una clase de grupos simples. Son equivalentes:

1) Σ es clase σ-cerrada.
2) $\Sigma = b(\langle\Sigma\rangle)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si $\Sigma \subseteq \langle\Sigma\rangle$, entonces $\Sigma \subseteq b(\langle\Sigma\rangle)$. Por otra parte, si $S \in b(\langle\Sigma\rangle)$, existe $G \in \langle\Sigma\rangle$ de forma que S es sección simple de G, luego $S \in \Sigma$.

1.9. PROPOSICIÓN.—Para cada clase $\mathcal{C}$ se define el operador D mediante:

$$D(\mathcal{C}) = \langle b(\mathcal{C})\rangle.$$

D es un operador clausura.

DEMOSTRACIÓN.—Si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son dos clases de grupos y $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, se sigue que

$$b(\mathcal{C}_1) \subseteq b(\mathcal{C}_2) \quad \text{y} \quad \langle b(\mathcal{C}_1)\rangle \subseteq \langle b(\mathcal{C}_2)\rangle \therefore D(\mathcal{C}_1) \subseteq D(\mathcal{C}_2).$$

Si $G \in \mathcal{C}$ y S es sección simple de G; $S \in b(\mathcal{C})$, luego

$$G \in \langle b(\mathcal{C})\rangle \therefore \mathcal{C} \subseteq D(\mathcal{C}).$$

Como $b(\mathcal{C})$ es σ-cerrada, se tiene por (1.8), que

$$b(\mathcal{C}) = b(\langle b(\mathcal{C})\rangle),$$

luego

$$\langle b(\mathcal{C})\rangle = \langle b(\langle b(\mathcal{C})\rangle)\rangle : \mathrm{D}(\mathcal{C}) = \mathrm{D}^2(\mathcal{C}).$$

1.10. Teorema.—Una clase χ es clase Derivada si y sólo si $\chi = \mathrm{D}(\chi)$.

Demostración.—Sea χ clase Derivada y $G \in \mathrm{D}(\chi)$.

Si G es simple, $G \in \mathrm{sim}\,\mathrm{D}(\chi) = b(\chi)$ (v. 1.8); como χ es clase Derivada es en particular clase σ-cerrada y $b(\chi) \subseteq \chi$; así, $G \in \chi$.

Si G no es simple, sea $N \lhd G$, $1 \neq N$; como $\mathrm{D}(\chi)$ es, en particular, homomorfo n-cerrado, N y G/N son $\mathrm{D}(\chi)$-grupos; por inducción sobre $|G|$, resulta que N y G/N son χ-grupos. Como χ es extensible, $G \in \chi$.

Así, $\mathrm{D}(\chi) \subseteq \chi$, luego $\chi = \mathrm{D}(\chi)$.

Recíprocamente, si $\chi = \mathrm{D}(\chi)$, basta aplicar (1.3).

Como una aplicación de lo anteriormente expuesto, se da una caracterización para que un subgrupo normal de un grupo G sea $\mathcal{H}$-envoltura de G para algún homomorfo $\mathcal{H}$. Recordemos que si se da esta situación la $\mathcal{H}$-envoltura de G es precisamente $G^{\mathcal{H}'}$, y que $\mathcal{H}'$ es una clase Derivada y aplicar (1.2) y (2.3) de [5]

1.11. Lema.—Sea $\mathcal{H}$ una clase de Schunck normal. Entonces, G es un $\mathcal{H}$-grupo si y sólo si para cada subgrupo normal maximal M de G, G/M es $\mathcal{H}$-grupo.

Demostración.—Sea G tal que todos sus factores simples son $\mathcal{H}$-grupos. Si suponemos $G^{\mathcal{H}'} \neq G$, se tendrá que $G^{\mathcal{H}'} \leqslant M$ para algún subgrupo normal maximal M de G, luego $G/M \in \mathcal{H}'$, contra la hipótesis. Así, $G = G^{\mathcal{H}'} \in \mathcal{H}$ por ser $\mathcal{H}$ clase de Schunck normal.

