LA ECUACION DE BELLMAN-DIRICHLET PARA DOS OPERADORES PARABOLICOS

por

LUIS HERRANZ LUCAS (*)

R E S U M E N

Se demuestra existencia, unicidad y continuidad respecto a los datos iniciales para la ecuación

$$\max_{i=1,2} \{u' + A_i u - f_i\} = 0$$

donde A_i son operadores uniformemente elípticos de 2.º orden.

INTRODUCCIÓN

La ecuación de Bellman-Dirichlet

$$\max_{i=1,2} \{A_i u - f_i\} = 0$$

en Ω (abierto acotado de R^n con frontera Γ), $u = 0$ en Γ, para dos operadores A_i uniformemente elípticos ha sido estudiada en [1]. Esta ecuación es un caso especial de la ecuación de Bellman de Programación Dinámica para el control óptimo de ciertos sistemas estocásticos; el control óptimo es precisamente la solución de la ecuación de B-D: En [2] se prueba que la solución de un problema de control estocástico coincide con la solución (en sentido conveniente) del problema de Dirichlet no lineal

$$\sup \{A(v) u - f(v), v \in V\} = 0 \text{ en } \Omega, u = 0 \text{ en } \Gamma,$$

donde V es el conjunto de controles. Resultados de regularidad para el caso elíptico son dados en [1,2,3].

Cuando $\Omega = R^n$ y por métodos estocásticos, en [4], N.V. Krylov ha

(*) Este trabajo ha sido parcialmente realizado con una ayuda I. B. M.

obtenido resultados generales para la ecuación de B-D (consultar la bibliografía que sobre este autor se cita en [5]).

En [5] se prueba existencia, unicidad y regularidad de la solución de la ecuación de B-D para operadores elípticos y una restricción

$$\max \{A_i u - f_i, u - \Psi\} = 0,$$

correspondiente a un problema de control estocástico con tiempo de parada óptimo. Se estudia también la ecuación para un operador parabólico y otro elíptico, ecuación esta última que interviene en Economía como un problema de mantenimiento óptimo, mediante un método de «regularización parabólica» que la convierte en una ecuación del tipo de la estudiada aquí.

Ecuación de Bellman-Dirichlet

Sea Ω abierto acotado de R^n de frontera regular Γ. Consideramos el siguiente problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} \max\limits_{i=1,2} \{u' + A_i u - f_i\} = 0 \text{ en } \Omega \times (0, T) = Q \text{ c.p. d.}, \\ u(0) = u_0, \\ u \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1), \end{cases}$$

donde

$$(2) \qquad A_i u = - a^i_{kj}(x, t)\, u_{kj} + b^i_k(x, t)\, u_k + c_i(x,t)\, u$$

(sobreentendiendo que se suma en índlces repetidos) siendo los coeficientes de (2) pertenecientes a $C^1(0, T; C^2(\overline{\Omega}))$, $i = 1, 2$, $1 \leq k, j \leq n$,

$$(3) \qquad u_0 \in H^1_0(\Omega),$$

$$(4) \qquad f_i \in L^2(Q).$$

Supondremos también que

(5) Existen $\Theta \geq \theta > C$ tal que

$$\theta \mid \xi \mid^2 \leq a^i_{kj}(x, t)\, \xi_k \xi_j \leq \Theta \mid \xi \mid^2 \text{ para } i = 1, 2, (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n \text{ y } (x, t) \in Q.$$

Nota 1.— Según (1) y [6] I, u es continua de $[0, T]$ en

$$[H^2, L^2]_{1/2} \cap H^1_0 = H^1_0(\Omega),$$

así que (3) tiene sentido.

Nota 2.— Pongamos $\bar{f}_i = f_i e^{-\mu t}$ en (1) y consideremos el problema

$$
(6) \qquad \begin{cases} \max\limits_{i=2,1} \{v' + A_i v + \mu v - \bar{f}_i\} = 0 \text{ en } Q, \ \mu > 0, \\ v(0) = u_0, \\ v \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H^1_0). \end{cases}
$$

Se tiene que $u = v e^{\mu t}$ es solución de (1) sii v lo es de (6), de manera que podemos suponer que, en (1), tenemos $A_i + \mu I$ en lugar de A_i y para μ tan grande como queremos (es por esto que no es necesario suponer que $c^i \geq 0$).

