ALGUNOS NUEVOS RESULTADOS SOBRE EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA

por

MANUEL VALDIVIA

Para varios espacios localmente separados, damos aplicaciones lineales no continuas con gráficas cerradas. Uno de los resultados obtenidos contiene el teorema de Mahowald como corolario [7]. Si $\mathcal{E}$ es una clase de espacios localmente convexos separados, estable para límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas, sea $\mathcal{E}_r$ la clase de todos los espacios localmente convexos separados tales que si $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}_r$ y f es una aplicación lineal de E en F con gráfica cerrada, entonces f es continua. Damos también algunas propiedades de los espacios que pertenecen a $\mathcal{E}_r$ relacionadas con otras propiedades de los espacios que están en $\mathcal{E}$.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos. Empleamos la palabra «espacio» con el significado de «espacio vectorial topológico, localmente convexo y de Hausdorff». Si $\langle F, G \rangle$ es un par dual, denotamos por $\sigma(F, G)$, $\beta(F, G)$ y $\mu(F, G)$ la topología débil, fuerte y de Mackey, respectivamente, sobre F. Dado un espacio E, E' es su dual topológico y E^* su dual algebraico. Si $\mathcal{T}$ es la topología original de E y A es un subconjunto de E, $A[\mathcal{T}]$ es el conjunto A con la topología inducida por $\mathcal{T}$. Si B es un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de E, E_B es el espacio normado sobre la envoltura lineal de B cuya norma es el calibrador de B. Un espacio es localmente completo si cada sucesión de Cauchy en el sentido de Mackey, contenida en E, es convergente. Denotamos por $\hat{E}$, E^q y E^c la complección, casi-complección y complección local de E, respectivamente. Decimos que E es dual localmente completo si $E'[\sigma(E', E)]$ es localmente completo. Si U es un entorno del origen en E, absolutamente convexo y cerrado, sea $\mathcal{T}_U$ la topología localmente convexa sobre E tal que E $[\mathcal{T}_U]$ tiene

$$\{n^{-1} U : n = 1, 2, \dots\}$$

como una base de entornos del origen, entonces E_U es el espacio localmente convexo separado asociado a E $[\mathcal{T}_U]$. Si Ω es un abierto no vacío del espacio euclídeo n-dimensional R^n, $\mathcal{D}'(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones de Schwartz, dotado de la topología fuerte.

Para demostrar el teorema 1, necesitamos el siguiente resultado que hemos dado en [12]: a) *Sean E y F dos espacios de Banach de dimensiones infinitas. Si F' $[\sigma(F', F)]$ es separable, entonces E es el límite inductivo de una familia de espacios de Banach iguales a F.*

TEOREMA 1.—*Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Sea F un espacio tal que cada aplicación lineal de E en F, con gráfica cerrada, es continua. Si G es un espacio ultrabornológico y g es una aplicación lineal de G en F, con gráfica cerrada, entonces g es continua.*

DEMOSTRACIÓN.—Es claro que basta hacer la prueba para el caso en que G sea de dimensión infinita y de Banach, lo cual vamos a suponer. Tomamos en E' una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ algebraicamente libre y representamos por L la envoltura lineal de dicha sucesión con la topología inducida por $\sigma(E', E)$. Sea H el subespacio de E ortogonal a L y sea h una aplicación lineal de E/H en F, con gráfica cerrada. Puesto que el espacio de Banach E/H tiene un dual débil separable, G es el límite inductivo de una familia de espacios de Banach iguales a E/H, de acuerdo con el resultado a), y, por tanto, es suficiente probar que h es continua. Sea φ la aplicación canónica de E sobre E/H. Puesto que φ es continua, la gráfica de $h \circ \varphi$ es cerrada en E × F y, consecuentemente, $h \circ \varphi$ es continua, de aquí que h sea continua, c. q. d.

LEMA 1.—*Sea E un espacio que posee un subespacio G de dimensión infinita numerable, denso en E. Supongamos que existe en E una norma continua* p. *Entonces existe un sistema biortogonal* $(x_n, u_n)_{n=1}^{\infty}$ *para E, de manera que la envoltura lineal de* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *coincide con G,* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *es total en E'* $[\sigma(E', E)]$ *y si* x *es un elemento cualquiera de E tal que* $p(x) < 1$, *se tiene que, para cada entero positivo* n, $|\langle u_n, x\rangle| \leqslant 1$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea

$$V = \{x \in E : p(x) \leq 1\}$$

y sea B el conjunto polar de V en E'. Puesto que E es separable y B es débilmente compacto, se tiene que B[σ (E', E)] es metrizable y, por tanto, existe en dicho conjunto un subconjunto numerable denso

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}.$$

Puesto que p es una norma, B es total en E' [σ (E', E)]. Representamos por $\|\cdot\|$ la norma del espacio de Banach E'_B. Sea

$$w_n = \lambda_n v_n, \quad \lambda_n \in K, \quad \lambda_n \neq 0, \quad \| w_n \| \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Sea f la aplicación lineal de l^2 en E'_B tal que, si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pertenece a l^2, se verifique:

$$f((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n.$$

Puesto que

$$\| f((a_n)_{n=1}^{\infty}) \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \cdot \| w_n \| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \| w_n \|^2\right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2},$$

f está bien definida y es continua de l^2 en E'_B. Sea φ la aplicación canónica de l^2 en $l^2/f^{-1}(0)$ y sea U la bola unidad cerrada de l^2. U es débilmente compacto y φ (U) es la bola unidad cerrada del espacio de Hilbert $l^2/f^{-1}(0)$. Si g es la aplicación de $l^2/f^{-1}(0)$ en E'_B tal que $f = g \circ \varphi$, $f(U) = A$ se puede identificar con φ (U) mediante g y A es un conjunto débilmente compacto de E'_B tal que E'_A es un espacio de Hilbert separable.

Dado un entero positivo r, sea $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ el elemento de l^2 tal que

$$b_r = 1, \quad b_n = 0, \quad n \neq r.$$

Entonces,

$$f((b_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n w_n = w_r,$$

y, por tanto, A es total en E′ [σ (E′, E)]. El conjunto G es denso en el espacio de Hilbert H, conjugado de E'_A. Usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt se puede encontrar en H una sucesión ortonormal $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ cuya envoltura lineal coincide con G. Sea $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de E'_A tal que

$$\langle u_n, x_n \rangle = 1, \quad \langle u_n, x_m \rangle = 0, \quad n \neq m, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

Entonces $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es total en E'_A y también en E′ [σ (E′, E)]. Si A^0 es el conjunto polar de A en E, A^0 es la intersección de la bola unidad de H con E y, por consiguiente,

$$x_n \in A^0, u_n \in A, n = 1, 2, \ldots$$

Puesto que B $\supset$ A, se tiene que V $\subset$ A^0, de aquí que, si $x \in$ V, se verifique que

$$| \langle u_n, x \rangle | \leq 1, n = 1, 2, \ldots$$

c. q. d.

