FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL CON VALORES EN UN ESPACIO VECTORIAL DE CONVERGENCIA. I. DERIVADAS

por

FERNANDO CASTAÑEDA BRAVO (Valladolid)

ABSTRACT

Any order derivations of functions of a real variable with values in a convergence vector space over $\mathbb{R}$ (c.v.s.) has been defined. This will allow us to develope (in a following paper) the integration for this type of functions. Some results have been obtained: we build up a c.v.s. isomorphism between a c.v.s. F and the c.v.s. $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}\,;\,F)$ —the continuous linear mappings of $\mathbb{R}$ into F endowed with the continuous convergence structure Λ_c—. We prove a function $f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow F$ to be of class C^n if, and only if, it is of class C^n_c, $n \in \mathbb{N}$. The relation among the derivative of any order of a function with values in a finite product of c.v.s. and the derivatives of the component functions has been established. A formula for the derivative of any order for the product of m functions, and another one for the higher derivative of a composed function are given. Some other results have been established.

INTRODUCCIÓN

El objeto de este trabajo es definir la derivación, de cualquier orden, de funciones de variable real valoradas en un espacio vectorial de convergencia sobre $\mathbb{R}$ (abr.: e.v.c.). Por un lado, extendemos a este caso algunos resultados clásicos para espacios de Banach (ver [3], cap. I) o, para espacios vectoriales topológicos y en particular espacios localmente convexos (ver, entre otros, [5], Apéndice 1; [1]; [7]; [8] y [9]); por otro lado, a partir de estos resultados, definiremos y estudiaremos (en un trabajo posterior) la integración de este tipo de funciones (ver, por ejemplo, [3], cap. II; [5], Ap. 2), lo que nos permitirá dar una solución satisfactoria a los problemas que dejamos planteados en

[4] (ver introducción); entre otros, un teoremas de incrementos finitos y una fórmula de Taylor para aplicaciones entre e.v.c.

La definición de un e.v.c., así como las notaciones y terminología utilizadas, pueden verse en [4].

Todas las funciones que vamos a considerar estarán definidas en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales y tomarán sus valores en un e.v.c.

1. Derivada primera

Con la letra I representaremos siempre un intervalo de $\mathbb{R}$ no reducido a un punto.

Definición 1.1.—*Sean F un e.v.c. y* $f : I \longrightarrow F$ *una función. Diremos que* f *es derivable en un punto* $t_0 \in I$, *si existe en F el*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

El valor de este límite lo llamaremos derivada primera (o, simplemente, derivada) de f *en el punto* t_0, *y lo escribiremos* $f'(t_0)$.

Si una función f, definida en I, es derivable en un punto $t_0 \in I$, es, necesariamente, continua en ese punto.

Ejemplos.—Una función constante tiene derivada en todo punto y es nula. Una función lineal (continua) u: $\mathbb{R} \longrightarrow F$ tiene derivada en todo punto, y se verifica que $u'(t) = u(1)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; luego u' es constante. Observemos que $(1/(t - t_0))(u(t) - u(t_0)) = u(1)$, para todos t, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2.—*Diremos que una función* $f: I \longrightarrow F$ *es derivable en I, si es derivable en todo punto de I. La función* $t \longrightarrow f'(t)$ *de I en F le llamaremos función derivada (o, simplemente, derivada) de* f, *y la representaremos por* f'.

Observación: Una función puede ser derivable en un intervalo sin que su derivada sea continua en todo punto. Por ello damos la siguiente:

Definición 1.3.—*Una función* $f: I \longrightarrow F$ *se dice de clase* C^1 *(en I) si es derivable en I y si su función derivada* $f': I \longrightarrow F$ *es continua.*

Es sabido que $\mathbb{R}$ (con su topología usual) puede ser considerado como un e.v.c. —los filtros convergentes a cero son todos los más finos que el filtro de los entornos de cero—. Así pues, para una función de $\mathbb{R}$ en F, tiene sentido preguntarse si es de clase C^1_c ([4], cap. III, defs. 1.1 a 1.5), y qué relación guarda este hecho con que f sea clase C^1. Veamos, en este sentido, las dos proposiciones siguientes:

PROPOSICIÓN 1.4.—*Sea una función continua* f: $\mathbb{R} \longrightarrow F$. f *es derivable en un punto* $t_0 \in \mathbb{R}$ *si y sólo si* f *es diferenciable en este punto* ([4], cap. III, def. 1.2).

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que f es derivable en $t_0 \in \mathbb{R}$. Sea $h \in \mathbb{R}$ cualquiera. Veamos, si existe y cuánto vale

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t_0 + t\,h) - f(t_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{h\,[f(t_0 + t\,h) - f(t_0)]}{t\,h} = h f'(t_0)$$

Luego existe la derivada direccional de f en el punto t_0 y en cualquier dirección h y vale $h f'(t_0)$. Así pues, la aplicación $\mathrm{D} f(t_0)$: $\mathbb{R} \longrightarrow$ F que a cada h asocia $\mathrm{D} f(t_0)\,h$, está definida por

$$\mathrm{D} f(t_0)\,h = h f'(t_0) \tag{1}$$

que es, claramente, lineal y continua; en consecuencia, f es diferenciable en t_0 y su diferencial está definida por (1).