1.12. Proposición.—Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$. Existe una clase Derivada χ de forma que $N = G^{\chi}$ si y sólo si ningún factor simple de N, salvo el trivial, es sección de G/N.

Demostración.—Sea χ una clase Derivada de modo que $G^{\chi} = N$. Se tiene que $N \in \chi^*$, luego si $M \trianglelefteq N$, $N/M \in \chi^*$. Supuesto que N/M es sección de G/N, $N/M \in \chi$, ya que $G/N = G/G^{\chi} \in \chi$. Luego $N/M \in \chi \cap \chi^* = 1$.

Recíprocamente, siendo G y N en las hipótesis del enunciado, sea

$$\Sigma = b\,\{1, G/N\}) \quad \text{y} \quad \chi = \langle \Sigma \rangle.$$

Si M es subgrupo normal maximal de N, $N/M \notin \Sigma$ por hipótesis, luego $N/M \notin \chi$ y por tanto $N/M \in \chi^*$; por el lema, $N \in \chi^*$. Como

$$\chi^{*\prime} = \chi, N = G\chi.$$

§ 2. Los retículos de las clases de Schunck normales y de las clases Derivadas

Introducimos las siguientes notaciones:

$\Omega = \{\Sigma \mid \Sigma$ es homomorfo σ-cerrado de grupos simples$\}$.

$\mathcal{D} = \{\chi \mid \chi$ es clase Derivada$\}$.

$\mathcal{S} = \{\mathcal{H} \mid \mathcal{H}$ es clase de Schunck normal$\}$.

El propósito del presente párrafo es el de estudiar las clases $\mathcal{D}$ y $\mathcal{S}$ en cuanto a su posible estructura como retículos. La clase Ω juega un papel auxiliar, simplificando considerablemente muchas situaciones.

2.1. Lema.—Ω con el orden establecido por la relación de inclusiones un retículo completo y distributivo.

Demostración.—Es inmediato que la unión y la intersección de clases son operaciones de retículo en Ω. Por su naturaleza, el retículo es completo y distributivo. Señalemos que 1 y Sim son, respectivamente, el mínimo y el máximo de Ω.

2.2. Lema.—$\mathcal{D}$ con el orden establecido por la relación de inclusión es un retículo completo.

Demostración.—Como el operador D es de clausura (v. 1.9), $\mathcal{D}$ es un retículo completo (v. 1.10).

Señalamos a continuación las operaciones de retículo.

Si $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}$, es claro que $\chi_1 \cap \chi_2 \in \mathcal{D}$, y por lo tanto,

$$\chi_1 \cap \chi_2 = \inf_{\mathcal{D}} (\chi_1, \chi_2).$$

Por otra parte, si $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}$, como $\chi_1^* \cap \chi_2^* \subseteq \chi_i^*$ $(i = 1, 2)$, se tiene que

$$\chi_i = \chi_i^{*\prime} \subseteq (\chi_1^* \cap \chi_2^*)' \quad (i = 1, 2).$$

Al ser $\chi_1^* \cap \chi_2^*$ un homomorfo, se sigue que

$$(\chi_1^* \cap \chi_2^*)' \in \mathcal{D}.$$

Sea ahora $\Theta \in \mathcal{D}$ tal que $\chi_1 \cup \chi_2 \subseteq \Theta$. Se sigue que

$$\Theta^* \subseteq \chi_i^* \, (i = 1, 2),$$

o sea,

$$\Theta^* \subseteq \chi_1^* \cap \chi_2^*.$$

De aquí,

$$(\chi_1^* \cap \chi_2^*)' \subseteq \Theta^{*\prime} = \Theta.$$

Por lo tanto,

$$(\chi_1^* \cap \chi_2^*)' = \sup_{\mathcal{D}} (\chi_1, \chi_2).$$

2.3. Lema.—$\mathcal{S}$ con el orden establecido por la relación de inclusión es un retículo completo.

Demostración.—Al ser el operador S un operador clausura actuando sobre homomorfos, $\mathcal{S}$ es un retículo completo.