LEMA 2.—*Sea (E, $\|\cdot\|$) un espacio normado y sea F un subespacio denso de E. Sea* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de elementos de K con una infinidad de términos diferentes de cero. Si* x $\in$ *E,* x $\notin$ *F, existe en F una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de vectores topológicamente libres tales que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \quad y \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| < \infty$$

DEMOSTRACIÓN.—Si $x \notin$ F, E tiene dimensión infinita. Sea $(a_{n_r})_{r=1}^{\infty}$ la subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ formada por todos los términos no nulos de ésta. Tomamos una sucesión $(\lambda_p)_{p=1}^{\infty}$ de números reales estrictamente positivos, convergente a cero, tal que

$$| 2 a_{n_{p+1}}^{-1} \lambda_p | \leq 2^{-n_{p+1}}$$

Supongamos construidos ya los conjuntos $A_r \subset F$, $B_r \subset E'$, tales que $A_0 = B_0 = \varnothing$ y, si r es un entero estrictamente positivo,

$$A_r = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n_r}\}, \quad B_r = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n_r}\}$$

$$\| x - \sum_{p=1}^{r} a_{n_p} x_{n_p} \| < \lambda_r, \tag{1}$$

$$\langle u_p, x_p \rangle = 1, \ \langle u_p, x \rangle = 0, \ \langle u_p, x_q \rangle = 0, \ p \neq q, p, \ q = 1, 2, \ldots, n_r, \tag{2}$$

$$\| x_p \| \leq 2^{-p}, \ p = 1, 2, \ldots, n_r. \tag{3}$$

Tomamos $n_0 = 0$. Si $B_r^{\perp}$ es el subespacio de E ortogonal a B_r, entonces $B_r^{\perp} \cap F$ tiene dimensión infinita y, por tanto, podemos encontrar en $B_r^{\perp} \cap F$ un conjunto:

$$C_r = \{x_{n_r+1}, x_{n_r+2}, \ldots, x_{n_{r+1}-1}\}$$

tal que los vectores de $A_r \cup C_r$ son algebraicamente libres y

$$\| x_{n_r+q} \| = 2^{-(r+q)}, q = 1, 2, \ldots, n_{r+1} - 1 - n_r.$$

Hallamos ahora $u_p \in E'$ de manera que

$$\langle u_p, x_p \rangle = 1, \ \langle u_p, x \rangle = 0, \ \langle u_p, x_q \rangle = 0, \ p \neq q,$$
$$p = n_r + 1, \ n_r + 2, \ldots, n_{r+1} - 1, \ q = 1, 2, \ldots, n_{r+1} - 1.$$

Si D_r es el subespacio de E ortogonal a

$$u_{n_r+1}, u_{n_r+2}, \ldots, u_{n_{r+1}-1},$$

D_r tiene codimensión finita en E y, por consiguiente, $D_r \cap F$ es denso en D_r. Puesto que

$$x - \sum_{p=1}^{r} a_{n_p} x_{n_p} \in D_r,$$

podemos encontrar en $D_r \cap F$ un elemento $x_{n_{r+1}}$ que no depende linealmente de $A_r \cup C_r$, de manera que

$$\left\| x - \sum_{p=1}^{r} a_{n_p} x_{n_p} - a_{n_{r+1}} x_{n_{r+1}} \right\| < \lambda_{r+1}$$

Los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_{n_{r+1}}, x$ son algebraicamente libres y, por consiguiente, podemos encontrar un elemento $u_{n_{r+1}} \in E'$ tal que

$$\langle u_{n_{r+1}}, x_p \rangle = 0,\ p = 1, 2, \ldots, n_{r+1} - 1,\ \langle u_{n_{r+1}}, x_{n_{r+1}} \rangle = 1,$$
$$\langle u_{r_{n+1}}, x \rangle = 0.$$

Construimos los conjuntos A_{r+1} y B_{r+1} cumpliendo las condiciones (1) y (2), cambiando r por $r+1$. Obviamente,

$$\| x_p \| \leq 2^{-p}, p = 1, 2, \ldots, n_{r+1} - 1.$$

Además,

$$\| x_{n_{r+1}} \| = | a_{n_{r+1}}^{-1} | \cdot \left\| x - \sum_{p=1}^{r+1} a_{n_p} x_{n_p} - \left(x - \sum_{p=1}^{r} a_{n_p} x_{n_p} \right) \right\| \leq$$
$$\leq | a_{n_{r+1}}^{-1} | \left(\left\| x - \sum_{p=1}^{r+1} a_{n_p} x_{n_p} \right\| + \left\| x - \sum_{p=1}^{r} a_{n_p} x_{n_p} \right\| \right) <$$
$$< | a_{n_{r+1}}^{-1} | (\lambda_r + \lambda_{r+1}) \leq | 2 a_{n_{r+1}} \lambda_r | \leq 2^{-n_{r+1}}$$

y, por tanto, se cumple la condición (3) para n_{r+1}. Entonces $(x_n, u_n)_{n=1}^{\infty}$ forma un sistema biortogonal para E y, por consiguiente, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es topológicamente libre. Por la condición (1), se tiene que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_p} x_{n_p}$$

y, por la condición (3),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$$

c. q. d.

TEOREMA 2.—*Sea F un espacio tal que $\mu(F', F)$ está definida por una familia de normas. Supongamos que existe en F' $[\sigma(F', F)]$ un subespacio denso G de dimensión numerable tal que $G \neq F'$. Si E es un espacio tal que E' $[\sigma(E', E)]$ no es localmente completo, hay una* *aplicación lineal y no continua* f *de E en F, cuya gráfica es cerrada y $f(E)$ es denso en F.*

Demostración.—Tomamos en $F'[\mu(F', F)]$ un entorno V del origen, absolutamente convexo y cerrado, definido por una norma p. Aplicamos el lema 1 y obtenemos un sistema biortogonal para F, $(x_n, u_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que la envoltura lineal de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ coincida con G, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es total en F y, si u es un elemento de V,

$$|\langle u, x_n\rangle| \leq 1, \; n = 1, 2, \ldots ,$$

Puesto que $E'[\sigma(E', E)]$ no es localmente completo, existe en $E'[\sigma(E, E)]$ un conjunto acotado A, absolutamente convexo y cerrado, tal que E'_A no es un espacio de Banach. Sea B la clausura de A en $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Entonces E'_A es un subespacio no cerrado del espacio de Banach E^*_B. Tomamos en E^*_B un punto $y \notin E'_A$, que esté en la clausura de E'_A. Sea v un elemento de F' que no esté en G. Es obvio que existe una infinidad de términos de $(\langle v, x_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$ diferentes de cero. Aplicamos el lema 2 y obtenemos una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en E'_A topológicamente libre tal que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v, x_n\rangle y_n, \; \sum_{n=1}^{\infty} \| y_n \| < \infty .$$

