ALGUNOS FUNTORES RELACIONADOS CON LA COMPLECION DE MODULOS RESPECTO A UN FILTRO DE GABRIEL

por

JOSE RIOS MONTES

Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ una teoría de torsión hereditaria en A-mod, con filtro asociado $\mathbb{F}$; en la sección I se estudia el funtor $(\ )^{\mathbb{F}}$: A-mod $\longrightarrow A^{\mathbb{F}}$-mod, donde

$$A^{\mathbb{F}} = \varprojlim_{\mathbb{F}} A/I$$

y para cada $M \in$ A-mod,

$$M^{\mathbb{F}} = \varinjlim_{\mathbb{F}(M)} M/K,$$

en la sección II se establecen relaciones (cuando $\mathbb{F}$ es estable) entre $A^{\mathbb{F}}$-mod y la categoría de módulos izquierdos sobre el localizado de A respecto a $\mathbb{F}_{H}$ ($\mathbb{F}_{H}$ fue definido en [2]).

Para cada $M \in \mathbb{T}$, $M \cong M^{\mathbb{F}}$, lo cual implica que $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria en $A^{\mathbb{F}}$-mod, se denota por $\mathbb{F}^{e}$ al filtro asociado con esta clase de torsión; en la sección III se dan condiciones para que el módulo $M^{\mathbb{F}}$, dotado de la topología $\mathbb{F}^{e}(M^{\mathbb{F}})$, sea la compleción de $(M, \mathbb{F}(M))$.

Finalmente, en la sección IV, se prueba que si A y B son anillos Morita equivalentes entonces los anillos $A^{\mathbb{F}}$ y $B^{\mathbb{F}'}$ son Morita equivalentes, donde $\mathbb{F}$ es un filtro de Gabriel en A y $\mathbb{F}'$ el filtro correspondiente en B, inducido por la equivalencia.

Quiero agradecer a los profesores Francisco Raggi C. y Luis Colavita por sugerir el tema de este trabajo, así como por sus valiosos comentarios durante el desarrollo del mismo.

I. El funtor $( )^{\mathbb{F}}$

Sea A un anillo con 1, $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ una teoría de torsión en A-mod con filtro de Gabriel asociado $\mathbb{F}$, para cada $M \in$ A-mod, la familia $\{M/K \mid K \in \mathbb{F}(M)\}$ junto con los morfismos inducidos por las inclusiones en $\mathbb{F}(M)$ es un sistema inverso de módulos; denotamos por

$$M^{\mathbb{F}} = \varprojlim_{\mathbb{F}(M)} M/K$$

definimos ahora

$$\Theta_M : A^{\mathbb{F}} \times M^{\mathbb{F}} \longrightarrow M^{\mathbb{F}}$$

como sigue: Si $(a_I + I) \in A^{\mathbb{F}}$ y $(X_K + K) \in M^{\mathbb{F}}$

$$\Theta_M [(a_I + I)_{\mathbb{F}}, (X_K + K)_{\mathbb{F}(M)}] = (a_{(K : X_k)} X_K + K)_{\mathbb{F}(M)}$$

esta función es A-bilineal y por lo tanto define:

a) Una estructura de anillo con 1 en $A^{\mathbb{F}}$.

b) Una operación en $M^{\mathbb{F}}$ que lo hace un $A^{\mathbb{F}}$-módulo izquierdo.

Si M, N son A-módulos izquierdos y $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, definimos

$$f^{\mathbb{F}} \in \mathrm{Hom}_{A}\, \mathbb{F}(M^{\mathbb{F}}, N^{\mathbb{F}})$$

por

$$f^{\mathbb{F}}((X_K + K)_{\mathbb{F}(M)}) = (f(X_{f^{-1}(L)}) + L)_{\mathbb{F}(N)}$$

y se obtiene así un funtor $( )^{\mathbb{F}}$: A-mod $\longrightarrow$ $A^{\mathbb{F}}$-mod.

Proposición 1.1.—*El funtor* $( )^{\mathbb{F}}$ *es aditivo.*

Demostración.—Sea $N, M \in$ A-mod y $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ entonces: si $(X_K + K) \in M^{\mathbb{F}}$,

$$(f + g)^{\mathbb{F}} (X_K + K) = [(f + g)(X_{(f+g)^{-1}(L)}) + L],$$

por otro lado,

$$(f^{\mathbb{F}} + g^{\mathbb{F}})(X_K + K) = [f(X_{f^{-1}(L)}) + g(X_{g^{-1}(L)}) + L]$$

pero

$$X_{(f+g)^{-1}(L)} - X_{f^{-1}(L) \cap g^{-1}(L)} \in (f + g)^{-1}(L)$$

entonces

$$(f + g)[X_{(f+g)^{-1}(L)} - X_{f^{-1}(L) \cap g^{-1}(L)}] \in L$$

además

$$f[X_{f^{-1}(L)} - X_{f^{-1}(L) \cap g^{-1}(L)}] \in L$$

y

$$g[X_{g^{-1}(L)} - X_{f^{-1}(L) \cap g^{-1}(L)}] \in L$$

y de aquí que

$$(f + g)^{\mathbb{F}} = f^{\mathbb{F}} + g^{\mathbb{F}}.$$

PROPOSICIÓN 1.2.—Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A-módulos *izquierdos tal que*

$$\mathbb{F}(M') = \{f^{-1}(K) \mid K \in \mathbb{F}(M)\}$$

entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M'^{\mathbb{F}} \xrightarrow{f^{\mathbb{F}}} M^{\mathbb{F}} \xrightarrow{g^{\mathbb{F}}} M''^{\mathbb{F}}$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN.—a) $f^{\mathbb{F}}$ es monomorfismo ; sea