Recíprocamente, supongamos que f es diferenciable en t_0; es decir, existe una aplicación lineal y continua $\mathrm{D} f(t_0)$: $\mathbb{R} \longrightarrow$ F que, en cada punto $h \in \mathbb{R}$, toma como valor la derivada de f en t_0 en la dirección de h. Consideremos entonces el vector de F imagen del punto $1 \in \mathbb{R}$; esto es, $\mathrm{D} f(t_0)\,1$. que, según lo dicho, es el valor del siguiente límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t_0 + t\,1) - f(t_0)}{t}$$

La existencia de este límite en F, conduce a que existe la derivada de f en t_0 y, además, que vale

$$f'(t_0) = \mathrm{D} f(t_0)\,1\,.$$

En consecuencia, esta proposición establece que si existe la derivada o la diferencial de una función en un punto, ambas existen, y están relacionadas por la fórmula

$$f'(t) = \mathrm{D} f(t)\, 1$$

PROPOSICIÓN 1.5.—*Una función continua* f: $\mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase* C^1 *si y sólo si es de clase* C^1_c ([4]; cap. III, def. 1.4).

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que f es de clase C^1_c. Entonces (prop. 1.4) f es derivable en $\mathbb{R}$ y la aplicación $f'\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{F}$ está definida por $f'(t) = \mathrm{D} f(t)\, 1$.

Veamos que esta aplicación es continua, en cuyo caso, f será de clase C^1. Ahora bien, la aplicación f' se factoriza como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{(\mathrm{D} f,\ \text{constante})} & \mathcal{L}_c(\mathbb{R}; \mathrm{F}) \times \mathbb{R} & \xrightarrow{e\,v} & \mathrm{F} \\ t & \longrightarrow & (\mathrm{D} f(t), 1) & \longrightarrow & \mathrm{D} f(t)\, 1 \end{array}$$

y todas las aplicaciones que intervienen son continuas.

Recíprocamente, supongamos que f es de clase C^1. Entonces (proposición 1.4) existe para todo $t \in \mathbb{R}$ la $\mathrm{D} f(t)$ y podemos considerar la aplicación $\mathrm{D} f$ de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}; \mathrm{F})$. Esta aplicación es continua si lo es su aplicación asociada $\widetilde{\mathrm{D} f}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en F definida por $\widetilde{\mathrm{D} f}(t, h) = \mathrm{D} f(t)\, h$ ([4]; cap. I, teor. 2.2); y la aplicación asociada $\widetilde{\mathrm{D} f}$ se factoriza

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathbb{R}},\ f')} & \mathbb{R} \times \mathrm{F} & \xrightarrow{\text{producto por escalar}} & \mathrm{F} \\ (h, t) & \longrightarrow & (h, f'(t)) & \longrightarrow & h\, f'(t) \end{array}$$

que es continua, pues lo son todas las aplicaciones que intervienen. Veamos, en fin, que si $\mathcal{B}$ es un filtro convergente en $\mathbb{R}$, el filtro $\Theta\, \mathrm{R} f_t (\mathcal{V} \times \mathcal{B})$ converge a cero en F ([4]; cap. III, defs. 1.3 y 1.4). Para ello basta observar que la aplicación $\Theta\, \mathrm{R} f_t\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{F}$ se escribe, en este caso,

$$\Theta\, \mathrm{R} f_t(k, h) = h\,[(f(t + k\,h) - f(t))/k\,h] - h\, f'(t)$$

si $k\,h \neq 0$ y 0 en otro caso; en consecuencia, es continua y puesto que el filtro $\mathcal{V} \times \mathcal{B}$ converge a $(0, h)$ en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, su imagen por la aplicación convergerá a la imagen de $(0, h)$, que es cero, en F.

A continuación, vamos a establecer un isomorfismo que nos va a permitir referirnos indistintamente a la derivada o a la diferencial, cuando una de ellas exista, y que, entre otras cosas, nos ahorrará trabajo.

PROPOSICIÓN 1.6.—*Para cualquier e.v.c. F sobre* $\mathbb{R}$ *existe un isomorfismo canónico entre los e.v.c. F y* $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F)$.

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, dado un punto $x \in F$ existe un único elemento en $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F)$, designémosle por u_x, tal que $u_x(1) = x$. Consideremos entonces la aplicación siguiente:

$$\begin{aligned} \psi : F &\longrightarrow \mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F) \\ x &\longrightarrow u_x \end{aligned}$$

y veamos que es un isomorfismo de e.v.c.

Es inmediato comprobar que la aplicación ψ está definida, es inyectiva y lineal. También es sobre, pues si $v \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F)$, existe $y \in F$, $y = v(1)$, tal que $\psi(y) = v$.

Veamos, para terminar, que tanto ψ como ψ^{-1} son continuas.

La aplicación asociada a ψ, $\tilde{\psi}$: $F \times \mathbb{R} \longrightarrow F$, está definida por $\tilde{\psi}(x, t) = \psi(x)\, t$; es decir,

$$\tilde{\psi}(x, t) = u_x(t) = u_x(t\,1) = t\, u_x(1) = t\, x;$$

que, claramente es continua.