Sea g la aplicación de $F'[\mu(F', F)]$ en E^*_B tal que, para cada $u \in F'$,

$$g(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, x_n\rangle y_n .$$

Puesto que V es absorbente, existe un $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda u \in V$ y, por tanto,

$$\| g(u) \| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, x_n\rangle| \cdot \| y_n \| = \lambda^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \lambda u, x_n\rangle| \cdot \| y_n \| \leq$$
$$\leq \lambda^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \| y_n \| ,$$

de aquí que g está bien definida y $g(V)$ es un conjunto acotado de E^*_B, de donde se sigue que g es continua.

Si $v_1, v_2 \in F'$, $v_1 - v_2 \neq 0$, existe un entero positivo n_0 tal que

$$\langle v_1 - v_2, x_{n_0} \rangle \neq 0,$$

y existe una forma lineal continua w sobre E^*_B de manera que

$$\langle w, y_{n_0} \rangle = 1, \ \langle w, y_n \rangle = 0, \quad n \neq n_0.$$

Entonces,

$$\langle g(v_1 - v_2), w \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_1 - v_2, x_n \rangle \cdot \langle y_n, w \rangle =$$
$$= \langle v_1 - v_2, x_{n_0} \rangle \cdot \langle y_{n_0}, w \rangle = \langle v_1 - v_2, x_{n_0} \rangle \neq 0$$

y, por tanto, g es inyectiva. Si consideramos ahora g como aplicación de $F'[\sigma(F', F)]$ en $E^*[\sigma(E^*, E)]$, es inmediato que g es continua. Si f es la aplicación adjunta de la g, entonces f es continua de $E[\sigma(E, E^*)]$ en $F[\sigma(F, F')]$. Puesto que g es inyectiva, $f(E)$ es denso en F. El dominio de la aplicación adjunta de f es, obviamente, $g^{-1}(E')$. Puesto que $v \in E'$ y $g(v) \neq y \in E'$, entonces $g^{-1}(E) \neq F'$ y, por tanto, f no es continua. Por otra parte, para cada entero positivo p, se tiene que

$$g(u_p) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u_p, x_n \rangle y_n = y_p \in E'_A \subset E'$$

y, por consiguiente, $G \subset g^{-1}(E')$, de donde se deduce que $g^{-1}(E')$ es denso en $F'[\sigma(F', F)]$, de aquí, [8], resulta que f tiene su gráfica cerrada en $E \times F$, c. q. d.

COROLARIO 1.2.—*Sea E un espacio casi-tonelado. Sea F un espacio de Banach separable de dimensión infinita. Si E no es tonelado, existe una aplicación lineal y no continua* f *de E en F, con gráfica cerrada, tal que* f *(E) es denso en F.*

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que F cumple las condiciones del teorema 2. Por otra parte, si E no es tonelado, existe un tonel U en E que no absorbe un conjunto acotado A. Sean U^0 y A^0 los conjuntos polares de U y A en E', respectivamente. El conjunto $A^0 \cap E'_{U^0}$ es un tonel en E'_U que no absorbe U^0 y, consecuentemente, E'_{U^0} no es tonelado, de aquí que $E'[\sigma(E, E)]$ no es localmente completo. Ahora basta con aplicar el teorema 2, c. q. d.

COROLARIO 2.2.—*Sea E un espacio normado. Sea F un espacio de Banach de dimensión infinita. Si E no es tonelado, existe una aplicación lineal y no continua* f *de E en F cuya gráfica es cerrada.*

DEMOSTRACIÓN.—Tomamos un subespacio separable y cerrado G de F, cuya dimensión sea infinita. Aplicamos el Corolario 1.2 y obtenemos una aplicación lineal y no continua f de E en G, con gráfica cerrada en $E \times G$. Es obvio que f no es continua de E en F y tiene su gráfica cerrada en $E \times F$, c. q. d.

COROLARIO 3.2.—*Sea E un espacio casi-tonelado. Si E no es tonelado existe una aplicación lineal y no continua* f *de E en* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *cuya gráfica es cerrada y* f *(E) es denso en* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN.—$\mathcal{D}'(\Omega)$ tiene un subespacio denso G de dimensión infinita numerable. El dual de Mackey $\mathcal{D}(\Omega)$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ tiene una familia de normas continuas que definen su topología. Se aplica pues el teorema 2, c. q. d.

TEOREMA 3.—*Sea* f *una aplicación lineal de un espacio E en un espacio F. Si existe en F una base de entornos absolutamente convexos y cerrados* $\{U_i : i \in I\}$, *tales que, para cada* $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ *es cerrado en E, la gráfica de* f *es cerrada.*

DEMOSTRACIÓN.—Si G es la clausura de $f(E)$ en F, es suficiente comprobar que la gráfica de f es cerrada en $E \times G$. Ponemos:

$$V_i = U_i \cap G, \ i \in I.$$

Considerando f como una aplicación de $E[\sigma(E, E^*)]$ en G, sea g la aplicación de $G'[\sigma(G', G)]$ en $E^*[\sigma(E^*, E)]$, traspuesta de f. Para probar que la gráfica de f es cerrada en $E \times G$, hemos de ver que $g^{-1}(E')$ es denso que $G'[\sigma(G, G)]$, [8]. Si u pertenece a G', hay un índice $i_0 \in I$ tal que $u \in W_{i_0}$, siendo W_{i_0} el conjunto polar de V_{i_0} en G'. Puesto que g es continua, $g(W_{i_0})$ es compacto en $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Sean P_i y Q_i los conjuntos polares de $f^{-1}(V_i)$ en E' y E^*, respectivamente. Puesto que $f^{-1}(V_i)$ es un conjunto en E, absolutamente convexo y cerrado, Q_i es la clausura en E^* [σ (E^*, E)] de P_i y, por tanto, existe una red

$$\{v_j : j \in J, \geq\}$$

en P_i que σ (E^*, E)-converge a $g(u) \in g(W_{i_0}) = Q_i$. Puesto que $f(E)$ es denso en G, g es inyectiva y, por tanto, $g^{-1}(P_i) \subset W_{i_0}$, de aquí que la red

$$\{g^{-1}(v_j) : j \in J, \geq\}$$

tenga un punto adherente v en el conjunto compacto W_{i_0} de G′ [σ (G′, G)]. Podemos asegurar, pues, que $g(v) = g(u)$ y, por consiguiente, $v = u$. Entonces $g^{-1}(E')$ es denso en G′ [σ (G′, G)], c. q. d.