Las operaciones de retículo se señalan a continuación.

Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}$, como

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_i \quad (i = 1, 2),$$

Se sigue que

$$\mathrm{S}\,(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \subseteq \mathrm{S}\,(\mathcal{H}_i) = \mathcal{H}_i \quad (i = 1, 2),$$

es decir,

$$\mathrm{S}\,(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \subseteq \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2\,;$$

por lo tanto,

$$\mathrm{S}\,(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}.$$

Es claro así, que

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \inf_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Por otra parte, si

$$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}, (\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)^* \in \mathcal{S},$$

pues al ser $\mathcal{H}'_1$ y $\mathcal{H}'_2$ clases Derivadas, $\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2$ lo es también y entonces se aplica (2.3) de [5]. Como

$$\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2 \subseteq \mathcal{H}'_i \quad (i = 1, 2),$$

se sigue que

$$\mathcal{H}_i = \mathrm{S}(\mathcal{H}_i) = \mathcal{H}_i'^* \subseteq (\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)^*.$$

Si $\mathcal{K} \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{K}$, se sigue que

$$\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{H}'_i \quad (i = 1, 2),$$

o sea, $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2$; por lo tanto,

$$(\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)^* \subseteq \mathcal{K}'^* = \mathrm{S}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}.$$

Así pues,

$$(\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)^* = \sup_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

2.4. Proposición.—La aplicación $\mathcal{D} \longrightarrow \Omega$ dada por $\chi \longmapsto b(\chi)$ para cada $\chi \in \mathcal{D}$ es un isomorfismo de retículos.

Demostración.—La aplicación $\Omega \longrightarrow \mathcal{D}$ dada por $\Sigma \longrightarrow \langle \Sigma \rangle$ para cada $\Sigma \in \Omega$ es inversa de la del enunciado:

Si $\Sigma \in \Omega$, $b(\langle \Sigma \rangle) = \Sigma$ por (1.8).

Si $\chi \in \mathcal{D}$, $\langle b(\chi) \rangle = \chi$ por (1.10).

Sean $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{D}$; entonces

$$b(\chi_1 \cap \chi_2) = b(\chi_1) \cap b(\chi_2),$$

luego se conserva el ínfimo. Por otra parte, al ser χ_1^* y χ_2^* clases de Schunck normales, $\chi_1^* \cap \chi_2^*$ lo es; si S es un grupo simple,

$$\mathrm{S} \neq 1, \mathrm{S} \in (\chi_1^* \cap \chi_2^*)'$$

equivale a $S \notin \chi_1^* \cap \chi_2^* \iff S \notin \chi_1^*$ ó $S \notin \chi_2^* \iff S \in \chi_1$ ó $S \in \chi_2$, o lo que es lo mismo,

$$S \in b(\chi_1) \cup b(\chi_2).$$

Por lo tanto,

$$b((\chi_1^* \cap \chi_2^*)') = b(\chi_1) \cup b(\chi_2)$$

y se conserva el supremo.

2.5. Teorema.—i) La aplicación $\alpha: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{D}$ dada por $\alpha(\mathcal{H}) = \mathcal{H}'$ para cada $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ es biyectiva, y tiene por inversa la $\beta: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}$ dada por $\beta(\chi) = \chi^*$ para cada $\chi \in \mathcal{D}$. Además, es un antiisomorfismo de retículos.

ii) $\mathcal{S}$ y $\mathcal{D}$ son dos retículos completos y distributivos antiisomorfos.

Demostración.—i) Sea $\chi \in \mathcal{D}$; $\alpha\beta(\chi) = \alpha(\chi^*) = \chi^{*\prime} = \chi$.