En cuanto a ψ^{-1}: $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F) \longrightarrow F$, está definida por $\psi^{-1}(u) = u(1) \in F$. Y esta aplicación es continua, pues se factoriza así:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F) & \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F)},\ \text{constante})} & \mathcal{L}_c(\mathbb{R}; F) \times \mathbb{R} & \xrightarrow{ev} & F \\ u & \longrightarrow & (u, 1) & \longrightarrow & u(1) \end{array}$$

y todas las aplicaciones que intervienen son continuas.

Así pues, salvo isomorfismo, $f'(t)$ puede identificarse con $\mathrm{D} f(t)$ (cuando una de ellas exista). En consecuencia se pueden también «identificar» las aplicaciones f' y $\mathrm{D}\,f$, resultado que es clásico en espacios de Banach.

Con ayuda de estos resultados vamos a deducir, de forma sencilla, algunas propiedades fundamentales de la derivación, para este tipo de funciones.

2. Linealidad de la derivación

Proposición 2.1.—*El conjunto de las funciones definidas en* $\mathbb{R}$ *tomando sus valores en un mismo e.v.c.* F *y derivables en un punto* $t_0 \in \mathbb{R}$ *es un e.v. sobre* $\mathbb{R}$; *la aplicación* $f \longrightarrow f'(t)$ *es una aplicación lineal de este espacio en* F.

Demostración.—Resulta inmediata de la continuidad de las aplicaciones $x + y$ y $k\,x$ en $F \times F$ y F, respectivamente.

Corolario 2.2.—*El conjunto de las funciones definidas en* $\mathbb{R}$ *derivables y valoradas en un mismo e.v.c.* F *es un e.v. sobre* $\mathbb{R}$; *la aplicación* $f \longrightarrow f'$ *es una aplicación lineal de este espacio en el e.v. de las aplicaciones de* $\mathbb{R}$ *en* F.

Observación: Si en el último corolario exigimos además que las funciones sean de clase C^1, con ayuda del isomorfismo establecido en la prop. 1.6, se obtiene de forma inmediata un resultado análogo al dado ([4]; cap. III, prop. 1.6) para la diferenciación.

Proposición 2.3.—*Sean* E *y* F *dos e.v.c. sobre* $\mathbb{R}$; u *una aplicación lineal y continua de* E *en* F. *Si la función* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase* C^1, *entonces la función compuesta* $u \circ f\colon \mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase* C^1, *y, para cada* t *se tiene*

$$(u \circ f)'(t) = u\,(f'(t))$$

(En otras palabras, $(u \circ f)' = u \circ f'$).

Demostración.—En efecto, u es de clase C_c^1 ([4]; cap. III, sec. 1) y f también (prop. 1.5), luego $u \circ f$ es de clase C_c^1 ([4]; cap. III, teor. 2.1) y en consecuencia de clase C^1 (prop. 1.5). Además, aplicando de nuevo los resultados citados, podemos escribir:

$$(u \circ f)'(t) = \mathrm{D}\,(u \circ f)\,(t)\,1 = (\mathrm{D}\,u\,(f(t)) \circ \mathrm{D}f(t))\,1 = u\,(f'(t))$$

COROLARIO 2.4.—*Bajo las condiciones de la proposición sobre* E *y* f, *si* ψ *es una forma lineal y continua en* E, *la función numérica* $\psi \circ f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es de clase* C^1 *y admite en cada punto* t *una derivada igual a* $\psi(f'(t))$.

3. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VALORADA EN UN PRODUCTO

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_m$ m e.v.c. y sea F el e.v.c. producto. Escribiremos

$$F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m \text{ o } F = \prod_{i=1}^{m} F_i$$

Dada una función f: $\mathbb{R} \longrightarrow F$ consideraremos sus m funciones componentes f_j: $\mathbb{R} \longrightarrow F_j$, y se tienen las relaciones siguientes:

$$f_j = pr_j \circ f, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \qquad f = \sum_{j=1}^{m} q_j \circ f_j$$

Con estas notaciones, donde pr_j y q_j están definidas en [4], se tiene:

PROPOSICIÓN 3.1.—*Sea* $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ *el e.v.c. producto de los* m *e.v.c.* $F_1, F_2, \ldots, F_m$. *Sea una función* f: $\mathbb{R} \longrightarrow F$.

Si f *es de clase* C^1, *entonces para cada* $j = 1, 2, \ldots, m$ f_j *es de clase* C^1, *y para cada* t *se verifica que*

$$f_j'(t) = pr_j(f'(t))$$

Recíprocamente, si para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ f_j *es de clase* C^1, *entonces* f *es de clase* C^1 *y para cada* t *se tiene que*

$$f'(t) = \sum_{j=1}^{m} q_j(f'(t))$$

Nota: Observemos que las relaciones que aquí se establecen entre las derivadas pueden escribirse también así:

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f'_m(t))$$

DEMOSTRACIÓN.—Si f es de clase C^1, entonces es de clase C_c^1 (proposición 1.5); luego ([4]; cap. III, teor. 4.1) para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, f_j es de clase C_c^1, y en consecuencia de clase C^1.

Recíprocamente, si cada f_j es de clase C^1 es de clase C_c^1 y según el teor. citado f es de clase C_c^1 y, por lo tanto, de clase C^1.