$$(X_K + K)_{\mathbb{F}(M')} \in \operatorname{Ker} f^{\mathbb{F}}$$

entonces

$$0 = f^{\mathbb{F}}(X_K + K) = (f(X_{f^{-1}(L)}) + L)_{\mathbb{F}(M)}$$

entonces $f(X_{f^{-1}(L)}) \in L$ para todo $L \in \mathbb{F}(M)$, es decir $X_{f^{-1}(L)} \in f^{-1}(L)$ para todo $L \in \mathbb{F}(M)$, por la hipótesis, si $K \in \mathbb{F}(M')$, existe $L \in \mathbb{F}(M)$ tal que $K = f^{-1}(L)$ y de aquí que $X_K \in K$ para todo $K \in \mathbb{F}(M')$, por lo cual $(X_K + K) = 0$.

b) $g^{\mathbb{F}} f^{\mathbb{F}} = 0$ es consecuencia inmediata de que $(\ )^{\mathbb{F}}$ es funtor aditivo.

c) Sea

$$(X_K + K)_{\mathbb{F}(M)} \in \operatorname{Ker} g^{\mathbb{F}}$$

entonces

$$0 = g^{\mathbb{F}}(X_K + K) = (g(X_{g^{-1}(L)}) + L)_{\mathbb{F}(M'')}$$

de donde $g(X_{g^{-1}(L)}) \in L$ para todo $L \in \mathbb{F}(M'')$, es decir $X_{g^{-1}(L)} \in g^{-1}(L)$ para todo $L \in \mathbb{F}(M'')$.

Sea $K \in \mathbb{F}(M)$, entonces $K + \operatorname{Ker} g = K + \operatorname{Imf} \in \mathbb{F}(M)$ y $K \subset \operatorname{Imf} + K$; por consiguiente,

$$X_K - X_{K+\operatorname{Imf}} \in K + \operatorname{Imf}$$

pero existe $L \in \mathbb{F}(M'')$ tal que $K + \operatorname{Imf} = g^{-1}(L)$, de aquí que

$$X_{K+\operatorname{Imf}} \in K + \operatorname{Imf}$$

por lo cual $X_K \in K + \operatorname{Imf}$ para todo $K \in \mathbb{F}(M)$ sea $X_K = Y_K + f(Z_K)$ con $Y_K \in K$, $Z_K \in M'$ entonces

$$(X_K + K)_{\mathbb{F}(M)} = (f(Z_K) + K)_{\mathbb{F}(M)} ;$$

ahora bien, si $f^{-1}(K) = f^{-1}(K')$ entonces

$$f^{-1}(K) = f^{-1}(K') = f^{-1}(K \cap K')$$

entonces

$$f(Z_{K \cap K'}) - f(Z_{K'}) \in K'$$

y de aquí

$$Z_{K \cap K'} - Z_{K'} \in f^{-1}(K') = f^{-1}(K \cap K'),$$

de la misma manera

$$Z_{K \cap K'} - Z_K \in f^{-1}(K \cap K')$$

de donde

$$Z_K - Z_{K'} \in f^{-1}(K \cap K')$$

es decir, si $N \in \mathbb{F}(M')$, podemos definir $Z_N = Z_K$ para cualquier $K \in \mathbb{F}(M)$ tal que $N = f^{-1}(K)$ tenemos entonces que

$$f^{\mathbb{F}}(Z_N + N)_{\mathbb{F}(M')} = (X_K + K)_{\mathbb{F}(M)}.$$

COROLARIO 1.3.—*Si* $\mathbb{F}$ *es un filtro estable, entonces* $(\ )^{\mathbb{F}}$ *es un funtor exacto izquierdo.*

Si denotamos por $F: A^{\mathbb{F}}\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$ al funtor que olvida, tenemos entonces una transformación natural

$$\Phi : 1_{A\text{-mod}} \longrightarrow F \circ (\ )^{\mathbb{F}}$$

definida

$$\Phi_M : M \longrightarrow M^{\mathbb{F}} \qquad \Phi_M(X) = (X + K)_{\mathbb{F}(M)}$$

OBSERVACIONES 1.4.—a) Φ_M es el morfismo inducido por la familia

$$\{P_K : M \longrightarrow M/K\}_{\mathbb{F}(M)}$$

donde P_K es la proyección canónica.

b) Φ_A es un morfismo de anillos.

Denotaremos como en [2] por $\mathbb{H}$ a la clase de módulos izquierdos M tales que $c\,\mathrm{M} = \{0\}$, donde

$$c\,\mathrm{M} = \bigcap_{\mathrm{K} \in \mathbb{F}(\mathrm{M})} \mathrm{K}.$$

PROPOSICIÓN 1.5.—*Son válidas las siguientes afirmaciones:*

a) $Ker\ \Phi_M = c_M$.

b) $M \in \mathbb{H}$ *si y sólo si* Φ_M *es monomorfismo.*

c) *Si* $M \in \mathbb{T}$ *entonces* Φ_M *es un isomorfismo.*

d) $F(M^{\mathbb{F}}) \in \mathbb{H}$ *para todo* $M \in A$*-mod.*

e) $M^{\mathbb{F}} \cong (M/c\,M)^{\mathbb{F}}$ *para todo* $M \in A$*-mod.*

f) *Si* $K \in \mathbb{F}(M)$ *entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow K^{\mathbb{F}} \longrightarrow M^{\mathbb{F}} \longrightarrow M/K \longrightarrow 0$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\ \Phi_{\mathrm{M}}$ si y sólo si

$$0 = \Phi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} + \mathrm{K})_{\mathbb{F}(\mathrm{M})}$$

si y sólo si $\mathrm{X} \in \mathrm{K}$ para todo $\mathrm{K} \in \mathbb{F}(\mathrm{M})$, si y sólo si

$$\mathrm{X} \in \bigcap_{\mathbb{F}(\mathrm{M})} \mathrm{K} = c\,\mathrm{M}.$$

b) Inmediato de a).