COROLARIO 1.3.—*Sea* f *una aplicación lineal de un espacio E en un espacio de Banach F. Si V es la bola unidad cerrada de F y* $f^{-1}(V)$ *es cerrado en E, se tiene que* f *tiene su gráfica cerrada.*

NOTA 1.—En [7], M. Mahowald prueba que, si S es un espacio no tonelado, existe un espacio de Banach F y una aplicación lineal y no continua de E en F cuya gráfica es cerrada. El resultado de Mahowald puede obtenerse del corolario anterior de la siguiente forma: sea U un tonel en E que no es un entorno del origen. Si f es la aplicación canónica de E en E_U, sea V la clausura de $f(U)$ en $\hat{E}_U$. Tomando f como aplicación de E en $\hat{E}_U$, tenemos que

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(f(U)) = U$$

es cerrado, y, por tanto, la gráfica de f es cerrada en $E \times \hat{E}_U$. Obviamente, f es lineal y no continua.

TEOREMA 4.—*Si* f *es una aplicación lineal de un espacio E en un espacio F, la gráfica de* f *es cerrada si y sólo si existe en F una familia* $\{U_i ; i \in I\}$ *de entornos del origen, absolutamente convexos y cerrados, con*

$$\bigcap \{U_i : i \in I\} = \{0\},$$

y tales que, para cada $i \in I$, $f^{-1}(U_i)$ *es cerrado de E.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathcal{C}$ la topología sobre F que tiene $\{U_i : i \in I\}$

como sub-base de entornos del origen. De acuerdo con el teorema 3, f tiene su gráfica cerrada en $E \times F[\mathcal{T}]$. Puesto que $\mathcal{T}$ es menos fina que la topología de F, f tiene su gráfica cerrada en $E \times F$. Recíprocamente, si f tiene su gráfica cerrada en $E \times F$, sea g la aplicación adjunta de f. Sea D el dominio de g, el cual es denso en $F'[\sigma(F', F)]$, [8]. La aplicación f es continua de E en $F[\sigma(F, D)]$. Elegimos en $F[\sigma(F, D)]$ un sistema fundamental de entornos del origen $\{U_i : i \in I\}$, cerrados y absolutamente convexos. Entonces $f^{-1}(U_i)$ es cerrado en E, para cada $i \in I$,

$$\bigcap \{U_i : i \in I\} = \{0\}$$

y U_i es un entorno del origen en F, absolutamente convexo y cerrado, $i \in I$, c. q. d.

Sea $\mathcal{E}$ una clase de espacios, estable para los límites inductivos y tales que los espacios de dimensiones finitas pertenecen a $\mathcal{E}$. Dado un espacio $F[\mathcal{T}]$, sea $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ la familia de todas las topologías localmente convexas sobre F, más finas que $\mathcal{T}$, tales que $F[\mathcal{T}_i] \in \mathcal{E}$, $i \in I$. Esta familia no es vacía puesto que si $\mathcal{V}$ es la topología localmente convexa más fina sobre F, $F[\mathcal{V}]$ es el límite inductivo de espacios de dimensiones finitas y, por tanto,

$$\mathcal{V} \in \{\mathcal{T}_i : i \in I\}.$$

Si $\mathcal{T}_a$ es la topología sobre F tal que $F[\mathcal{T}_a]$ es el límite inductivo de

$$\{F[\mathcal{T}_i] : i \in I\}$$

entonces $F[\mathcal{T}_a]$ es el espacio asociado a $F[\mathcal{T}]$ de clase $\mathcal{E}$. Denotamos por $\mathcal{E}_r$ la clase de todos los espacios tales que si $E \in \mathcal{E}$, $F \in \mathcal{E}_r$ y f es una aplicación lineal de E en F, con gráfica cerrada, entonces f es continua. Representamos por $\mathcal{E}_0$ la clase de todos los espacios tales que si $E \in \mathcal{E}$, $H \in \mathcal{E}_0$, G es un subespacio de H y f es una aplicación lineal de G sobre E, con gráfica cerrada en $E \times H$, entonces f es abierta.

Los dos teoremas siguientes son meras generalizaciones de resultados obtenidos en [13].

TEOREMA 5.—*Sea $\mathcal{E}$ una clase de espacios de Mackey, estable para* *los límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas. Entonces las dos condiciones sobre el espacio F son equivalentes.*

1. $F \in \mathcal{E}_r$.

2. *Dado un subespacio G de F^* tal que $G \cap F'$ es denso en $F' [\sigma(F', F)]$ y $F [\mu(F, G)] \in \mathcal{E}$, entonces $G \supset F'$.*

Teorema 6.—*Sea $\mathcal{E}$ una clase de espacios de Mackey, estable para los límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas. Las siguientes condiciones son equivalentes para el espacio H:*

1. $H \in \mathcal{E}_0$.
2. *Dado un subespacio L de H^* tal que*

$$(H/L^{\perp}) [\mu (H/L^{\perp}, L)] \in \mathcal{E},$$

siendo $L^{\perp}$ el subespacio de H ortogonal a L, entonces $L \cap H'$ es cerrado en $H' [\sigma(H', H)]$.

Lema 3.—*Sea f una aplicación lineal de un espacio E en un espacio completo F, tal que la gráfica de f es cerrada. Sea G un subespacio denso de E. Si f es continua en G, entonces f es continua.*

Demostración. — Sea x_0 un punto de E. Tomamos una red $\{y_i : i \in \mathrm{I}, \geqslant\}$ en G que converja a x_0 en E. Puesto que la restricción de f a G es continua, se tiene que

$$\{f(y_i) : i \in \mathrm{I}, \geq\}$$

es una red de Cauchy en F y, por tanto, converge. La gráfica de f es cerrada en E × F y, por consiguiente,

$$\lim \{f(y_i) : i \in \mathrm{I}, \geq\} = f(x_0).$$

Si h es la restricción de f a G, podemos extender h a una aplicación lineal continua g de E en F, pues que F es completo. Tenemos que

$$g(x_0) = \lim \{g(y_i) : i \in \mathrm{I}, \geq\} = \lim \{f(y_i) : i \in \mathrm{I}, \geq\} = f(x_0).$$

c. q. d.