En cuanto a las relaciones entre las derivadas, aplicando de nuevo el teor. citado y la prop. 1.4, podemos escribir, para todo t:

$$f_j'(t) = \mathrm{D} f_j(t)\, 1 = p\, r_j(\mathrm{D} f(t)\, 1) = p\, r_j(f'(t)); \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

y

$$f'(t) = \mathrm{D} f(t)\, 1 = \sum_{j=1}^{m} q_j(\mathrm{D} f_j(t)\, 1) = \sum_{j=1}^{m} q_j(f'(t)).$$

4. DERIVADA DE UN PRODUCTO

Consideremos ahora el e.v.c. producto $F = F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_m$ de m e.v.c. F_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) y una aplicación multilineal y continua (que representamos $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \longrightarrow [x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_m]$) de F en un nuevo e.v.c. E.

Ya sabemos (comentarios siguientes al cor. 4.5 del cap. III en [4]) que esta aplicación es de clase C_c^1, y tenemos la fórmula que nos da su diferencial en un punto. Con ayuda de este resultado vamos a establecer la siguiente:

PROPOSICIÓN 4.1.—*Para cada índice* j ($1 \leqslant j \leqslant m$) *sea una función* $f_j \colon \mathbb{R} \longrightarrow F_j$ *de clase* C^1. *Entonces la función* $h \colon \mathbb{R} \longrightarrow E$ *definida por*

$$h(t) = [f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \ldots \cdot f_m(t)]$$

es de clase C^1, *y, para cada* t, *se tiene que*

$$h'(t) = \sum_{i=1}^{m} [f_1(t) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(t) \cdot f_i'(t) \cdot f_{i+1}(t) \cdot \ldots \cdot f_m(t)]$$

DEMOSTRACIÓN.—Designemos por f la aplicación de $\mathbb{R}$ en F que a cada t asocia el vector $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$, y por Φ la aplicación multilineal y continua de F en E introducida al comienzo de la sección.

Entonces, f es de clase C^1 (prop. 3.1), luego de clase C_c^1 (prop. 1.5); en consecuencia, h es de clase C_c^1 ([4]; cap. III, teor. 2.1) y, por lo tanto, de clase C^1.

Además, utilizando la fórmula que nos da la diferencial de Φ y todos los resultados citados, tenemos

$$
\begin{aligned}
h'(t) &= \mathrm{D}\,h(t)\,1 = \mathrm{D}\,\Phi\,(f(t))\,(\mathrm{D}f(t)\,1) = \\
&= \mathrm{D}\,\Phi\,(f(t))\,(f'(t)) = \mathrm{D}\,\Phi\,(f(t))\left(\sum_{j=1}^{m} q_j\,(f_j'(t))\right) \\
&= \mathrm{D}\,\Phi\,(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))\,(f_1'(t), f_2'(t), \ldots, f'_m(t)) = \\
&= \sum_{j=1}^{m} [f_1(t) \cdot \ \ldots \ \cdot f_{i-1}(t) \cdot f_i'(t) \cdot f_{i+1}(t) \cdot \ \ldots \ \cdot f_m(t)]
\end{aligned}
$$

que es la relación buscada.

Hagamos notar de forma especial el caso $m = 2$. Así, si $(x, y) \longrightarrow [x \cdot y]$ es una aplicación bilineal y continua de $E \times F$ en G (E, F y G e.v.c.) y si f y g son dos funciones, de clase C^1, tomando sus valores en E y F, respectivamente, la función $t \longrightarrow [f(t) \cdot g(t)]$, que representamos $[f \cdot g]$, de $\mathbb{R}$ en G, es de clase C^1 y admite en cada punto t una derivada igual a

$$[f'(t) \cdot g(t))] + [f(t) \cdot g'(t)]$$

Así pues, podemos escribir que

$$[f \cdot g]' = [f' \cdot g] + [f \cdot g']$$

En particular, si a es un vector fijo, bajo estas condiciones, la función $[a \cdot f]$ es de clase C^1, y admite en cada punto t una derivada igual a $[a \cdot f'(t)]$.

5. Derivada de una función compuesta

Proposición 5.1.—*Sean* f *una función numérica y* g *una función definida en* $\mathbb{R}$ *y valorada en un e.v.c. F. Si* f *y* g *son de clase C^1, entonces la función compuesta* $g \circ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase C^1, y en cada punto* t *se verifica que*

$$(g \circ f)'(t) = g'(f(t))\, f'(t)$$

DEMOSTRACIÓN.—Según la prop. 1.5 f y g son de clase C_c^1, luego $g \circ f$ es de clase C_c^1 ([4]; cap. III, teor. 2.1) y en consecuencia de clase C^1. Además, aplicando estos mismos resultados, podemos escribir, para cada t,

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(t) &= \mathrm{D}(g \circ f)(t)\, 1 = \\ &= (\mathrm{D}g(f(t)) \circ \mathrm{D}f(t))\, 1 = \\ &= \mathrm{D}g(f(t))(\mathrm{D}f(t)\, 1) = \mathrm{D}g(f(t))(f'(t)) = \\ &= f'(t)\, \mathrm{D}g(f(t))\, 1 = f'(t)\, g'(f(t))\end{aligned}$$

6. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Vamos a extender en esta y las sucesivas secciones los resultados obtenidos para la derivada primera.