c) Si $\mathrm{M} \in \mathbb{T}$ entonces Φ_{M} es un monomorfismo ya que $\mathbb{T} \subset \mathbb{H}$ ahora sea $(\mathrm{X}_{\mathrm{K}} + \mathrm{K}) \in \mathrm{M}^{\mathbb{F}}$, como $\mathrm{M} \in \mathbb{T}$ entonces $0 \in \mathbb{F}(\mathrm{M})$ y de aquí que $\mathrm{X}_{\mathrm{K}} - \mathrm{X}_0 \in \mathrm{K}$ para todo $\mathrm{K} \in \mathbb{F}(\mathrm{M})$, es decir,

$$(\mathrm{X}_{\mathrm{K}} + \mathrm{K}) = (\mathrm{X}_0 + \mathrm{K}) = \Phi_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_0).$$

d) Es claro del hecho que $\mathrm{M}^{\mathbb{F}}$ es submódulo de $\prod_{\mathbb{F}(\mathrm{M})} \mathrm{M}/\mathrm{K}$.

e) Se sigue de la siguiente igualdad:

$$\mathbb{F}(\mathrm{M}/c\,\mathrm{M}) = \{\mathrm{K}/c\,\mathrm{M} \mid \mathrm{K} \in \mathbb{F}(\mathrm{M})\}.$$

f) Los elementos de $\mathbb{F}(M)$ satisfacen las hipótesis de la Proposición 1.2, y esto junto con a) nos dan el resultado.

Cuando $\mathbb{F}(M)$ es considerado como sistema de vecindades de $0 \in M$, se obtiene una topología en M que lo hace un A-módulo topológico; este espacio será denotado por $(M, \mathbb{F}(M))$.

En nuestra notación, $(M, \mathbb{F}(M))$ es de Hausdorff si y sólo si $M \in \mathbb{H}$.

Es conocido (ver por ejemplo [4]) que la compleción de $(M, \mathbb{F}(M))$ es el A-módulo $\varprojlim_{\mathbb{F}(M)} M/K$ junto con la topología del límite inverso de espacios discretos; en esta nota estudiaremos $M^{\mathbb{F}}$ junto con cierta topología que será descrita en la sección III.

Observaciones 1.6.

a) $(M, \mathbb{F}(M))$ es completo si y sólo si Φ_M es un isomorfismo.

b) Si $M \in \mathbb{T}$ entonces $(M, \mathbb{F}(M))$ es completo.

c) $(M, \mathbb{F}(M))$ es completo si y sólo si $c\,M = 0$ y para todo $(X_K + K) \in M^{\mathbb{F}}$ se tiene que $[\bigcap (X_K + K)] \neq \phi$.

d) Si $\mathbb{F}$ es estable entonces cada submódulo cerrado K de un módulo completo M, es completo.

Demostración.—d) Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_K} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_{M/K}} & & \\ 0 & \longrightarrow & K^{\mathbb{F}} & \longrightarrow & M^{\mathbb{F}} & \longrightarrow & (M/K)^{\mathbb{F}} & & \end{array}$$

la estabilidad de $\mathbb{F}$ nos dice que el renglón inferior es exacto; por otra parte, K cerrado en M implica $M/K \in \mathbb{H}$ y de aquí que $\Phi_{M/K}$ es monomorfismo, junto con el hecho que Φ_M es isomorfismo, tenemos por consecuencia que Φ_K es isomorfismo.

II. Relaciones entre el funtor $(\ )^{\mathbb{F}}$ y la localización respecto a $\mathbb{F}_{\mathbb{H}}$

En [2] se probó que si $\mathbb{F}$ es un filtro estable de Gabriel en A, entonces la clase $\mathbb{H}$ de módulos Hausdorff es una clase libre de torsión correspondiente a una teoría de torsión hereditaria; esta teoría de torsión es denotada por $(\mathbb{T}_{\mathbb{H}}, \mathbb{H})$, el filtro asociado por $\mathbb{F}_{\mathbb{H}}$ y el radical correspondiente por c, donde:

a) $\mathbb{T}_H = \{M \mid M$ es $\mathbb{F}$-simple, $M \in \mathbb{L}\}$.

b) $\mathbb{F}_H = \{{}_A I \subset A \mid$ para todo ${}_A J$ con $I \subset J \subsetneq A$ y $a \in A$, $(J : a) \notin \mathbb{F}\}$.

c) $c\,M = \bigcap\limits_{\mathbb{F}(M)} K$.

Dado $M \in A$-mod, denotamos por $M_{\mathbb{F}_H}$ a la localización de M respecto a $\mathbb{F}_H$, entonces $M_{\mathbb{F}_H}$ es isomorfo como A-módulo a la $\mathbb{F}_H$ — cápsula inyectiva de $M/c\,M$.

PROPOSICIÓN 2.1.—*Sea $\mathbb{F}$ un filtro estable de Gabriel en ${}_A A$, entonces: $M \in \mathbb{T}_H$ si y sólo si $M^{\mathbb{F}} = \{0\}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $M \in \mathbb{T}_H$, entonces M es $\mathbb{F}$-simple y libre de torsión, de aquí que $\mathbb{F}(M) = \{M\}$ entonces

$$M^{\mathbb{F}} = \varinjlim M/M = \{0\}.$$

Recíprocamente, si $M^{\mathbb{F}} = \{0\}$ se tiene que: $M = \operatorname{Ker} \Phi_M = c\,M$, es decir, $M \in \mathbb{T}_H$.