Para la demostración del próximo teorema, necesitaremos los siguientes resultados: b) *Sea F un subespacio de codimensión uno en* *un espacio E. Sea* f *una aplicación lineal de F en el espacio G, cuya gráfica es cerrada. Entonces* f *puede extenderse a una aplicación lineal* g *de E en G, cuya gráfica es cerrada,* [4]. c) *Sea $\mathcal{E}$ una clase de espacios, estable para los límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas. Si* f *es una aplicación lineal continua del espacio E* $[\mathfrak{T}]$ *en el espacio F* $[\mathfrak{U}]$, *se tiene que* f *es continua de E* $[\mathfrak{T}_a]$ *en F* $[\mathfrak{U}_a]$, (3, p. 16).

TEOREMA 7.—*Sea $\mathcal{E}$ una clase de espacios estable para los límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas, de manera que si E es un espacio que tiene un subespacio de codimensión uno que pertenece a $\mathcal{E}$, entonces $E \in \mathcal{E}$. Si F* $[\mathfrak{T}] \in \mathcal{E}_r$, *se tiene que F* $[\mathfrak{T}_a]$ *es completo.*

D-MOSTRACIÓN.—Supongamos que F $[\mathfrak{T}_a]$ no es completo y tomamos un vector x_0 en la compleción H de F $[\mathfrak{T}_a]$ que no esté en F $[\mathfrak{T}_a]$. Sea L el subespacio de H generado por $F \cup \{x_0\}$. Si h es la aplicación canónica de F $[\mathfrak{T}_a]$ sobre F $[\mathfrak{T}]$, h es obviamente continua y, por tanto, la podemos extender a una aplicación lineal f de L sobre F $[\mathfrak{T}]$, con gráfica cerrada, de acuerdo con el resultado b). Puesto que F $[\mathfrak{T}_a] \in \mathcal{E}$, se tiene que $L \in \mathcal{E}$ y, por tanto, f es continua. De acuerdo con el resultado c), f es continua de L sobre F $[\mathfrak{T}_a]$. Ponemos: $y_0 = x_0 - f(x_0)$. Dado un $x \in L$, se tiene que

$$x = \alpha y_0 + y, \alpha \in K, y \in F,$$

y, por consiguiente,

$$f(x) = \alpha f(y_0) + f(y) = (f(x_0) - f(x_0)) + y = y,$$

de aquí que f es una proyección continua de L sobre F $[\mathfrak{T}_a]$, de donde se deduce que F $[\mathfrak{T}_a]$ es cerrado en L, lo cual es una contradicción, c. q. d.

NOTA 2.—En [2], V. Eberhardt prueba que si $\mathcal{E}$ es la clase de los espacios tonelados (casi-tonelados) y F $[\mathfrak{T}] \in \mathcal{E}_r$, entonces R $[\mathfrak{T}_a]$ es completo. Este resultado puede obtenerse de nuestro teorema anterior.

El siguiente resultado es un refinamiento de un teorema que se encuentra en [6], p. 249: d) *Dado un espacio E, sea* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de E'* $[\sigma(E', E)]$ *que converge al origen. Sea A la envoltura* *absolutamente convexa cerrada de* $(u_n)_{n=1}^{\infty}$. *Entonces* A *es compacto si y sólo si* E'_A *es un espacio de Banach.*

TEOREMA 8.—*Un espacio de Mackey es dual localmente completo si y sólo si cada sucesión de* $E'[\sigma(E', E)]$ *que converge al origen es equicontinua en* E.

DEMOSTRACIÓN.—Si E es dual localmente completo y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $E'[\sigma(E', E)]$ que converge al origen, la envoltura absolutamente convexa y cerrada A de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es tal que E'_A es un espacio de Banach y, teniendo en cuenta el resultado d), A es compacto. Puesto que E es un espacio de Mackey, A es equicontinuo en E. Si E no es dual localmente completo, hay en $E'[\sigma(E', E)]$ un subconjunto acotado B, absolutamente convexo y cerrado, tal que E'_B no es un espacio de Banach. Ponemos B^* para la clausura de B en $E^*[\sigma(E^*, E)]$. Entonces $E^*_{B^*}$ es un espacio de Banach y E'_B es un subespacio no cerrado de $E^*_{B^*}$. Por tanto, existe en E'_B una sucesión $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge al origen, cuya envoltura absolutamente convexa y cerrada, en $E^*_{B^*}$ no está contenida en E'_B, [10], p. 134, de aquí que $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ no sea equicontinua en E, c. q. d.

TEOREMA 9.—*Sea* E *un espacio de Mackey, dual localmente completo. Si* F *es un subespacio de* $\hat{E}$ *que contiene* E, *se tiene que* F *es dual localmente completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Aplicamos el teorema 8. Si $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $E'[\sigma(E', E)]$ que converge al origen para la topología $\sigma(E', E)$ y, por consiguiente, es equicontinua en E, entonces $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua en $\hat{E}$, y también en F, por lo que F es dual localmente completo, c. q. d.

TEOREMA 10.—*Sea* $\mathcal{E}$ *la clase de todos los espacios de Mackey que son duales localmente completos. Si* $F[\mathfrak{T}] \in \mathcal{E}_r$, *entonces* $F[\mathfrak{T}_a]$ *es completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia inmediata del teorema 7 y del teorema 8, c. q. d.

Sea $\mathcal{F}$ una clase de espacios. Representamos por $\mathcal{F}_s$ la clase de todos los espacios tales que si $E \in \mathcal{F}_s$, $F \in \mathcal{F}$ y f es una aplicación lineal de E en F, con gráfica cerrada, entonces f es continua. Obviamente, $\mathcal{F}_s$ es estable para límites inductivos y contiene los espacios de dimensiones finitas.

TEOREMA 11.—*Dada una clase de espacios $\mathcal{F}$ tal que existe un espacio $E \notin \mathcal{F}_s$ que posee un subespacio G, de codimensión uno, perteneciente a $\mathcal{F}_s$, existe un $F[\mathcal{T}]$ en $\mathcal{F}$, de manera que si $F[\mathcal{T}_a]$ es el espacio asociado a $F[\mathcal{T}]$ de clase $\mathcal{F}_s$, $F[\mathcal{T}_a]$ no es completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que $E \notin \mathcal{F}_s$ y $G \in \mathcal{F}_s$ entonces G es denso en E. Podemos encontrar un espacio $F[\mathcal{T}] \in \mathcal{F}$ y una aplicación lineal no continua f de E en $F[\mathcal{T}]$, cuya gráfica es cerrada en $G \times F[\mathcal{T}]$ y, puesto que $G \in \mathcal{F}_s$, g es continua. De acuerdo con el resultado c) g es continua de G en $F[\mathcal{T}_a]$. Si $F[\mathcal{T}_a]$ fuera completo, f sería continua de E en $F[\mathcal{T}_a]$, de acuerdo con el lema 3, y, por tanto, f sería continua, lo cual es una contradicción, c. q. d.