DEFINICIÓN 6.1.—*Sea* f: $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ *una función continua, siendo* F *un e.v.c. Si la derivada* f′ *de* f *existe en un entorno de un punto* $t_0 \in I$ *y es derivable en el punto* t_0, *su derivada la llamaremos la derivada segunda de* f *en el punto* t_0, *y la representaremos por* $f''(t_0)$.

Si esta derivada segunda existe en todo punto de I, la función de I en F, $t \longrightarrow f''(t)$, que representaremos f'', la llamaremos aplicación derivada segunda de f.

Por recurrencia se define, de la misma forma, la función derivada n-ésima (o derivada de orden n) de f, que denotamos $f^{(n)}$, para cada $n \in \mathbb{N}$; por definición, esta función tiene por valor en el punto $t_0 \in I$ la derivada de la función $f^{(n-1)}$ en el punto t_0. Esta definición supone pues, la existencia de todas las derivadas $f^{(k)}$ de orden $k \leqslant n-1$ en un entorno de t_0 y la derivabilidad de $f^{(n-1)}$ en t_0.

DEFINICIÓN 6.2.—*En estas condiciones, diremos que* f *es* n *veces derivable en* t_0 *(resp., en un intervalo) si admite derivada* n*-ésima en ese punto (resp., en ese intervalo).*

Diremos que f *es indefinidamente derivable si para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es* n *veces derivable.*

Teniendo en cuenta la observación previa a la def. 1.3, y la propia definición, diremos:

DEFINICIÓN 6.3.—*Una función* f: $I \longrightarrow F$ *es de clase* C^n *en* I, $n \in \mathbb{N}$, *si es de clase* C^1 *y si* f' *es de clase* C^{n-1}.

Diremos que f *es de clase* C^∞ *si es de clase* C^n *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

En otras palabras, teniendo en cuenta las defs. 6.1 y 6.2, una función es de clase C^n si existen todas las derivadas k-ésimas $f^{(k)}$, para $k \leqslant n - 1$, y todas ellas son de clase C^1; o, después de la def. 1.3, si existen todas las derivadas k-ésimas $f^{(k)}$, para $k \leqslant n$ y todas ellas son continuas (en realidad esta última condición es superabundante, pues basta exigir que sea continua $f^{(n)}$; las otras lo son ya, necesariamente).

Veamos entonces qué relación guarda esto, siguiendo la pauta marcada en las secciones anteriores, con la diferenciabilidad de orden superior ([4]; cap. IV).

Después de la prop. 1.5, de la prop. 1.4 ([4]; cap. IV) y de los comentarios precedentes, es inmediato el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 6.4.—*Una función* f: $\mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase* C^n *si y sólo si es de clase* C_c^n, $n \in \mathbb{N}$.

Recordemos, por otro lado, la prop. 1.6 y el hecho conocido de que (cuando existe) $D^n f(t)$ es un elemento del e.v.c. $\mathcal{H}_c^n(\mathbb{R}; F)$. Ahora bien, este último espacio es isomorfo al propio espacio F. Basta aplicar la prop. citada un número suficiente de veces. Entonces, $D^n f(t)$ puede identificarse (salvo isomorfismo) con un elemento de F. Es inmediato comprobar que la fórmula que establece esta identificación es, precisamente,

$$f^n(t) = D^n f(t)\,(1)^n$$

Así pues, a partir de ahora nos referiremos, y escribiremos, indistintamente, $f^n(t)$ y $D^n f(t)$.

Ejemplo de funciones de clase C^∞ son las funciones constantes y las funciones lineales continuas. Además, si f es constante, $f^{(k)} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$; y, si f es lineal y continua, $f'(t) = f(1)$ para todo t, y $f^{(k)} = 0$ para todo $k \geqslant 2$.

Es igualmente inmediato el siguiente resultado sobre el que no entramos en más detalles.

PROPOSICIÓN 6.5.—*Sea una función* $f: I \longrightarrow F$:

(i) *Si* f *es de clase* C^n *y si* $k \leqslant n$, *entonces* f *es de clase* C^k, $f^{(k)}$ *es de clase* C^{n-k} *y* $(f^{(k)})^{(n-k)} = f^{(n)}$.

(ii) *Si* f *es de clase* C^k *y si* $f^{(k)}$ *es de clase* C^m *entonces* f *es de clase* C^{k+m} *y* $f^{(k+m)} = (f^{(k)})^{(m)}$.

Recordando la prop. 1.10 ([4]; cap. IV) tenemos, en fin, la siguiente:

PROPOSICIÓN 6.6.—*El conjunto* $C^n(\mathbb{R}; F)$ *de todas las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* F, *de clase* C^n *es un subespacio del e.v.* $F^{\mathbb{R}}$, *de todas las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* F, *y para cada número natural* $k \leqslant n$, *la aplicación* $f \longrightarrow f^{(k)}$ *es una aplicación lineal del espacio* $C^n(\mathbb{R}; F)$ *en* $C^{n-k}(\mathbb{R}; F)$.

En particular, si $F = \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y para $n = \infty$, el espacio $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ equipado con la adición y multiplicación usuales de funciones es un anillo conmutativo con elemento unidad, y un $\mathbb{R}$-álgebra.

7. UNA FÓRMULA DE COMPOSICIÓN

PROPOSICIÓN 7.1.—*Sean* E *y* F *dos e.v.c.;* u *una aplicación lineal y continua de* E *en* F. *Si la función* $f: \mathbb{R} \longrightarrow E$ *es de clase* C^n, *entonces la función compuesta* $u \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase* C^n, *y se verifica*

$$(u \circ f)^{(n)} = u \circ f^{(n)}$$

DEMOSTRACIÓN.—Ya sabemos que u es de clase C_c^n y según la proposión 6.4 f lo es también, luego ([4]; cap. IV, teor. 3.7) $u \circ f$ es de clase C_c^n y en consecuencia de clase C^n.

Vamos a demostrar por inducción sobre n la relación (1). El resultado es cierto para $n = 1$ (prop. 2.3). Supongamos que lo es para n; podemos escribir

$$(u \circ f)^{(n+1)} = [(u \circ f)^{(n)}]' =$$

por la hipótesis de inducción

$$= [u \circ f^{(n)}]' =$$

por la prop. 2.3

$$= u \circ (f^{(n)})' = u \circ f^{(n+1)}$$

COROLARIO 7.2.—*Bajo las condiciones de la prop. E y* f, *si* ψ *es una forma lineal y continua en E, la función numérica* $\psi \circ f$ *es de clase* C^n *y se verifica la relación (1) de la prop. sustituyendo* u *por* ψ.

8. DERIVADA SUPERIOR DE UNA FUNCIÓN VALORADA EN UN PRODUCTO

Sean $F_1, F_2, \ldots, F_m$ *m* e.v.c. y sea F el e.v.c. producto. Sea una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow F$ y sea para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, $f_j: \mathbb{R} \longrightarrow F_j$ su componente *j*-ésima.

Teniendo en cuenta las notaciones y relaciones establecidas en la sección 3, se tiene la siguiente:

PROPOSICIÓN 8.1.—*Sea una función* $f: \mathbb{R} \longrightarrow F$, *siendo F el e.v.c. producto de* m *e.v.c.* F_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Si f *es de clase* C^n, *entonces para cada* $j = 1, 2, \ldots, m$, f_j *es de clase* C^n, *y, para cada* t

$$f_j^{(n)}(t) = pr_j(f^{(n)}(t))$$

Recíprocamente, si para todo $j = 1, 2, \ldots, m$, f_j *es de clase* C^n, *entonces* f *es de clase* C^n *y para cada* t *se tiene que*

$$f^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{m} q_j(f_j^{(n)}(t))$$

Nota: Observemos que las relaciones que aquí aparecen entre las derivadas, pueden escribirse también

$$f^{(n)}(t) = (f_1^{(n)}(t), f_2^{(n)}(t), \ldots, f_m^{(n)}(t))$$

y

$$f_j^{(n)} = pr_j \circ f^{(n)}, \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \qquad f^{(n)} = \sum_{j=1}^{m} q_j \quad f_j^{(n)}$$

DEMOSTRACIÓN.—Si *f* es de clase C^n, entonces es de clase C_c^n (proposición 6.4); luego ([4]: cap. IV, teor. 3.6) para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, f_j es de clase C_c^n, y, en consecuencia, de clase C^n. Recíprocamente, si cada f_j es de clase C^n, también lo son de clase C_c^n; luego, aplicando el teor. citado, f es de clase C_c^n y por lo tanto de clase C^n.

En cuanto a las relaciones entre las derivadas vamos a demostrarlas por inducción sobre n. En ambos casos el resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos que lo es para n. Podemos escribir:

Para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, y para cada t

$$f_j^{(n+1)}(t) = (f_j^{(n)})'(t) =$$

por la hipótesis de inducción

$$= (pr_j \circ f^{(n)})'(t) =$$

por la prop. 2.3

$$= (pr_j \circ f^{(n+1)})(t) = pr_j(f^{(n+1)}(t))$$

Por otro lado, para cada t

$$f^{(n+1)}(t) = (f^{(n)})'(t) =$$

por la hipótesis de inducción.

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} q_j \circ f_j^{(n)}\right)'(t) =$$

por el cor. 2.2

$$= \sum_{j=1}^{m} (q_j \circ f_j^{(n)})'(t) =$$

por la prop. 2.3

$$= \sum_{j=1}^{m} (q_j \circ f_j^{(n+1)})(t) = \sum_{j=1}^{m} q_j(f_j^{(n+1)}(t))$$

La proposición queda así probada. Esta última parte de la demostración podría haberse hecho utilizando directamente las relaciones que entre las diferenciales superiores de f y de sus componentes f_j establece el teor. 3.6 ([4]; cap. IV) y las relaciones entre éstas y las correspondientes derivadas superiores establecidas en el comentario que sigue a la prop. 6.4.

9. Derivada superior de un producto. Fórmula de Leibniz

Consideremos ahora el e.v.c. producto $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_m$ de m e.v.c. F_j ($j = 1, 2, \dots, m$) y una aplicación multilineal y continua (que representamos por $(x_1, x_2, \dots, x_m) \longrightarrow [x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_m]$) de F en un nuevo e.v.c. E.