PROPOSICIÓN 2.2.—*Sea $\mathbb{F}$ un filtro de Gabriel en ${}_A A$, entonces los módulos de torsión respecto a $\mathbb{F}$ son $\mathbb{F}_H$-inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $I \in \mathbb{F}_H$, $M \in \mathbb{T}$ y $f\colon I \longrightarrow M$ un A-morfismo, consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & f\downarrow & & \downarrow\bar{f} & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E(M) & \longrightarrow & E(M)/M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde $E(M)$ es la cápsula inyectiva de M y $\bar{f}$ es una extensión de f, como $\mathbb{F}$ es estable entonces $E(M) \in \mathbb{T}$ y de aquí que $E(M)/M \in \mathbb{T}$, la conmutatividad del primer cuadro del diagrama implica la existencia de un morfismo $g\colon A/I \longrightarrow E(M)/M$ de tal forma que el cuadro de la derecha es conmutativo; pero $A/I \in \mathbb{T}_H$ y $E(M)/M \in \mathbb{T} \subset \mathbb{H}$, de aquí que $g = 0$ y entonces $\operatorname{Im} \bar{f} \subset M$.

TEOREMA 2.3.—*Si $\mathbb{F}$ es estable entonces para todo $M \in A$-mod, $M^{\mathbb{F}}$ es $\mathbb{F}_H$-inyectivo.*

Sea $I \in \mathbb{F}_{\mathbb{H}}$, $M \in A$-mod y $f\colon I \longrightarrow M^{\mathbb{F}}$ un A-morfismo si $K \in \mathbb{F}(M)$, denotamos por $p_K\colon M \longrightarrow M/K$ a la proyección canónica y si $K \subset L$, denotamos por $q_{(K,L)}\colon M/K \longrightarrow M/L$ al morfismo inducido por la inclusión, consideremos ahora el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dashed, "f_K"'] \arrow[ddl, dashed, bend left, "f_L"] \\
& M^{\mathbb{F}} \arrow[d, "P_K"'] \arrow[dr, "P_L"] & \\
& M|_K \arrow[r, "q_{(K,L)}"'] & M|_L
\end{tikzcd}$$

De la proposición anterior tenemos que, para cada $K \in \mathbb{F}(M)$, el morfismo $P_K f$ tiene una extensión $f_K\colon A \longrightarrow M/K$. Probaremos ahora que si $K \in \mathbb{F}(M)$ y $K \subset L$ entonces $q_{(K,L)} f_K = f_L$, notemos que

$$(f_L - q_{(K,L)} \circ f_K)|_I = 0$$

entonces $f_L - q_{(K,L)} \circ f_K$ se factoriza a través de A/I. Pero

$$\operatorname{Hom}(A/I, M/L) = 0$$

ya que $A/I \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}$ y $M/L \in \mathbb{T} \subset \mathbb{H}$, de aquí que $q_{(K,L)} \circ f_K = f_L$, entonces, por la propiedad universal de $\varprojlim$, existe un morfismo $\bar{f}\colon A \longrightarrow M$ y es claro que este morfismo es una extensión de f.

Como consecuencia inmediata de este teorema y la proposición 1.5, tenemos el siguiente:

COROLARIO 2.4.—*Para todo $M \in A$-mod, existe un morfismo inyectivo $\sigma_M\colon M_{\mathbb{F}_{\mathbb{H}}} \longrightarrow M^{\mathbb{F}}$, único tal que el triángulo*

$$\begin{tikzcd}
& M^{\mathbb{F}} \\
M \arrow[ur, "\Phi_M"] \arrow[dr, "\psi_M"'] & \\
& M_{\mathbb{F}_{\mathbb{H}}} \arrow[uu, "\sigma_M"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo (Ψ_M *es el morfismo canónico en el localizado de M respecto a* $\mathbb{F}_H$).

PROPOSICIÓN 2.5.—*Para cada* $M \in A$*-mod,* σ_M *induce un isomorfismo entre*

$$c\,(M^{\mathbb{F}}/Im\ \Phi_M) \quad y \quad M_{\mathbb{F}_{H/Im\,\Psi_M}}$$

DEMOSTRACIÓN.—Identificamos a $\mathrm{Im}\ \Phi_M$ con $\mathrm{Im}\ \Psi_M$ (esto es posible ya que $\mathrm{Im}\ \Psi_M \cong M/c\,M \cong \mathrm{Im}\ \Phi_M$) y a $M_{\mathbb{F}_H}$ con $\mathrm{Im}\ \sigma_M$.

$$M_{\mathbb{F}_{H\,|\,\mathrm{Im}\,\Psi_M}} \in \mathbb{T}_H,$$

de aquí que

$$M_{\mathbb{F}_{H\,|\,\mathrm{Im}\,\Psi_M}} \subset c\,(M^{\mathbb{F}}/\mathrm{Im}\ \Phi_M).$$

Ahora, sea

$$N/M_{\mathbb{F}_H} = c\,(M^{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}_H}),$$

como $M_{\mathbb{F}_H}$ es $\mathbb{F}_H$-inyectivo, se tiene que $N = M_{\mathbb{F}_H} \oplus N'$ y de aquí que $N' \in \mathbb{T}_H$ ya que

$$N' \cong N/M_{\mathbb{F}_H} = c\,(N/M_{\mathbb{F}_H}),$$

pero $N' \subset M^{\mathbb{F}} \in \mathbb{H}$; por consiguiente, $N' = 0$ y $M^{\mathbb{F}}/M_{\mathbb{F}_H} \in \mathbb{H}$, de aquí que

$$M_{\mathbb{F}_{H\,|\mathrm{Im}\,\Psi_M}} = c\,(M^{\mathbb{F}}/\mathrm{Im}\ \Phi_M).$$

La proposición anterior nos dice que la cerradura topológica de $\Phi_M\,(M)$ en $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F})$ es $M_{\mathbb{F}_H}$.