Veremos ahora un ejemplo de una clase de espacios $\mathcal{F}$ tal que existe un espacio $E \notin \mathcal{F}_s$ y que contiene un subespacio G, de codimensión uno, que pertenece a $\mathcal{F}_s$.

EJEMPLO.—Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los espacios tales que si $F \in \mathcal{F}$ la topología de F es $\sigma(F, F')$ y $F(F, F')$ es un espacio de Banach. Veremos que $\mathcal{F}_s$ es la clase de aquellos espacios E tales que $E[\mu(E, E')]$ es tonelado. En efecto, si $F \in \mathcal{F}$ y f es una aplicación lineal de E en F, cuya gráfica es cerrada, entonces f es continua del espacio tonelado $E[\mu(E, E')]$ en el espacio de Banach $F[\mu(F, F')]$, [9], y, por tanto, f es continua de E en F, de aquí que E esté en $\mathcal{F}_s$. Sea L un espacio tal que $L[\mu(L, L')]$ no es tonelado. De acuerdo con el teorema de Mahowald, [7], hay un espacio de Banach P y una aplicación lineal g de $L[\mu(L, L')]$ en P, no continua y cuya gráfica es cerrada. Entonces g no es continua de L en $P[\sigma(P, P)]$, de aquí que $L \notin \mathcal{F}_s$. Tomamos ahora un espacio de Banach S no reflexivo. Suponemos que S está sumergido en su bidual S'' mediante la inyección canónica. Tomamos $x \in S''$, $x \notin S$. Sea M la envoltura lineal de $S \cup \{x\}$. Sea J la aplicación canónica de $M[\beta(M, S')]$ sobre $M[\mu(M, S')]$. Es obvio que J es continua. S es un subespacio cerrado de $M[\beta(M, S')]$ y, por consiguiente, $M[\beta(M, S')]$ es un espacio de Banach. Supongamos que $M[\mu(M, S')]$ es tonelado. De acuerdo con el teorema de Ptak, [8], J es abierta, de aquí que $\mu(M, S') = \beta(M, S')$, lo cual es una contradicción, puesto que S es cerrado en $M[\beta(M, S')]$ y denso en $M[\mu(M, S')]$. Por tanto,

$$M[\mu(M, S')] \notin \mathcal{F}_s.$$

Por otra parte, S [μ (M, S')] es un subespacio de codimensión uno de M [μ (M, S')] tal que S [μ (S, S')] es tonelado y, por consiguiente, S [μ (M, S')] $\in \mathcal{F}_s$.

TEOREMA 12.—*Sea $\mathcal{F}$ una clase de espacios completos. Si F* [$\mathcal{T}$] $\in \mathcal{F}_{sr}$ *y F* [$\mathcal{T}_a$] *es el espacio de clase* $\mathcal{F}_s$ *asociado a F* [$\mathcal{T}$], *se tiene que F* [$\mathcal{T}_a$] *es completo.*

DEMOSTRACIÓN.—Teniendo en cuenta el lema 3, si F es un subespacio denso de E, tal que F $\in \mathcal{F}_s$, entonces E $\in \mathcal{F}_s$.

Por tanto, se cumple la condición del teorema 7, de aquí la conclusión, c. q. d.

NOTA 3.—En [4] hemos probado el siguiente resultado: *Un espacio E es dual localmente completo si y sólo si cada aplicación de E en* l^2, *cuya gráfica sea cerrada, es débilmente continua.* Sean F un espacio de Mackey dual localmente completo y G un subespacio de $\hat{F}$ conteniendo F. Si $\mathcal{F}$ es la clase del espacio l^2 como único elemento, entonces F $\in \mathcal{F}_s$ y, por el lema 3, G $\in \mathcal{F}_s$. Teniendo en cuenta el resultado anterior, G es dual localmente completo, y encontramos otra vez el teorema 9.

Los siguientes resultados son debidos a J. Dieudonné, 1: e) *Sea E un espacio tonelado. Si F es un subespacio de E, de codimensión finita, F es tonelado.* f) *Sea E un espacio bornológico. Si F es un subespacio de E, de codimensión finita, F es bornológico.*

NOTA 4.—Si $\mathcal{F}$ es la clase que tiene $\mathcal{D}'(\Omega)$ como único elemento, veamos algunos espacios que pertenecen a $\mathcal{F}_s$ y otros que no están en $\mathcal{F}_s$:

1. La clase de los espacios ultrabornológicos está en $\mathcal{F}_s$, [11].
2. Hay espacios tonelados y no bornológicos que están en $\mathcal{F}_s$ (en [15] damos ejemplo de espacios tonelados no bornológicos que tienen subespacios densos y ultrabornológicos. Por el lema 3, estos espacios están en $\mathcal{F}_s$).
3. Hay espacios tonelados y bornológicos que no son ultrabornológicos, que están en $\mathcal{F}_s$ (en [16] damos ejemplos de espacios tonelados y bornológicos que no son ultrabornológicos, que tienen subespacios densos ultrabornológicos. Estos espacios pertenecen a $\mathcal{F}_s$, por el lema 3).
4. En 17 hemos probado que $\mathcal{D}'(\Omega)$ no es B_r-completo y que

hay en $\mathcal{D}'(\Omega)$ una topología $\mathcal{T}$, menos fina que la original, tal que $\mathcal{D}'(\Omega)[\mathcal{T}]$ es bornológico, tonelado y no ultrabornológico. Por tanto, hay espacios tonelados y bornológicos que no están en $\mathcal{F}_s$. Por los resultados e), f) y el lema 3, cada subespacio de $\mathcal{D}'(\Omega)[\mathcal{T}]$ de codimensión finita, es tonelado y bornológico y no es ultrabornológico.

5. Sea $\mathcal{T}$ la topología de $\mathcal{D}'(\Omega)$ citada en el apartado anterior. Sea F un espacio tonelado y no bornológico. Sea f una aplicación lineal de E en $\mathcal{D}'(\Omega)$ que es nula en F y coincide en $\mathcal{D}'(\Omega)[\mathcal{T}]$ con la inyección canónica de $\mathcal{D}'(\Omega)[\mathcal{T}]$ sobre $\mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces f tiene su gráfica cerrada y no es continua. Por tanto, existen espacios tonelados no bornológicos que no están en $\mathcal{F}_s$.