Con las consideraciones de la nota 2 y para μ suficientemente grande podemos suponer que se tiene el

Lema 1.— [1] Con las hipótesis (2) y (5) existe $\alpha > 0$ (dep. de Ω, A_i) tal que, para todo $t \in (0, T)$,

$$
\alpha \| v \|^2_2 \leq \int_\Omega A_1 v \, A_2 v \, dx \qquad \forall v \in H^2 \cap H^1_0.
$$

($\| \cdot \|_{2,1}$ = norma en $H^{2,1}(Q)$, $\| \cdot \|_2$ = norma en $H^2(\Omega)$, $\| \cdot \|_1$ = norma en $H^1(\Omega)$, $\| \cdot \|$ = norma en $L^2(Q)$, $| \cdot |$ = norma en $L^2(\Omega)$).

Consecuencia inmediata del Lema 1 es

$$
(7) \qquad \alpha \int_0^t \| v \|^2_2 \, ds \leq \int_0^t (A_1 v, A_2 v) \, ds,
$$

para todo $t \in [0, T]$ y para todo $v \in L^2(0, T; H^2 \cap H^1_0)$. $((.,.)$ designa el producto escalar en $L^2(\Omega))$.

Para probar la existencia de solución del problema (1) comenzaremos por eliminar f_2 y u_0 en (1):

Sea $\bar{u}$ la solución única de $(\Sigma = \Gamma \times (0, T))$

$$
\begin{cases} \bar{u}' + A_2 \bar{u} = f_2, \\ \bar{u}(0) = u_0, \\ \bar{u} \mid_\Sigma = 0, \end{cases}
$$

que verifica, por (2) — (5) y [6] II,

$$\bar{u} \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H^1_0).$$

Pongamos $v = u - \bar{u}$ y sustituyamos en (1):

$$\begin{cases} \max\{v' + A_1 v - f_1 + \bar{u}' + A_1 \bar{u}, v' + A_2 v\} = 0, \\ v(0) = 0, \\ v \mid_\Sigma = 0, \text{ ó sea} \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \max\{v' + A_1 v - f, v' + A_2 v\} = 0, \\ v(0) = 0, \\ v \mid_\Sigma = 0, \text{ donde } f = f_1 - \bar{u}' - A_1 \bar{u} \in L^2(Q). \end{cases}$$

Si ahora probamos la existencia y unicidad de solución v de (8) verificando $v \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H^1_0)$, tendremos que existe solución única de (1).

Sea $\varnothing \in L^2(Q)$ cualquiera, sea v la solución única de

$$\begin{cases} L_2 v = v' + A_2 v = \varnothing, \\ v(0) = 0, \\ v \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H^1_0) \end{cases}$$

y pongamos $K\varnothing = L_1 v = L_1 (L_2)^{-1} \varnothing$, con lo que (8) se convierte en

$$(9) \qquad \begin{cases} \max\{K\varnothing - f, \varnothing\} = 0, \\ \varnothing \in L^2(Q). \end{cases}$$

K es claramente lineal y continuo de $L^2(Q)$ en sí mismo y probaremos con una hipótesis adicional suave, que es monótono y coercivo en $L^2(Q)$, con lo que ([7]) existe solución única $\varnothing$ de (9) (ya que (9) es una inecuación variacional clásica:

$$(K\varnothing, \Psi - \varnothing) \geq (f, \Psi - \varnothing)$$

para todo $\Psi \in L^2(Q)$, $\Psi \leq 0$) y por tanto tenemos resuelto el problema (1)

Lema 2.— Sea $A_i = \tilde{A}_i - B_i$ donde $\tilde{A}_i = \tilde{A}_i^*$ y B_i es un operador de primer orden propiamente. Para μ suficientemente grande existe $\bar{\alpha} > 0$ (dep. de Ω, A_i) tal que

$$(10) \qquad \bar{\alpha} \| v \|^2_{2,1} \leq \int_0^T (\bar{L}_1 v, \bar{L}_2 v)\, dt,$$

para todo

$$v \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H^1_0),\ v(0) = 0,$$

donde hemos puesto $\bar{L}_i = L_i + \mu I$, $i = 1, 2$.