EJEMPLO 1.—Sea $A = \mathbb{Z}$, p un número primo y $\mathbb{F} = \{p^n\,\mathbb{Z} \mid n \geqslant 0\}$ entonces $\mathbb{F}_H = \{m\,\mathbb{Z} \,/\, p \nmid m\}$ y de aquí que:

$\mathbb{Z}_{\mathbb{F}_H} = \mathbb{Z}_{(p)}$ es la localización de $\mathbb{Z}$ respecto a p, $\mathbb{Z}^{\mathbb{F}} = \hat{\mathbb{Z}}_p$ es el anillo de los enteros p-ádicos y $\sigma_{\mathbb{Z}}:\ \mathbb{Z}_{(p)} \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}_p$ es la inclusión.

EJEMPLO 2.—En [3] Goldman estudia la siguiente teoría de torsión:

$\mathbb{T} = \{M \mid M$ es semisimple y proyectivo$\}$.

PROPOSICIÓN.—*Si* $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *es la teoría de torsión de Goldie entonces* $(\mathbb{T}_{\mathbb{H}}, \mathbb{H})$ *es la teoría de torsión de Goldman.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea M un A-módulo proyectivo y semisimple y $N \in \mathbb{T}$, si $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ ent. $\mathrm{Im}\, f$ es semisimple proyectivo. Por consiguiente, $\mathrm{Im}\, f$ es no singular, por lo cual $\mathrm{Im}\, f = 0$, es decir $M \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}$.

Probaremos ahora que si $I \in \mathbb{F}_{\mathbb{H}}$ entonces A/I es proyectivo semisimple. $I \in \mathbb{F}_{\mathbb{H}}$ implica que A/I no contiene submódulos esenciales, por lo cual A/I es semisimple. Ahora sea ${}_AJ \subset A$ máximo tal que $I \cap J = 0$, entonces $I \oplus J$ es esencial en A y la inclusión $I \subset I \oplus J$ induce un epimorfismo $f\colon A/I \longrightarrow A/I \oplus J$, pero $A/I \in \mathbb{T}_{\mathbb{H}}$; por consiguiente, $f = 0$ entonces $A = I \oplus J$; por lo tanto, A/I es proyectivo.

III. COMPLECIÓN

Como se vio en la sección I, proposición 1.5, c), si $M \in \mathbb{T}$ entonces Φ_M es un isomorfismo, de aquí que la clase $\mathbb{T}$ es una clase de torsión hereditaria en A^F-mod; si denotamos por $\mathbb{F}^e$ al filtro de Gabriel asociado, entonces:

$$\mathbb{F}^e = \{ {}_{A^F}I \mid A^F/I \in \mathbb{T}\}.$$

TEOREMA 3.1.—$\mathbb{F}^e = \{I^F \mid I \in \mathbb{F}\}$.

DEMOSTRACIÓN.—De la proposición 1.5, f), se tiene que si $I \in \mathbb{F}$ entonces $A^F/I^F \cong A/I \in \mathbb{T}$, por lo cual $I^F \in \mathbb{F}^e$.

Ahora sea $J \in \mathbb{F}^e$, $I = \Phi_A^{-1}(J)$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dd, "0"'] & A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\Phi_A"] \arrow[dd, "\Phi_A"'] & A/I \arrow[r] \arrow[dr, "\Phi_{A/I}"] \arrow[dd, "f"'] & 0 \\
& & I^F \arrow[r] & A^F \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[dl, equal] & A^F/I^F \arrow[r] \arrow[dl, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & J \arrow[r] & A^F \arrow[r, "h"'] & A^F/J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{g}$, g, h son las proyecciones, f es el morfismo inducido por Φ_A y $\Phi_{A/I}$, y $\sigma((a_K + K) + I^F) = f(a_I + I)$.

σ es un A-morfismo entre módulos de torsión, entonces σ es un A^F-morfismo; por consiguiente, $\sigma \bar{g} = h$ ya que:

$$\begin{aligned}(\sigma \bar{g})(a_K + K) &= \sigma [(a_K + K)\, \bar{g}(1 + K)] = \\ = (a_K + K)\, \sigma((1 + K) + I^F) &= (a_K + K)[(1 + K) + J] = \\ &= h(a_K + K).\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que $I^F \subset J$.

Sea $(a_K + K) + I^F \in \operatorname{Ker} \sigma$, entonces:

$$\bar{0} = \sigma((a_K + K) + I^F) = f(a_I + I) = (a_I + K) + J.$$

Por lo cual $(a_I + K) \in J$ y entonces $a_I \in I = \Phi^{-1}(J)$, de donde:

$$(a_K + K) + I^F = \bar{0},$$

es decir, σ es monomorfismo, esto nos dice que $I^F \subset J$ es un epimorfismo, de aquí $I^F = J$.

Corolario 3.2.—*El espacio* $(A^F, \mathbb{F}^e)$ *es completo.*

Demostración.

$$\varprojlim_{\mathbb{F}^e} A^F/J = \varprojlim_{\mathbb{F}} A^F/I^F \cong \varprojlim_{\mathbb{F}} A/I = A^F.$$

Para cada A^F-módulo izquierdo M, denotamos por

$$\mathbb{F}^e(M) = \{{}_{A^F}N \mid M/N \in \mathbb{T}\},$$

si $M \in$ A-mod, tenemos las siguientes relaciones:

$$\{K^F \mid K \in \mathbb{F}(M)\} \subset \mathbb{F}^e(M^F) \subset \mathbb{F}(M^F).$$

Observación 3.3.—Si $M \in$ A-mod y $\mathbb{F}^e(M^F) = \{K^F \mid K \in \mathbb{F}(M)\}$ entonces $(M^F, \mathbb{F}^e(M^F))$ es completo.

DEFINICIÓN 3.4.—$M \in A$-mod es $\mathbb{F}$-completable si $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}}))$ es la compleción de $(M, \mathbb{F}(M))$.

PROPOSICIÓN 3.5.—*Sea $M \in A$-mod y $K \in \mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}})$, son equivalentes:*

a) $K = [\Phi_{M}^{-1}(K)]^{\mathbb{F}}$.

b) $K \supset [\Phi_{M}^{-1}(K)]^{\mathbb{F}}$.

DEMOSTRACIÓN.—a) $\Longrightarrow$ b) Inmediato.

b) $\Longrightarrow$ a) Sea $N = [\Phi_{M}^{-1}(K)]^{\mathbb{F}}$, consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[rr] \arrow[dr, "\Phi_N"] \arrow[dd] & & M \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\Phi_M"'] & & M/N \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "\wr\ g"] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & N^{\mathbb{F}} \arrow[rr] \arrow[dl, dashed, "\supset"'] & & M^{\mathbb{F}} \arrow[rr, "\bar{g}"] \arrow[dl, equal] & & M^{\mathbb{F}}/N^{\mathbb{F}} \arrow[r, dashed] \arrow[dl, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r, dashed] & K \arrow[rr] & & M^{\mathbb{F}} \arrow[rr, "h"] & & M^{\mathbb{F}}/K \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

donde f es el morfismo inducido por Φ_M y Φ_N, σ el morfismo inducido por $N^{\mathbb{F}} \subset K$.

Es claro que $\sigma \circ g = f$, entonces, con el mismo argumento que el útilizado en el teorema 3.1, tenemos que $N^{\mathbb{F}} \subset K$ es isomorfismo, es decir $N^{\mathbb{F}} = K$.

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que un módulo sea $\mathbb{F}$-completable.

TEOREMA 3.6.—*Sea $M \in A$-mod, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) $\Phi_M(M)$ *es denso en* $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}}))$.

b) $A^{\mathbb{F}}\,\Phi_M(M) + L = M^{\mathbb{F}}$ *para todo* $L \in \mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}})$.

c) $\mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}}) = \{K^{\mathbb{F}} \mid K \in \mathbb{F}(M)\}$.

d) $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}}))$ *es la compleción de* $(M, \mathbb{F}(M))$.

DEMOSTRACIÓN.—En vista de la Proposición 1.5, podemos suponer $M \in \mathbb{H}$, e identificar M con $\Phi_M(M)$.

a) $\Longrightarrow$ b) Es claro.

b) $\Longrightarrow$ c) Sea $K \in \mathbb{F}^{c}(M^{\mathbb{F}})$ y $N = \Phi_{M}^{-1}(K)$, consideremos nuevamente el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "\cap"'] & & M \arrow[rr] \arrow[dr, "\Phi_M"] \arrow[dd] & & M/N \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\wr"] & & 0 \\
& & N^{\mathbb{F}} \arrow[r, "\Phi_M"] & {} & M^{\mathbb{F}} \arrow[rr, "\bar{g}"] \arrow[dl, equal] & & M^{\mathbb{F}}/N^{\mathbb{F}} \arrow[r] \arrow[dl, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[rr] & & M^{\mathbb{F}} \arrow[rr, "h"] & & M^{\mathbb{F}}/K \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{g}$ y h son las proyecciones, f es el morfismo inducido por Φ_M y $\Phi_{M/N}$, y $\sigma((m_L + L) + N^{\mathbb{F}}) = (m_N + L) + K$.

El morfismo $\sigma \circ \bar{g} - h$ se anula en $A^{\mathbb{F}} M$, ya que:

$$\begin{aligned}
&(\sigma \circ \bar{g} - h)\,[(a_I + I)\,(X + L)] = \\
&= (a_I + I)\,[\sigma((X + L) + N^{\mathbb{F}}) - ((X + L) + K)] = \\
&= (a_I + I)\,[((X + L) - (X + L)) + K] = 0
\end{aligned}$$

entonces:

$$A^{\mathbb{F}} M \subset \operatorname{Ker}(\sigma \circ \bar{g} - h).$$

$M/K \in \mathbb{T}$ implica

$$\operatorname{Ker}(\sigma \circ \bar{g} - h) \in \mathbb{F}^e(M^{\mathbb{F}})$$

por lo tanto, aplicando b), tenemos que

$$\operatorname{Ker}(\sigma \circ \bar{g} - h) = A^{\mathbb{F}} M + \operatorname{Ker}(\sigma \circ \bar{g} - h) = M^{\mathbb{F}},$$

de aquí que $\sigma \circ \bar{g} = h$, esto nos dice que

$$[\Phi_M^{-1}(K)]^{\mathbb{F}} \subset K,$$

aplicando la Proposición anterior, completamos la prueba.