Es conocido ([4]; cap. IV, prop. 3.1 y comentarios siguientes) que esta aplicación, que llamaremos para simplificar Φ, es de clase C_c^n, para todo n natural; también disponemos de sus diferenciales de cualquier orden. Con ayuda de este resultado podemos establecer la siguiente:

Proposición 9.1.—*Para cada índice* j ($1 \leqslant j \leqslant m$) *sea una función de clase* C^n $f_j: \mathbb{R} \longrightarrow F_j$.
Entonces la función $h: \mathbb{R} \longrightarrow E$ *definida por*

$$h(t) = [f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \dots \cdot f_m(t)]$$

es de clase C^n, *y para cada* t *se verifica*

$$(1) \quad h^{(n)}(t) = \Sigma \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} [f_1^{(k_1)}(t) \cdot f_2^{(k_2)}(t) \cdot \dots \cdot f_m^{(k_m)}(t)]$$

donde la suma está extendida a todos los sistemas de enteros $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$, *tales que*

$$0 \leq k_i \leq n, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k_1 + k_2 + \dots + k_m = n.$$

Nota: Es bien conocido ([6]; cap. I, § 10) que el número de sumandos de (1) es

$$\binom{m+n-1}{m-1}$$

Por otro lado los coeficientes que aparecen en la suma son números multinomiales (ver [2]; cap. 1, § 9).

DEMOSTRACIÓN.—Designemos por f la función de $\mathbb{R}$ en F que a cada t asocia el vector de F $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t))$. Entonces $h = \Phi \circ f$. Ahora bien, f es de clase C^n (prop. 8.1), luego es de clase C_c^n (proposición 6.4); y puesto que Φ es de clase C_c^n, lo es h ([4]; cap. IV, teor. 3.7); en consecuencia, h es de clase C^n.

Vamos a demostrar la relación (1) por inducción sobre n. Es cierta para $n = 1$ como lo demuestra la prop. 4.1. Supongamos que lo es para n, y vamos a calcular $h^{(n+1)}(t)$.

Tenemos que

$$h^{(n+1)}(t) = [h^{(n)}(t)]' =$$

según la hipótesis de inducción

$$= \left(\sum \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} [f_1^{(k_1)}(t) \cdot f_2^{(k_2)}(t) \cdot \ldots \cdot f_m^{(k_m)}(t)]\right)'(t) =$$

por el cor. 2.2

$$= \sum \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} ([f_1^{(k_1)}(t) \cdot f_2^{(k_2)}(t) \cdot \ldots \cdot f_m^{(k_m)}(t)])' =$$

aplicando ahora la prop. 4.1 a esta función

$$= \sum \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} \left(\sum_{i=1}^{m} [f_1^{(k_1)}(t) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}^{(k_{i-1})}(t) \cdot f_i^{(k_i+1)}(t) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f_{i+1}^{(k_{i+1})}(t) \cdot \ldots \cdot f_m^{(k_m)}(t)]\right) =$$

después de algunos cálculos

$$= \sum \left(\sum_{i/k_i+1 \neq 0} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_m} \mathrm{A} \right)$$

donde

$$\mathrm{A} = [f_1^{(k_1)}(t) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}^{(k_{i-1})}(t) \cdot f_i^{(k_i+1)}(t) \cdot f_{i+1}^{(k_{i+1})}(t) \cdot \ldots \cdot f_m^{(k_m)}(t)]$$

usando una de las relaciones entre números multinomiales establecidas en [2]; cap. 1, § 9

$$= \sum \binom{n+1}{k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_m} A$$

que demuestra la relación (1).

En particular, si f es una función de $\mathbb{R}$ en un e.v.c. F, para cualesquiera números naturales m y n, tenemos, que si

$$[(f(t))^m] = [f(t) \cdot f(t) \cdot \ldots \cdot f(t)] \quad (m \text{ veces})$$

entonces

$$[(f(t))^m]^{(n)} =$$
$$= \sum \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \binom{m}{m-r, r_1, \ldots, r_n} [(f(t))^{m-r}] \cdot [(f'(t))^{r_1}] \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot [(f^{(n)}(t))^{r_n}]$$

donde la suma se extiende a todas las familias de enteros $(k_i)_{1 \leq i \leq m}$ (sin importar el orden de la descomposición) tales que

$$0 \leq k_i \leq n, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

y,

$m - r$ es el número de k_i iguales a 0

r_1 es el número de k_i iguales a 1

....

r_n es el número de k_i iguales a n

y, por lo tanto, $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = r$.

Aplicando esta proposición al caso $m = 2$ obtenemos de forma inmediata el siguiente:

COROLARIO 9.2 (Fórmula de Leibniz).—*Sean E, F y G tres e.v.c. sobre* $\mathbb{R}$; $(x, y) \longrightarrow [x \cdot y]$ *una aplicación bilineal y continua de* $E \times F$ *en G. Si* f *y* g *son dos funciones definidas en* $\mathbb{R}$ *de clase* C^n *tomando sus valores en E y F respectivamente, la función* $t \longrightarrow [f(t) \cdot g(t)]$

de $\mathbb{R}$ *en G, que representamos* $[f \cdot g]$, *es de clase* C^n *y se verifica*

$$[f \cdot g]^{(n)} = [f^{(n)} \cdot g] + \binom{n}{1} [f^{(n-1)} \cdot g'] + \dots$$
$$\dots + \binom{n}{p} [f^{(n-p)} \cdot g^{(p)}] + \dots + [f \cdot g^{(n)}]$$

Supongamos ahora que $E = \mathbb{R}$, $G = F$ y la aplicación bilineal y continua es la multiplicación por escalares de $\mathbb{R} \times F$ en F. Recordando el comentario siguiente a la proposición 6.6, tenemos:

COROLARIO 9.3.—*Bajo las condiciones citadas, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y para* $n = \infty$, *el espacio* $C^n(\mathbb{R}; F)$ *es un* $C^n(\mathbb{R}; \mathbb{R})$*-módulo unitario.*

10. DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

PROPOSICIÓN 10.1.—*Sea* f *una función numérica y* g *una función definida en* $\mathbb{R}$ *y valorada en un e.v.c. F. Si* f *y* g *son de clase* C^n, *entonces la función compuesta* $g \circ f \colon \mathbb{R} \longrightarrow F$ *es de clase* C^n.