DEMOSTRACIÓN. — Comencemos suponiendo que $v \in C^3(Q)$ y $v \mid_\Sigma = 0$. Se tiene, en virtud de (7),

$$\int_0^T (\bar{L}_1 v, \bar{L}_2 v)\, dt \geq \int_0^T \mid v' \mid^2 dt + \alpha \int_0^T \| v \|^2_2\, dt +$$

$$+ \mu^2 \int_0^T \mid v \mid^2 dt + 2\mu \int_0^T (v', v)\, dt + \mu \int_0^T (v, A_1 v)\, dt +$$

$$+ \mu \int_0^T (v, A_2 v)\, dt + \int_0^T (v', A_1 v)\, dt + \int_0^T (v', A_2 v)\, dt,$$

que, con (5), se convierte en: $(c_1 > 0)$

$$\int_0^T (\bar{L}_1 v, \bar{L}_2 v)\, dt \geq \int_0^T \mid v' \mid^2 dt + \alpha \int_0^T \| v \|^2_2\, dt + \tag{11}$$

$$+ \mu^2 \int_0^T \mid v \mid^2 dt + \mu \mid v(T) \mid^2 - \mu \mid v(0) \mid^2 +$$

$$+ 2\mu c_1 \int_0^T \| v \|^2_1\, dt + I_1 + I_2.$$

Acotamos inferiormente

$$I_i = \int_0^T (v', A_i v)\, dt, \quad i = 1, 2:$$

Poniendo A en lugar de A_i y B en lugar de B_i, $\tilde{A}$ autoadjunto, se tiene

$$I = \int_0^T (v', \tilde{A} v)\, dt - \int_0^T (v', B v)\, dt.$$

Puesto que

$$\frac{d}{dt}(v, \tilde{A} v) = (v', \tilde{A} v) + (v, \tilde{A}' v) + (v, \tilde{A} v'),$$

tenemos

$$\int_0^T (v', \tilde{A}\, v)\, d\, t = (v\,(T), \tilde{A}\,(T)\, v\,(T)) - (v\,(0), \tilde{A}\,(0)\, v\,(0)) -$$

$$- \int_0^T (v, \tilde{A}'\, v)\, d\, t - \int_0^T (v, \tilde{A}\, v')\, d\, t,$$

de donde, teniendo en cuenta que $\tilde{A}'$ es autoadjunto, $v \mid_\Sigma = 0$,

$$v' \mid_\Sigma = 0, \;\; v' \in C^2\, (\overline{Q}),$$

resulta

$$2 \int_0^T (v', \tilde{A}\, v)\, d\, t = (v\,(T), \tilde{A}\, v\,(T) - (v\,(0), \tilde{A}\, v\,(0)) - \int_0^T (v, \tilde{A}'\, v)\, d\, t$$

pero, usando la continuidad de $\tilde{A}'$ de H^2 en L^2,'

$$(c_2 > 0) - \int_0^T (v, \tilde{A}'\, v)\, d\, t \geq - \frac{1}{2}\, \delta^{-1} \int_0^T |\, v\,|^2\, d\, t - \frac{1}{2}\, \delta\, c_2 \int_0^T \|\, v\,\|^2_2\, d\, t$$

para todo $\delta > 0$, así que,

$$\int_0^T (v', \tilde{A}\, v)\, d\, t \geq \frac{1}{2}\, (v\,(T), \tilde{A}\,(T)\, v\,(T)) - \frac{1}{2}\, (v\,(0), \tilde{A}\, v\,(0)) -$$

$$(12) \qquad - \frac{1}{4}\, \delta^{-1} \int_0^T |\, v\,|^2\, d\, t - \frac{1}{4}\, \delta\, c_2 \int_0^T \|\, v\,\|^2_2\, d\, t.$$