Si $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$, $\beta\alpha(\mathcal{H}) = \beta(\mathcal{H}') = \mathcal{H}'^* = \mathcal{H}$.

Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}$, se tiene:

$$\alpha(\inf_{\mathcal{S}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)) = \alpha(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) = (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)' = (\mathcal{H}_1'^* \cap \mathcal{H}_2'^*)' =$$
$$= [(\alpha(\mathcal{H}_1))^* \cap (\alpha(\mathcal{H}_2))^*]' = \sup_{\mathcal{D}}(\alpha(\mathcal{H}_1), \alpha(\mathcal{H}_2))$$
$$\alpha(\sup_{\mathcal{S}}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)) = \alpha((\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)^*) = (\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)^{*\prime} = \mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2 =$$
$$= \alpha(\mathcal{H}_1) \cap \alpha(\mathcal{H}_2) = \inf_{\mathcal{D}}(\alpha(\mathcal{H}_1), \alpha(\mathcal{H}_2)).$$

Por lo tanto, α es un antiisomorfismo de retículos.

ii) Por (2.1) y (2.4), $\mathcal{D}$ es un retículo completo y distributivo; por el apartado i), $\mathcal{S}$ lo es también.

Obsérvese que 1 y $\mathcal{U}$ son, respectivamente, el mínimo y el máximo de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{D}$.

2.6. Lema.—Sea χ una clase Derivada. Se tiene:

i) $\chi = \mathcal{U}$ si y sólo si para cada número natural $n \geqslant 5$, $A_n \in \chi$.

ii) $\chi \neq 1$ si y sólo si existe p primo tal que $C_p \in \chi$.

Demostración.—El apartado ii) es obvio, por ser χ clase s-cerrada.

i) Supongamos que $A_n \in \chi$ para cada natural $n \geqslant 5$. Sea S un grupo simple cualquiera. Si $S \cong C_2$ ó $S \cong C_3$, S es sección de A_5, luego $S \in \chi$. En otro caso, por el teorema de Cayley, S es sección de S_n.

con $n = |S|$. Por el lema (1.2) y teniendo en cuenta que $n > 2$, resulta que S es sección de A_n; como

$$n \geq 5, A_n \in \chi \quad \text{y} \quad S \in \chi.$$

Por lo tanto $\mathrm{Sim} \subseteq \chi$, luego $\chi = \mathcal{U}$.

Cuando hablemos de maximal, sobreentenderemos maximal no máximo, y análogamente, identificaremos minimal con minimal no mínimo.

2.7. Proposición.—$\chi \in \mathfrak{D}$ es minimal en $\mathfrak{D}$ si y sólo si $\chi = \mathcal{S}_p$, p primo. En $\mathfrak{D}$ no hay elementos maximales.

$\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ es maximal en $\mathcal{S}$ si y sólo si $\mathcal{H} = \mathcal{B}_p$, p primo. En $\mathcal{S}$ no hay elementos minimales.

Demostración.—Es obvio que $\Sigma \in \Omega$ es minimal en Ω si y sólo si $\Sigma = \{1, C_p\}$ con p primo.

Sea ahora $\chi \in \mathfrak{D}$, $\chi \neq \mathcal{U}$. Por (2.6), existe un número natural $n \geqslant 5$ tal que $A_n \notin \chi$. Es claro que

$$\chi \subset \langle \chi \cup \{A_n\} \rangle$$

y que $A_{n+1} \notin \langle \chi \cup \{A_n\} \rangle$ (v. 1.1), además, por (1.3) se tiene que

$$\langle \chi \cup \{A_n\} \rangle \in \mathfrak{D}.$$

Luego $\mathfrak{D}$ no posee elementos maximales.

Basta ahora utilizar (2.4) y (2.5) y tener en cuenta:

$$\langle \{1, C_p\} \rangle = \mathcal{S}_p, \ (\mathcal{S}_p)^* = \mathcal{B}_p.$$

2.8. Proposición.—Los únicos elementos de $\mathfrak{D}$ que admiten complemento son 1 y $\mathcal{U}$. A cada $\chi \in \mathfrak{D}$ viene asociado el «mayor» $\Theta \in \mathfrak{D}$ verificando

$$\inf_{\mathfrak{D}} (\chi, \theta) = 1 : \text{es } \theta = S_{\pi'}$$

siendo $\pi = \operatorname{car} \chi$. Si $\chi \neq \mathcal{U}$ y $\Theta \in \mathfrak{D}$ es tal que $\sup_{\mathfrak{D}} (\chi, \Theta) = \mathcal{U}$, se tiene $\Theta = \mathcal{U}$.

Los únicos elementos de $\mathcal{S}$ que admiten complemento son 1 y $\mathcal{U}$. A cada $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$ viene asociada la «menor» $\mathcal{K} \in \mathcal{S}$ verificando

$$\sup_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}, \mathcal{K}) = \mathcal{U} ;$$

es $\mathcal{K} = \mathcal{B}_\pi$ siendo $\pi = \operatorname{car} \mathcal{H}$. Si $\mathcal{H} \neq 1$ y $\mathcal{K} \in \mathcal{S}$ es tal que

$$\inf_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}, \mathcal{K}) = 1,$$

se tiene $\mathcal{K} = 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\chi \in \mathcal{D}$ y $\pi = \operatorname{car} \chi$; se tiene que $\mathcal{S}_{\pi'} \in \mathcal{D}$ y que $\chi \cap S_{\pi'} = 1$; si $\Theta \in \mathcal{D}$ y $\chi \cap \Theta = 1$, siendo $C_p \in \Theta$, p primo, se sigue que $C_p \notin \chi$, luego que $p \in \pi'$; por lo tanto, $\Theta \subseteq \mathcal{S}_{\pi'}$.

Veamos ahora que si $\mathcal{H} \in \mathcal{S}$, $\mathcal{H} \neq 1$ y $\mathcal{K} \in \mathcal{S}$ es tal $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = 1$, entonces $\mathcal{K} = 1$. En efecto: supongamos $\mathcal{K} \neq 1$; considerando (2.2) de [5] y teniendo en cuenta que $\mathcal{U}^* = 1$, se tiene que $\mathcal{H}' \neq \mathcal{U}$ y $\mathcal{K}' \neq \mathcal{U}$. Por (2.6) existen números naturales $r, m \geqslant 5$ de forma que $A_r \notin \mathcal{H}'$ y $A_m \notin \mathcal{K}'$, o lo que es lo mismo, $A_r \in \mathcal{H}$ y $A_m \in \mathcal{K}$; sea n el mayor de estos números r y m. Se tiene que A_r y A_m son secciones de A_n. Por lo tanto, se sigue que $A_n \in \mathcal{H}$ y $A_n \in \mathcal{K}$: si, por ejemplo, $A_n \notin \mathcal{H}$, o equivalentemente, $A_n \in \mathcal{H}'$, se seguiría $A_r \in \mathcal{H}'$, lo que no puede ser; análogamente sucede si se supone $A_n \notin \mathcal{K}$. Es decir, $A_n \in \mathcal{H} \cap \mathcal{K}$ contra la hipótesis.

Basta ahora utilizar (2.5).

Pasamos a continuación a estudiar el comportamiento de las envolturas según las operaciones del retículo $\mathcal{S}$.

2.9. PROPOSICIÓN.—Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}$, la $\sup_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$-envoltura de un grupo G es el producto de la $\mathcal{H}_1$-envoltura de G por la $\mathcal{H}_2$-envoltura de G.

DEMOSTRACIÓN.—Sean H, H_1, H_2 las $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$-envolturas de G, respectivamente, donde $\mathcal{H} = \sup_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Como

$$\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{H} \ (i = 1, 2), \ H_i \leq H \ (i = 1, 2),$$

luego $H_1 H_2 \leqslant H$. Por otra parte,

$$G/H_1 H_2 \cong (G/H_1)/(H_1 H_2/H_1)$$

y, por lo tanto, $G/H_1 H_2 \in \mathcal{H}'_1$. Análogamente, $G/H_1 H_2 \in \mathcal{H}'_2$. Luego

$$G/H_1 H_2 \in \mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2 = \mathcal{H}'.$$

Y como $H = G^{\mathcal{H}'}$, se sigue que $H \leqslant H_1 H_2$.

Observemos que por esta proposición, si $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son homomorfos cualesquiera y G un grupo, se verifican las igualdades:

$$G^{\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2} = G^{\mathcal{H}'_1} G^{\mathcal{H}'_2} = G_{(\mathcal{H}'_1 \cap \mathcal{H}'_2)*} = G_{\mathcal{H}_1'*} G_{\mathcal{H}_2'*}$$

Basta para ello tener en cuenta que si $\mathcal{H}$ es un homomorfo, $\mathcal{H}'$ es clase Derivada y aplicar (1.2) y (2.3) de [5].

Se tiene como consecuencia inmediata que si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}$, entonces:

$$\sup_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \{G \mid G = G^{\mathcal{H}'_1} G^{\mathcal{H}'_2}\} \qquad \text{(v. [9])}.$$

2.10. Proposición.—Si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{S}$, para cada grupo G las series:

$$(1) \quad : G \trianglerighteq G_{\mathcal{H}_1} \trianglerighteq G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} \trianglerighteq G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} \trianglerighteq \ldots$$
$$(2) \quad : G \trianglerighteq G_{\mathcal{H}_2} \trianglerighteq G_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1} \trianglerighteq G_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} \trianglerighteq \ldots,$$

donde, por ejemplo,

$$G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2} = (G_{\mathcal{H}_1})_{\mathcal{H}_2},$$

se estacionan en la $\inf_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$-envoltura de G.

Demostración.—Recordemos que $G_{\mathcal{H}_1}$, por ejemplo, es la $\mathcal{H}_1$-envoltura de G; y que $\inf_{\mathcal{S}} (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$.

Como G es finito, las series se estacionan.

Probaremos la tesis para la primera serie (para la segunda sería análogo).

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_1, \quad \text{luego} \quad G_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \leqslant G_{\mathcal{H}_1}$$

Supongamos que

$$G_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3} \leqslant G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_i} \quad i \in \{1, 2\};$$

sea $j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$; se sigue que:

$$G_{(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2), \mathcal{H}_j} \leqslant G_{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}, \ldots, \mathcal{H}i, \mathcal{H}_j}$$

Como

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \subseteq \mathcal{H}_j, \qquad G_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} = G_{(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2), \mathcal{H}_j}$$

luego:

$$G_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} \leqslant G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j}$$

Supongamos que

$$G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_i} = G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j}$$

Se sigue que

$$G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_i} \in \mathcal{H}_j,$$

luego que:

$$G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_i} \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2.$$

Como $G_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}$ es $(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$-máximo en G, se sigue que:

$$G_{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_i} \leqslant G_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}$$

y por lo tanto, la igualdad.

§ 3. Retículos de $\mathfrak{D}$-clases de Schunck normales

Adoptamos la siguiente notación, siendo $\mathfrak{D}$ una clase de grupos:

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{D}} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ es } \mathfrak{D}\text{-clase de Schunck normal}\}.$$

3.1. Proposición.—$\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ con el orden establecido por la relación de inclusión, es filtrante a izquierda.

Demostración.—Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$, entonces

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \inf_{\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}} (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2).$$

Basta verificar que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$.

Como $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son homomorfos, $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ lo es, y como

$$\mathcal{C}_i \subseteq \mathfrak{D} \quad (i = 1, 2),$$

se tiene que $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subseteq \mathfrak{D}$.

Probaremos que para cada $G \in \mathfrak{D}$ se cumple

$$G^{(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2.$$

Consideremos la clase de Schunck normal $\mathcal{H} = \mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*$. Sea G un $\mathfrak{D}$-grupo cualquiera. Teniendo en cuenta que

$$(\mathcal{C}_i'^*)' = \mathcal{C}_i' \quad (i = 1, 2)$$

y (2.11), resulta que la $\mathcal{H}$-envoltura de G es el término en el que se estaciona la serie:

$$G \trianglerighteq G^{\mathcal{C}'_1} \trianglerighteq G^{\mathcal{C}'_1 \cdot \mathcal{C}'_2} \trianglerighteq G^{\mathcal{C}'_1 \cdot \mathcal{C}'_2 \cdot \mathcal{C}'_1} \trianglerighteq \ldots$$

Como $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ y $G \in \mathfrak{D}$, $G^{\mathcal{C}'_1} \in \mathcal{C}_1$; en particular, $G^{\mathcal{C}'_1} \in \mathfrak{D}$. Como $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$, se sigue que $G^{\mathcal{C}'_1 \cdot \mathcal{C}'_2} \in \mathcal{C}_2$. Y así para cada término de la serie. Es claro pues que $G^{\mathcal{H}'} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Por otra parte, se tiene:

$$\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_i'^* \quad (i = 1, 2),$$

luego $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{H}$ y de aquí $\mathcal{H}' \subseteq (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'$. Por lo tanto,

$$G^{(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'} \leqslant G^{\mathcal{H}'}.$$

Al ser $G^{\mathcal{H}'} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, se sigue que

$$G^{\mathcal{H}'} = G^{(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'},$$

es decir,

$$G^{(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2.$$

Obsérvese que se tiene (v. 2.7 de [5]):

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathfrak{D}) \cap (\mathcal{C}_2'^* \cap \mathfrak{D}) = (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*) \cap \mathfrak{D} =$$
$$= (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)'^* \cap \mathfrak{D}.$$

3.2. LEMA.—Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$, se tiene $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ si y sólo si sim $\mathcal{C}_1$ = sim $\mathcal{C}_2$.

DEMOSTRACIÓN.—La implicación hacia la derecha es obvia. Supongamos ahora que sim $\mathcal{C}_1$ = sim $\mathcal{C}_2$. Sea $G \in \mathcal{C}_1$ y sea M subgrupo normal maximal de G; entonces $G/M \in$ sim $\mathcal{C}_1$, luego

$$G/M \in \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2'^* \cap \mathfrak{D}.$$

Por (1.11) se sigue que $G \in \mathcal{C}_2'^*$; como $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathfrak{D}$, se tiene

$$G \in \mathcal{C}_2'^* \cap \mathfrak{D} = \mathcal{C}_2,$$

luego $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$. Análogamente, $\mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}_1$.

3.3. PROPOSICIÓN.—Si $\mathfrak{D}$ es un homomorfo cerrado para los subgrupos que son residuales respecto de clases Derivadas, $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ es un retículo completo y distributivo.

DEMOSTRACIÓN.—Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$, entonces

$$\sup_{\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}} (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) = (\mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2)^* \cap \mathfrak{D}.$$

En efecto: pongamos $\mathcal{H} = (\mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2{}^*)$. Como $\mathcal{H}$ es clase de Schunck normal se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathfrak{D} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$. Como

$$\mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2 \subseteq \mathcal{C}'_i \quad (i = 1, 2),$$

se sigue que $\mathcal{C}_i'^* \subseteq \mathcal{H}$ $(i = 1, 2)$; por lo tanto,

$$\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{H} \cap \mathfrak{D}.$$

Si $\mathcal{C} \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ y $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{C}$, se sigue que $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2$, y por tanto, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}'^*$, de donde

$$\mathcal{H} \cap \mathfrak{D} \subseteq \mathcal{C}'^* \cap \mathfrak{D} = \mathcal{C}.$$

Con (3.1), y razonando análogamente para un conjunto arbitrario de subíndices, se tiene que $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ es un retículo completo.

Sean ahora $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3 \in \mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$. Como entonces

$$\mathcal{C}_i'^* \in \mathcal{S} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

que es retículo distributivo, se tiene:

$$\mathcal{C}_1'^* \cap (\mathcal{C}'_2 \cap \mathcal{C}'_3)^* = [(\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*)' \cap (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_3'^*)']^*. \tag{1}$$

Utilizando (2.7) de [5] se tiene:

$$\mathcal{C}_1'^* \cap (\mathcal{C}'_2 \cap \mathcal{C}'_3)^* \cap \mathfrak{D} = (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathfrak{D}) \cap (\mathcal{C}'_2 \cap \mathcal{C}'_3)^* \cap \mathfrak{D} =$$
$$= \mathcal{C}_1 \cap (\mathcal{C}'_2 \cap \mathcal{C}'_3)^* \cap \mathfrak{D}.$$

Como $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{C}_i'^*$ $(i = 1, 2, 3)$, se sigue fácilmente:

$$[(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)' \cap (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3)']^* \subseteq [\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*)' \cap (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_3'^*)']^*. \tag{2}$$

Sea ahora $S \neq 1$ un grupo simple tal que:

$$S \in \mathfrak{D} \cap [(\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*)' \cap (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_3'^*)']^*.$$

Por las observaciones inmediatas a (2.9) se sigue:

$$S \in \mathfrak{D} \text{ y } S = S, (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*)' (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_3'^*)'$$

y como S es simple:

$$S \in [(\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_2'^*) \cup (\mathcal{C}_1'^* \cap \mathcal{C}_3'^*)] \cap \mathfrak{D};$$

por (2.7) de [5]:

$$S \in (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \cup (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3) \quad \text{y} \quad S \in \mathfrak{D};$$

se sigue:

$$S \notin (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)' \cap (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3)' \quad \text{y} \quad S \in \mathfrak{D};$$

es decir:

$$S \in [(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)' \cap (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3)']^* \cap \mathfrak{D}.$$

Con lo obtenido, el lema (3.2) y teniendo en cuenta (1) y (2), se sigue que $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}}$ es retículo distributivo.

Finalmente, señalemos que mín $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}} = 1$ y máx $\mathcal{S}_{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$.

Bibliografía

[1] Blessenohl, D. y Gaschütz, W.: *Über normale Schunck-und Fittingklassen.* «Math. Z.», 118, 1-8 (1970).

[2] Cossey, J.: *Classe of Finite Soluble Groups.* «Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups». Canberra, 1973, 226-237.

[3] Hawkes, T. O.: *The family of Schunck classes as a Lattice.* «J. of Algebra», 39, 527-550 (1976).

[4] Huppert, B.: *Endliche Gruppen I.* Springer-Verlag, Berlín (1967).

[5] Lafuente, J.: *Sobre clases de Schunck normales. Las clases Derivadas.* «Rev. Acad. Ciencias Zaragoza», 32, 141-147 (1977).

[6] Pérez Monasor, F.: *Grupos finitos separados respecto de una formación de Fitting.* «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», serie 2.ª, XXVIII, 253-301 (1973).

[7] Schunck, H.: *$\mathcal{H}$-Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen.* «Math. Zeitschr.», 97, 326-330 (1967).

[8] Torres, M.: *Sobre los grupos finitos π-separables.* «Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza», serie 2.ª, XXVI, 429-459 (1971).

[9] Wood, G. J.: *A Lattice of Homomorphs.* «Math. Z.», 130, 31-37 (1973).