Nota 5.—En [5], Y. Komura demuestra el siguiente resultado: *Dada una clase $\mathcal{E}$ estable para los límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas, el espacio F $[\mathcal{T}]$ pertenece a $\mathcal{E}_r$ si y sólo si, dada cualquier topología localmente convexa separada $\mathcal{S}$ sobre F, menos fina que $\mathcal{T}$, los espacios asociados a F $[\mathcal{T}]$ y F $[\mathcal{S}]$, de clase $\mathcal{E}$, coinciden.*

Consideremos ahora una clase $\mathcal{E}$ con las propiedades antedichas y veamos que $\mathcal{E}_0$ está contenido en $\mathcal{E}_r$. Supongamos que existe un espacio E $[\mathcal{T}]$ de $\mathcal{E}_0$ que no está en $\mathcal{E}_r$. Por el resultado anterior, existe sobre E una topología localmente convexa separada $\mathcal{U}$, menos fina que $\mathcal{T}$, de manera que $\mathcal{U}_a \neq \mathcal{T}_a$. Sea J la inyección canónica de E $[\mathcal{T}]$ sobre E $[\mathcal{U}_a]$. Puesto que J es continua de E $[\mathcal{T}]$ sobre E $[\mathcal{U}]$, la gráfica de J es cerrada en E $[\mathcal{T}] \times$ E $[\mathcal{U}_a]$ y, por tanto, J es abierta, de aquí que $\mathcal{U}_a$ sea más fina que $\mathcal{T}$, por lo que $\mathcal{U}_a = \mathcal{T}_a$, lo cual es una contradicción.

Veamos ahora que $\mathcal{E}_0$ puede ser diferente de $\mathcal{E}_r$. Sea $\mathcal{F}$ la clase que tiene como único elemento F, siendo F un límite inductivo estricto y numerable de espacios de Fréchet, tal que existe en F un subespacio cerrado G, de manera que F/G no es completo. (Podemos tomar, por ejemplo, $\mathcal{D}(\Omega)$, [17]). Tomamos $\mathcal{E} = \mathcal{F}_s$. En efecto, puesto que F es ultrabornológico, F/G es ultrabornológico y, por tanto, F/G está en $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{V}$ es la topología de F/G, tenemos que $\mathcal{V} = \mathcal{V}_a$ y, puesto que F/G no es completo, aplicamos el teorema 12 y obtenemos que F/G no pertenece a $\mathcal{E}_r$. Por el resultado anterior de Komura, tomamos una topología localmente convexa separada $\mathcal{W}$ sobre F/G, menos fina que $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{W}_a \neq \mathcal{V}$. Si f es la aplicación canónica de F/G sobre (F/G) $[\mathcal{W}_a]$ entonces f tiene su gráfica cerrada y no es abierta. Si φ es la aplicación canónica de F sobre F/G, se tiene que $f \circ \varphi$ tiene su gráfica cerrada en $F \times (F/G)$ $[\mathcal{W}_a]$ y no es abierta, de aqui que $F \notin \mathcal{E}_0$.

LEMA 4.—*Sea* f *una aplicación lineal de un espacio E en un espacio casi-completo (localmente completo) F, cuya gráfica sea cerrada. Sea G un subespacio de E tal que* G^q (G^c) *contiene E. Si* f *es continua en G, entonces* f *es continua.*

Siguiendo un proceso de inducción, f/G puede extenderse a una aplicación lineal g continua de E en F. Usando la misma clase de argumento que en el lema 3, se llega a la conclusión.

Los teoremas 13, 14 y 15 se demuestran de una forma análoga a los teoremas 7, 11 y 12, respectivamente, usando el lema 4 en vez del lema 3.

TEOREMA 13.—*Sea* $\mathcal{E}$ *una clase de espacios estable para los límites inductivos y conteniendo los espacios de dimensiones finitas, de manera que si F es un espacio que posee un subespacio G de codimensión uno tal que* $E \subset G^q$, $(E \subset G^c)$, *entonces* $E \in \mathcal{E}$. *Si* $F[\mathcal{T}] \in \mathcal{E}_r$, *entonces* $F[\mathcal{T}_d]$ *es casi-completo (localmente completo).*

NOTA 6.—En [3], V. Eberhardt demuestra que si $\mathcal{E}$ es la clase de los espacios bornológicos y $F[\mathcal{T}] \in \mathcal{E}_r$, entonces $F[\mathcal{T}_a]$ es localmente completo. Este resultado es un caso particular del teorema 13.

TEOREMA 14.—*Dada una clase de espacios* $\mathcal{F}$, *sea E un espacio que no está en* $\mathcal{F}_s$ *y que posee un subespacio G, de codimensión uno, de manera que* $G \in \mathcal{F}_s$ *y* $G^q \supset E$ $(G^c \supset E)$. *Entonces existe un espacio* $F[\mathcal{T}] \in \mathcal{F}$ *tal que si* $F[\mathcal{T}_a]$ *es el espacio de clase* $\mathcal{F}_s$ *asociado a* $F[\mathcal{T}]$, *entonces* $F[\mathcal{T}_a]$ *no es casi-completo (localmente completo).*

TEOREMA 15.—*Sea* $\mathcal{F}$ *una clase de espacios casi-completos (localmente completos). Si* $F[\mathcal{T}] \in \mathcal{F}_{sr}$ *y* $F[\mathcal{T}_a]$ *es el espacio de clase* $\mathcal{F}_s$ *asociado a* $F[\mathcal{T}]$, *entonces* $F[\mathcal{T}_a]$ *es casi-completo (localmente completo).*

En [4], Iyahen demuestra el siguiente resultado: g) *Dada una clase de espacios* $\mathcal{F}$, *si* $E \in \mathcal{F}_s$ *y F es un subespacio de codimensión finita de E, entonces* $F \in \mathcal{F}_s$.

En [13] hemos dado el siguiente teorema: h) *Si E es un espacio con un subespacio F, de codimensión numerable, tal que F es un* Γ_r-*espacio* (Γ-*espacio*), *entonces E es un* Γ_r-*espacio* (Γ-*espacio*).

Utilizando el resultado g), se obtiene por un método análogo al usado en [13] para obtener h), los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 16.—*Sea* $\mathcal{F}$ *una clase de espacios. Si E es un espacio que posee un subespacio F, de codimensión numerable, tal que* $F \in \mathcal{F}_{sr}$, *entonces* $E \in \mathcal{F}_{sr}$.

TEOREMA 17.—*Sea* $\mathcal{F}$ *una clase de espacios. Si E es un espacio que posee un subespacio F, de codimensión numerable, tal que* $F \in \mathcal{F}_{s0}$, *entonces* $E \in \mathcal{F}_{s0}$.