c) $\Longrightarrow$ a) Sea $(X_K + K) \in M^{\mathbb{F}}$ y $N^{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}^e(M^{\mathbb{F}})$, consideremos la composición

$$M^{\mathbb{F}} \xrightarrow{g} M^{\mathbb{F}}/N^{\mathbb{F}} \xrightarrow{h} M/N$$

donde g es la proyección y h el isomorfismo

$$h\,[(X_K + K) + N^{\mathbb{F}}] = X_N + N,\ \operatorname{Ker}(h\,g) = \operatorname{Ker} g = N^{\mathbb{F}},$$

es claro que

$$(X_K + K) - (X_N + K) \in \operatorname{Ker}(h\,g)$$

de aquí que

$$(X_N + K) \in [(X_K + K) + N^{\mathbb{F}}]$$

lo cual prueba que $\Phi_M(M)$ es denso en $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^c(M^{\mathbb{F}}))$.

a) + b) + c) $\Longrightarrow$ d) por c), a), y la observación 3.3; tenemos que: $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^c(M^{\mathbb{F}}))$ es completo y $\Phi_M(M)$ es denso en $(M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^c(M^{\mathbb{F}}))$, la relación $\mathbb{F}^c(M^{\mathbb{F}}) \subset \mathbb{F}(M^{\mathbb{F}})$ implica la continuidad de

$$\Phi_M : (M, \mathbb{F}_{(M)}) \longrightarrow (M^{\mathbb{F}}, \mathbb{F}^c(M^{\mathbb{F}}))$$

finalmente, c) nos dice que la topología en $\Phi_M(M)$ inducida por $\mathbb{F}^c(M^{\mathbb{F}})$, es $\mathbb{F}(M)$.

d) $\Longrightarrow$ a) Inmediato.

Terminamos esta sección dando un ejemplo de filtros para los cuales todo módulo es completable.

PROPOSICIÓN 3.7.—*Sea* $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ *una teoría de torsión estable,* $\mathbb{T}\ \mathbb{L}\ \mathbb{T}$ *en A-mod, con filtro asociado* $\mathbb{F}$, *entonces:*

1) $(M, \mathbb{F}(M))$ *es completo si y sólo si* $M \in \mathbb{T}$.

2) *Todo* A-módulo *izquierdo es* $\mathbb{F}$-completable.

3) $A^{\mathbb{F}} \cong A_{\mathbb{F}_{\mathbb{R}}}$ y $(\ )^{\mathbb{F}} \cong A^{\mathbb{F}} \underset{A}{\otimes} - \cong (\ )_{\mathbb{F}_{\mathbb{R}}}$.

DEMOSTRACIÓN.—Se sigue del siguiente hecho: Si $\mathbb{F}$ es estable y $\mathbb{T}\ \mathbb{L}\ \mathbb{T}$ e I es el ideal bilateral, idempotente, generador de $\mathbb{F}$, entonces $c\,M = I\,M$ y $(A/I)_A$ es plano.

IV. COMPLECIONES DE ANILLOS MORITA EQUIVALENTES

Sean A y B anillos Morita equivalentes, con equivalencia dada por funtores

$$\mathcal{F} = P \otimes_A - : A\text{-mod} \longrightarrow B\text{-mod}$$

y

$$\mathcal{H} = \underset{\sim}{Q} \otimes_B - : \text{B-mod} \longrightarrow \text{A-mod}$$

con ${}_BP_A$ y ${}_A\underset{\sim}{Q}_P$ progeneradores.

Si $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$ es una teoría de torsión hereditaria en A-mod, entonces $(\mathcal{F}(\mathbb{T}), \mathcal{F}(\mathbb{L}))$ es una teoría de torsión hereditaria en B-mod; de esta forma, se obtiene una correspondencia biyectiva entre teorías de torsión hereditarias en A-mod y teorías de torsión hereditarias en B-mod. Si $\mathbb{F}$ es el filtro de Gabriel asociado a $(\mathbb{T}, \mathbb{L})$, denotamos por $\mathbb{F}'$ al filtro en B, asociado a $(\mathcal{F}(\mathbb{T}), \mathcal{F}(\mathbb{L}))$.

PROPOSICIÓN 4.1.—*Con la notación anterior,*

$$\mathbb{F}'({}_BP) = \{P\,I \mid I \in \mathbb{F}\}.$$

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia del hecho que la correspondencia inducida por $\mathcal{F}$, $I \rightsquigarrow P\,I$ es una biyección entre la red de ideales izquierdos de A y la red de B-submódulos de P.

OBSERVACIÓN 4.2.—$P^{\mathbb{F}'}$ tiene estructura de $A^{\mathbb{F}}$-módulo derecho con la siguiente operación (ver [6]):

Si $(X_I + P\,I) \in P^{\mathbb{F}'}$ y $(a_I + I) \in A^{\mathbb{F}}$, entonces:

$$(X_I + P\,I)\,(a_I + I) = (X_{(I\,:\,a_I)}\,a_I + P\,I).$$

PROPOSICIÓN 4.3.—*$P^{\mathbb{F}'}$ es un $B^{\mathbb{F}'} - A^{\mathbb{F}}$-bimódulo.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean $(b_J + J) \in B^{\mathbb{F}'}$, $(X_I + P\,I) \in P^{\mathbb{F}'}$ y $(a_I + I) \in A^{\mathbb{F}}$, entonces:

$$\begin{aligned}(b_J + J)\,[(X_I + P\,I)\,(a_I + I)] &= (b_J + J)\,[(X_{(I\,:\,a_I)}\,a_I + P\,I] = \\ &= [b_{(P\,I\,:\,X_{(I\,:\,a_I)}\,a_I)}\,X_{(I\,:\,a_I)}\,a_I + P\,I];\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}[(b_J + J)\,(X_I + P\,I)]\,(a_I + I) &= [b_{(P\,I\,:\,X_I)}\,X_I + P\,I]\,(a_I + I) = \\ &= [b_{(P\,(I\,:\,a_I)\,:\,X_{(I\,:\,a_I)})}\,X_{(I\,:\,a_I)}\,a_I + P\,I],\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que:

$$[P\,(I : a_I) : X_{p\,(I\,:\,a_J)}] \subset [P\, I : X_{p\,(I\,:\,a_J)}\, a_I],$$

tenemos que:

$$(b_J + J)\, [(X_I + P\, I)\, (a_I + I)] = [(b_J + J)\, (X_I + P\, I)]\, (a_I + I).$$

PROPOSICIÓN 4.4.— ${}_{B^{\mathbb{F}'}}P^{\mathbb{F}'}$ *es progenerador.*

DEMOSTRACIÓN.—Es consecuencia de la proposición 1.1 junto con el hecho de que ${}_{B}P$ es progenerador.

PROPOSICIÓN 4.5.—$B^{\mathbb{F}'}\, \Phi_p\, (P) = P^{\mathbb{F}'}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B^n = P \otimes K$, entonces:

$$(B^n)^{\mathbb{F}'} = (B^{\mathbb{F}'})^n = B^{\mathbb{F}'}\, (B^n) = B^{\mathbb{F}'}\, P \oplus B^{\mathbb{F}'}\, K$$

pero $B^{\mathbb{F}'}\, P \subset P^{\mathbb{F}'}$, $B^{\mathbb{F}'}\, K \subset K^{\mathbb{F}'}$ y $(B^n)^{\mathbb{F}'} = P^{\mathbb{F}'} \oplus K^{\mathbb{F}'}$; por tanto, $B^{\mathbb{F}'}\, P = P^{\mathbb{F}'}$.

TEOREMA 4.6.—*Sean A y B anillos Morita equivalentes y $\mathbb{F}$ un filtro de Gabriel en A, entonces, con la notación de esta sección, $A^{\mathbb{F}}$ y $B^{\mathbb{F}'}$ son Morita equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN.—Sean

$$\mathcal{F} = P \underset{B}{\otimes} - : A\text{-mod} \longrightarrow B\text{-mod}$$

y

$$\mathcal{H} = Q \underset{B}{\otimes} - : B\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$$

los funtores que dan la equivalencia, entonces $A \cong \mathrm{End}\, ({}_{B}P)$; probaremos que $A^{\mathbb{F}} \cong \mathrm{End}\, ({}_{B^{\mathbb{F}'}}P^{\mathbb{F}'})$ y de aquí, por el Corolario 22.4 de [1] y la proposición 4.4, tendremos que $A^{\mathbb{F}}$ y $B^{\mathbb{F}'}$ son Morita equivalentes.

Sea

$$L : A^{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathrm{End}\, ({}_{B^{\mathbb{F}'}}P^{\mathbb{F}'})\ L\, (a_I + I)\, (X_I + P\, I) =$$
$$= (X_I + P\, I)\, (a_I + I)$$

la Proposición 4.3 nos dice que

$$L(a_I + I) \in \operatorname{End}({}_{B_{\mathcal{F}'}}P^{\mathcal{F}'}).$$

Si $(a_I + I) \in \operatorname{Ker} L$ entonces, para todo $(X_I + P\,I) \in P^{\mathcal{F}'}$, se tiene que

$$0 = (X_I + P\,I)(a_I + I);$$

en particular, para todo $X \in P$, $X\,a_I \in P\,I$, teniendo en cuenta que P_A es progenerador, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $P^m = A \oplus K$ y de esta descomposición obtenemos que cada elemento de $(P\,I)^m$ se puede expresar de forma única como un elemento de I más un elemento de K I, como consecuencia tenemos que $X\,a \in P\,I$ para todo $X \in P$ implica $a \in I$, de esto se sigue que L es inyectiva.

Ahora sea $f \in \operatorname{End}({}_{B_{\mathcal{F}'}}P^{\mathcal{F}'})$, consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\Phi_P"] \arrow[dr, dotted, "f_I"'] & P^{\mathcal{F}'} \arrow[r, dotted, "f"'] & P^{\mathcal{F}'} \arrow[d, "q_I"] \\
& P \arrow[r, "\bar{q}_I"'] & P/I\,P
\end{tikzcd}$$

donde q_I, $\bar{q}_I$ son las proyecciones canónicas y f_I es un levantamiento de $q_I\,f\,\Phi_P$.

El isomorfismo entre A y $\operatorname{End}({}_BP)$ nos dice que existe $a_I \in A$ tal que $f_I(X) = X\,a_I$. El morfismo $[f - L(a_I + I)]$ se anula en $\Phi_p(P)$, aplicando aquí la proposición 4.5 tenemos que $f = L(a_I + I)$ y esto completa la prueba.

REFERENCIAS

[1] ANDERSON, F. y FULLER, K.: *Rings and Categories of Modules.* Springer Verlag, 1974.

[2] COLAVITA, J., RAGGI, F. y RÍOS, J.: *Sobre filtros estables de Gabriel.* V. «Anales del Instituto de Matemáticas», UNAM, 17, núm. 1 (1977), págs. 1-16.

[3] GOLDMAN, O.: *A Wedderburn-Artin-Jacobson Structure Theorem.* «Journal of Algebra», 34 (1975), págs. 64-73.

[4] LAMBEK, J.: *Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients.* «Lecture notes in math», V, 177. Springer, 1971.

[5] STENSTRÖN, BO.: *Rings of Quotients.* Springer Verlag, Band 217, 1975.

[6] STENSTRÖM, BO.: *On the completion of modules in additive topology.* «J. Algebra», 16, 523-540 (1970).