Por otra parte B es continuo de H^1_0 en L^2 de manera que, para todo $\delta > 0$, $(c_3 > 0)$

$$(13) \quad - \int_0^T (v', B\, v)\, d\, t \geq - \frac{1}{2}\, \delta \int_0^T |\, v'\,|^2\, d\, t - \frac{1}{2}\, c_3\, \delta^{-1} \int_0^T \|\, v\,\|^2_1\, d\, t.$$

De (12) y (13) tenemos:

$$I_1 + I_2 \geq -\frac{1}{2}\left[(v(0), \tilde{A}_1(0)\, v(0)) + (v(0), \tilde{A}_2(0)\, v(0))\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\delta^{-1}\int_0^T |v|^2\,dt - \frac{1}{2}\delta\, c_2 \int_0^T \|v\|_2^2\,dt - \delta \int_0^T |v'|^2\,dt -$$

$$-\,\delta^{-1} c_3 \int_0^T \|v\|_1^2\,dt. \tag{14}$$

Sustituyendo (14) en (11) resulta en definitiva

$$\int_0^T (\overline{L}_1 v, \overline{L}_2 v)\,dt \geq \left(\alpha - \frac{1}{2}\delta\, c_2\right)\int_0^T \|v\|_2^2\,dt + \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\delta^{-1}\right)\cdot$$

$$\cdot \int_0^T |v|^2\,dt + (1-\delta)\int_0^T |v'|^2\,dt + (2\mu c_1 - \delta^{-1} c_3)\,\cdot$$

$$\cdot \int_0^T \|v\|_1^2\,dt - \left[\mu\, |v(0)|^2 + \frac{1}{2}(v(0), \tilde{A}_1(0)\, v(0)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(v(0), \tilde{A}_2(0)\, v(0))\right],$$

que, tomando δ suficientemente pequeño y, después, μ suficientemente grande, se convierte en

$$\int_0^T (\overline{L}_1 v, \overline{L}_2 v)\,dt \geq \overline{\alpha}\left(\int_0^T \|v\|_2^2\,dt + \int_0^T |v'|^2\,dt\right) -$$

$$-\left(\mu\, |v(0)|^2 + \frac{1}{2}\ldots\right). \tag{15}$$

Como ([6] II) $C^3(Q)$ es denso en $H^{2,1}(Q)$ y, si $v_n \in C^3(Q)$ converge a v en $H^{2,1}(Q)$, se tiene que $v_n(t)$ converge a $v(t)$ para todo t en virtud de la continuidad de la inyección de $H^{2,1}(Q)$ en $C(0, T; L^2(\Omega))$ (de hecho — nota 1 — en $C(0, T; H^1)$), basta pasar al límite en (15), teniendo en cuenta que $v(0) = 0$, para tener (10).

Ahora en virtud del lema 2 y la nota 2

$$\int_0^T (K\varnothing, \varnothing)\, dt = \int_0^T (L_1 v, L_2 v)\, dt \geq \bar{\alpha} \| v \|^2_{2,1} \geq c \| \varnothing \|^2, \; c > 0,$$

ya que L_2 es continuo de $H^{2,1}(Q)$ en $L^2(Q)$.

Podemos entonces enunciar :

Teorema 1. — En las hipótesis (2) — (5) y la adicional del lema 2 existe una única solución del problema (1).

Probaremos por último una propiedad, de la solución de (1), de continuidad respecto a los datos iniciales, concretamente:

Teorema 2. — Sea u (resp. v) solución de (1) correspondiente a f_1, f_2, u (resp. g_1, g_2, v_0). Existe c (dep. de Ω, A_1, A_2) tal que

$$\| u - v \|_{2,1} \leq c (\| f_1 - g_1 \| + \| f_2 - g_2 \| + \| u_0 - v_0 \|_1 + | u_0 - v_0 |)_0$$

Demostración. — (Suponemos μ suficientemente grande). Introduzcamos el grafo maximal monótono de R^2:

$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ [0, +\infty) & \text{si } x = 0 \\ \varnothing & \text{si } x > 0; \quad D(\beta) = (-\infty, 0]; \end{cases}$$

llamando también β a su prolongamiento (maximal monótono) a $L^2(Q)$, el problema (1) resulta equivalente a

$$(16) \qquad \begin{cases} 0 \in L_1 u - f_1 + \beta(L_2 u - f_2), \\ u(0) = u_0, \\ u \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1). \end{cases}$$