Además, para cada t, *se verifica*

$$[g \circ f]^{(m)}(t) =$$
$$= \sum \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_q!}\, g^{(p)}(f(t)) \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{f^{(q)}(t)}{q!}\right)^{m_q} \qquad (1)$$

donde la suma se extiende a todos los sistemas de enteros positivos (m_i) $1 \leqslant i \leqslant q$ *tales que*

$$m_1 + 2\, m_2 + \dots + q\, m_q = n$$

y p *designa la suma* $m_1 + m_2 + \dots + m_q$,

y,

$$[g \circ f]^{(m)}(t) =$$
$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\, g^{(p)}(f(t)) \left(\sum_{q=1}^{n} \binom{p}{q} (-f(t))^{p-q} ((f(t))^q)^{(n)} \right) \qquad (2)$$

DEMOSTRACIÓN.—Puesto que *f* y *g* son de clase C^n, ambas son de-clase C_c^n (prop. 6.4); por lo tanto, $g \circ f$ es de clase C_c^n ([4]; cap. IV, teor. 3.7) y, en consecuencia, de clase C^n.

Las relaciones (1) y (2) se demuestran ahora por inducción sobre n (ver [2]; cap. I, § 3; ex. 7). Veámoslo, por ejemplo, para (1). En efecto, la relación es cierta para $n = 1$ (prop. 5.1). Supongamos que lo es para n. Al calcular la derivada de orden $n + 1$, podemos escribir:

$$(g \circ f)^{(n+1)}(t) = [(g \circ f)^{(n)}(t)]'(t) =$$

según la hipótesis de inducción

$$= \left(\sum \frac{n!}{m_1! \ldots m_q!} g^{(p)}(f(t)) \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{f^{(q)}(t)}{q!}\right)^{m_q}\right)'(t) =$$

bajo las condiciones requeridas sobre los números q, p y $(m_i)_{1 < i < q}$.

Ahora bien, aplicando sucesivamente el cor. 2.2, la prop. 5.1 y la prop. 4.1, y, después de ordenar y agrupar convenientemente los términos, resulta

$$= \sum \mathrm{B}\, g^{(p)}(f(t))\,(f'(t))^{m_1} \ldots (f^{(q)}(t))^{m_q} =$$

donde

$$\mathrm{B} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_q!} \left(\frac{1}{1!}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{1}{q!}\right)^{m_q} \left(m_1 + \sum_{i=1}^{q-1} (i+1)\, m_{i+1}\right)$$

con lo cual, puede escribirse, bajo las condiciones requeridas ahora sobre los elementos que intervienen,

$$= \sum \frac{(n+1)!}{m_1! \ldots m_q!} g^{(p)}(f(t)) \left(\frac{f'(t)}{1!}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{f^{(q)}(t)}{q!}\right)^{m_q}$$

con esto, (1) queda probado.

El mismo método sirve para demostrar (2) utilizando ahora además la expresión obtenida como consecuencia de la prop. 9.1.

Quiero expresar mi agradecimiento al profesor D. Juan José Gutiérrez Suárez por el excelente interés que en todo momento me presta.

Referencias

[1] AVERBUKH, V. I. and SMOLJANOV, D. G.: *The theory of differentiation in linear topological spaces.* «Russ. Math. Surv.», vol. 27, 6 (1967), 201-258.

[2] BERGE, C.: *Principes de combinatoire.* Dunod. Paris, 1968.

[3] BOURBAKI, N.: *Fonctions d'une variable réelle.* «Act. Scien. Ind.», 1074, Hermann. Paris, 1958.

[4] CASTAÑEDA, F.: *Cálculo diferencial en espacios vectoriales de convergencia.* Tesis doctoral (1979). Univ. de Valladolid. Monografías del Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas, C. S. I. C. Madrid (a aparecer).

[5] KELLER, H. H.: *Differential calculus in locally convex spaces.* «Lect. N. in Math.», vol. 417, Springer. Berlin, 1974.

[6] LELONG-FERRAND, J. y ARNAUDIES, J. M.: *Cours de mathèmatiques. Tome 1. Algèbre.* Dunod Université. Paris, 1978.

[7] LLOYD, J.: *Differentiable mappings on topological vector spaces.* «Studia Mathematica», 45 (1973), 147-160.

[8] PENOT, J. P.: *Calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques.* «Studia Mathematica», 47 (1973), 1-23.

[9] SZCZYRBA, W.: *Differentiation in locally convex spaces.* «Studia Mathematica», 39 (1971), 289-306.

Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias
Universidad de Valladolid