TEOREMA 18.—*Sea* $\mathcal{E}$ *una clase de espacios estable para los límites inductivos y que contiene a los espacios de dimensiones finitas. Sea* $F[\mathcal{T}]$ *un espacio de* $\mathcal{E}_r$. *Sea G un subespacio de* $E[\mathcal{T}]$ *de codimensión finita. G pertenece a* $\mathcal{E}_r$ *si y sólo si G es cerrado en* $F[\mathcal{T}]$.

DEMOSTRACIÓN.—Obviamente, basta hacer la prueba para el caso en que G tiene codimensión uno. Primero consideramos G denso en $F[\mathcal{T}_a]$. Sea J la aplicación canónica de $G[\mathcal{T}_a]$ sobre G. Por el resultado b) es posible extender J en una aplicación lineal p de $F[\mathcal{T}_a]$ sobre G, con gráfica cerrada. Supongamos que G pertenece a $\mathcal{E}_r$. Entonces p es continua, lo cual es una contradicción, puesto que la extensión continua de J a $F[\mathcal{T}_a]$ es la inyección canónica de $F[\mathcal{T}_a]$ sobre $F[\mathcal{T}]$. Supongamos ahora que G es cerrado en $F[\mathcal{T}_a]$. Sea $\mathcal{U}$ una topología localmente convexa separada sobre G, menos fina que la inicial, y sea f la aplicación canónica de G sobre $G[\mathcal{U}_a]$. Puesto que f tiene su gráfica cerrada, puede extenderse a una aplicación g de $F[\mathcal{T}]$ sobre $G[\mathcal{U}_a]$ con gráfica cerrada, de acuerdo con el resultado b). El núcleo de g es de dimensión uno, y, por tanto, $F[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$ es topológicamente isomorfo a un subespacio cerrado de $F[\mathcal{T}]$ de codimensión uno y, por consiguiente, $F[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$ pertenece a $\mathcal{E}_r$. Sea φ la aplicación canónica de $F[\mathcal{T}]$ sobre $F[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$ y sea h la aplicación lineal inyectiva de $F[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$ sobre $G[\mathcal{U}_a]$ tal que $h \circ \varphi = g$. Puesto que g tiene gráfica cerrada, h también tiene su gráfica cerrada y, por tanto, h es abierta, de aquí que g sea abierta. Sea k un isomorfismo topológico de $F[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$ sobre un subespacio cerrado H de $F[\mathcal{T}]$, de codimensión uno. Sea L un subespacio de dimensión uno de $F[\mathcal{T}]$ tal que $F[\mathcal{T}] = H \oplus L$. Sea $\mathcal{V}$ la topología de $F[\mathcal{T}_a]/g^{-1}(0)$ y $\mathcal{W}$ la topología de $F/g^{-1}(0)$ tal que $(F/g^{-1}(0))[\mathcal{W}]$ es el espacio de clase $\mathcal{E}$ asociado a $F[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$. Es evidente que $H[k(\mathcal{V})] \oplus L$ coincide con $F[\mathcal{T}_a]$ puesto que G es cerrado en $F[\mathcal{T}_a]$. La topología de $H[k(\mathcal{W})] \oplus L$ es menos fina que $\mathcal{T}_a$ y más fina que $\mathcal{T}$, de donde se deduce, teniendo en cuenta que

$$H(k(\mathcal{W})) \oplus L \in \mathcal{E}$$

que $\mathcal{V}$ coincide con $\mathcal{W}$. La aplicación k^{-1} es continua de G $[\mathcal{U}_a]$ sobre F $[\mathcal{T}]/g^{-1}(0)$ y, por consiguiente, k^{-1} es continua de G $[\mathcal{U}_a]$ sobre

$$(F/g^{-1}(0))[\mathcal{W}] = F[\mathcal{T}_a]/g^{-1}(0).$$

Podemos asegurar, pues, que g es abierta de F $[\mathcal{T}_a]$ sobre G $[\mathcal{U}_a]$. Del hecho de ser G $[\mathcal{T}_a]$ cerrado en F $[\mathcal{T}_a]$, la restricción de g a G, que coincide con f, es abierta de G $[\mathcal{T}_a]$ sobre G $[\mathcal{U}_a]$ y, por tanto, $\mathcal{U}_a = \mathcal{T}_a$; de aquí que, de acuerdo con el resultado de Komura citado en la nota anterior, G $\in \mathcal{E}_r$, c. q. d.

Bibliografía

[1] Dieudonne, J.: *Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques.* «Ann. Soc. Polon. Math.», 25, 50-55 (1952).

[2] Eberhardt, V.: *Der Graphensatz von A. P. und W Robertson für s-Raume.* «Manuscripta Mathematicae», 4, 255-262 (1952).

[3] Eberhardt, V.: *Durch Graphensätze definierte lokalkonvexe Räume.* Inaugural-Disertation zur Erlangung der Doktorwürde (Univ. München).

[4] Iyahen, S. O.: *On the closed graph theorem.* «Israel J. Math.», 10, 96-105 (1971).

[5] Komura, W.: *On linear topological spaces.* «Kumamoto J. Sci.», Ser. A, 148-157 (1964).

[6] Köthe, G.: *Topological Vector Spaces I.* Berlin-Heidelber-New York, Springer, 1969.

[7] Mahowald, M.: *Barrelled spaces and the closed graph theorem.* «J. London Math. Soc.», 36, 108-110 (1961).

[8] Ptak, V.: *Completeness and the open mapping theorem.* «Bull. Math. France», 86, 41-47 (1958).

[9] Robertson, A. and Robertson, W.: *On the closed graph theorem.* «Proc. Glasgow Math Assoc.», 3, 9-12 (1956).

[10] Robertson, A. and Robertson, W.: *Topological Vector Spaces.* Cambridge, 1964.

[11] Schwarzt, L.: *Sur le theorème du graphe ferme.* C. R. Acad. Sci. Paris, 263, Ser. A, 602-605 (1966).

[12] Valdivia, M.: *A clas of precompact sets in Banach spaces.* «J. reine angew. Mathematik», 276, 130-136 (1975).

[13] Valdivia, M.: *Sobre el teorema de la gráfica cerrada.* «Collectanea Mathematica», vol. XXII, fasc. 1.º, 51-71 (1971).

[14] Valdivia, M.: *Mackey convergence and the closed graph theorem.* «Archiv der Mathematik», vol. XXV, fasc. 6, 646-656 (1973).

[15] VALDIVIA, M.: *On nonbornological barrelled spaces.* «Annales Institut Fourier», 22, 27-30 (1972).

[16] VALDIVIA, M.: *A clas of bornological barrelled spaces which are not ultrabornological.* «Mathematische Annalen», 194, 43-51 (1971).

[17] VALDIVIA, M.: *The space of distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$ is not B_r-complete.* «Mathematische Annalen», 211, 145-149 (1974).