Pongamos en (16) v, v_0, g_1, g_2 y restemos: $w = u - v$,

$$(17) \qquad \begin{cases} 0 \in L_1 w - (f_1 - g_1) + \beta(L_2 u - f_2) - \beta(L_2 v - g_2), \\ w(0) = u_0 - v_0, \\ w \in H^{2,1}(Q) \cap L^2(0, T; H_0^1). \end{cases}$$

Multiplicando en (17) por $L_2 w - (f_2 - g_2)$ e integrando en (0, T), debido a la monotonía de β, se tiene:

$$\int_0^T (L_1 w - (f_1 - g_1), L_2 w - (f_2 - g_2))\, dt \leq 0$$

y poniendo $\varphi_i = f_i - g_i$, $w_0 = w(0)$, tenemos:

$$\int_0^T (L_1 w, L_2 w)\, dt \leq \int_0^T (L_1 w, \varphi_2)\, dt + \int_0^T (L_2 w, \varphi_1)\, dt +$$
$$+ \int_0^T |(\varphi_1, \varphi_2)|\, dt,$$

de donde, por (15) y (17),

$$\| w \|^2_{2,1} \leq c' \left(\int_0^T [(L_1 w, \varphi_2) + (L_2 w, \varphi_1) + |(\varphi_1, \varphi_2|]\, dt + \right.$$

(18) $$\left. + |w_0|^2 + (w_0, \tilde{A}_1(0) w_0) + (w_0, \tilde{A}_2(0) w_0) \right).$$

Pero

$$\int_0^T (L_i w, \varphi_{3-i})\, dt \leq \left(\int_0^T |L_i w|^2\, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T |\varphi_{3-i}|^2\, dt \right)^{1/2} \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \delta \| L_i w \|^2 + \frac{1}{2} \delta^{-1} \| \varphi_{3-i} \|^2 \leq \frac{c_i}{2} \delta \| w \|^2_{2,1} + \frac{1}{2} \delta^{-1} \| \varphi_{3-i} \|^2$$

(en virtud de la continuidad de L_i de $H^{2,1}$ en L^2) y

$$(w_0, \tilde{A}_i(0) w_0) \leq c_{i+2} \| w_0 \|_1^2;$$

así que (18) da, tomando δ suficientemente pequeño,

(19) $$\| w \|^2_{2,1} \leq c\, (\| \varphi_1 \|^2 + \| \varphi_2 \|^2 + |w_0|^2 + \| w_0 \|_1^2),$$

que demuestra el teorema.

NOTA.—Poniendo en (19) $w\,e^{-\mu t}$ y $\varphi_i\,e^{\mu t}$, vemos que el teorema 2 vale cuando $\mu = 0$.

REFERENCIAS

[1] BRÉZIS, H.-EVANS, L. C.: *A variational inequality approach to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators*. MRC Tech. Summary Report, 1789. Univ. of Wisconsin-Madison, 1977.

[2] LIONS, P. L.-MENALDI, J. L.: *Problèmes de contrôle d'integrales estochastiques et équations de Bellman*. CRAS, 1978, Paris.

[3] EVANS, L. C.-LIONS, P. L.: *Deux résultats de regularité pour le problème de Bellman-Dirichlet*. CRAS, 286, A, 1978, Paris.

[4] KRYLOV, N. V.: *Control of a solution of a stochastic integral equation*. «Theory Prob. and Appl.», 17, 1972, 114-131.

[5] LIONS, P. L.: *Some problems related to the Bellman-Dirichlet equation for two elliptic operators*. MRC Tech. Summary Report, 1816. Univ. of Wisconsin-Madison, 1978.

[6] LIONS, J. L.-MAGENES, E.: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. I, II. Dunod.

[7] LIONS, J. L.-STAMPACCHIA, G.: *Variational inequalities*. «Comm. Pure Appl. Maths.», XX, 1967, 493-519.

Departamento de Ecuaciones Funcionales
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla