LA FIGURA ESPECTRAL DEL PRODUCTO TENSORIAL DE DOS OPERADORES

por

CARLOS BOSCH G., CARLOS HERNANDEZ G. y ELENA DE OTEYZA

1. Introducción

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita. Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ al álgebra de todos los operadores acotados en $\mathcal{H}$. Carl Pearcy en 1977 introdujo el concepto de figura espectral de un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ [13]. Sin lugar a dudas hay dos resultados que hacen de la figura espectral de un operador un concepto importante. El primero se debe a Brown, Douglas y Fillmore:

«Dos operadores esencialmente normales son débilmente equivalentes si y sólo si tienen la misma figura espectral».

El otro resultado se debe a los matemáticos rumanos Apostol, Foiaș y Voiculescu:

«Un operador en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es quasitriangular si y sólo si su figura espectral no contiene números negativos».

En [1] se calcula la figura espectral de $f(T)$ donde T es un operador en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y f una función analítica en un abierto que contiene al espectro de T. En este artículo, continuando el proyecto de calcular la figura espectral de operadores construidos a partir de otros, calculamos la figura espectral del producto tensorial de dos operadores.

Algunos de los resultados que aparecen aquí forman parte de la tesis de maestría presentada en la Universidad Nacional Autónoma de México por Elena de Oteyza. Finalmente queremos agradecer a C. Pearcy el habernos propuesto este problema.

2. Notación y definiciones

Denotaremos por $\mathbb{K}$ el conjunto de operadores compactos en $\mathcal{H}$. $\mathbb{K}$ resulta ser un ideal cerrado. π denotará la proyección canónica de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en el cociente $\mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathbb{K}$ llamado álgebra de Calkin. El espectro de un operador T es el conjunto de λ en $\mathbb{C}$ tales que $T - \lambda I$ no es invertible; lo denotaremos $\sigma(T)$. El espectro esencial de un operador T es el espectro de $\pi(T)$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathbb{K}$ y lo denotaremos por $\sigma_e(T)$. $\sigma_{ei}(T)$ y $\sigma_{ed}(T)$ denotarán respectivamente a los espectros esenciales izquierdo y derecho, es decir:

$$\sigma_{ei}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \pi(T) - \lambda I \text{ no es invertible por la izquierda}\}$$

y

$$\sigma_{ed}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \pi(T) - \lambda I \text{ no es invertible por la derecha}\}.$$

Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, un hueco H de $\sigma_e(T)$ es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\backslash\sigma_e(T)$ (recordemos que $\sigma_e(T)$ es compacto y por lo tanto un hueco será un conjunto abierto conexo de $\mathbb{C}$). Un pseudohueco es una componente de $\sigma_e(T)\backslash\sigma_{ei}(T)$ o de $\sigma_e(T)\backslash\sigma_{ed}(T)$. Los pseudohuecos son también conjuntos abiertos conexos de $\mathbb{C}$ ya que

$$\partial\sigma_e(T) \subset \sigma_{ei}(T) \cap \sigma_{ed}(T).$$

Estos conceptos están estrechamente relacionados con la teoría de Fredholm la cual expondremos aquí rápidamente. Un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es semi-Fredholm si T tiene rango cerrado y ker T o ker T* es de dimensión finita. El conjunto de operadores semi-Fredholm resulta ser un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ respecto a la topología de la norma y lo denotaremos por SF.

La función i: $SF \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$ definida por:

$$i(T) = \dim\ker(T) - \dim\ker(T^*)$$

es llamada el índice de Fredholm.

Si a $\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$ se le da la topología discreta y a SF la topología inducida por la topología de la norma en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces la función índice resulta ser continua.

El subconjunto de SF para el cual el índice es finito es abierto; ese subconjunto es el conjunto de operadores de Fredholm que denotaremos por F. Por comodidad denotaremos a la dim ker T por Nul T y a la dim ker T* por Def T, así que el índice quedará definido como

$$i\,(\mathrm{T}) = \mathrm{Nul}\ \mathrm{T} - \mathrm{Def}\ \mathrm{T}\,.$$

Un operador T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es semi-Fredholm izquierdo SF_i (derecho SF_d) si el rango de T es cerrado y Nul T $< \infty$ (Def T $< \infty$).

El lema de Atkinson relaciona las clases de operadores de Fredholm con el comportamiento de la proyección canónica sobre el álgebra de Calkin de la siguiente manera:

$\mathrm{T} \in SF_i\,(SF_d) \Longleftrightarrow \pi\,(\mathrm{T})$ es invertible por la izquierda (derecha)

$$\mathrm{T} \in F \Longleftrightarrow \pi\,(\mathrm{T}) \text{ es invertible.}$$

De lo anterior se obtiene:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ei}\,(\mathrm{T}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{I} \notin SF_i\} \\
\sigma_{ed}\,(\mathrm{T}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{I} \notin SF_d\} \\
\sigma_{e}\,(\mathrm{T}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{I} \notin F\}.
\end{aligned}$$

De estas relaciones es inmediato obtener las siguientes:

$$\begin{aligned}
\sigma_e\,(\mathrm{T}) \setminus \sigma_{ei}\,(\mathrm{T}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{I} \in SF \ \text{ y } \ i\,(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{T}) = -\infty\} \\
\sigma_e\,(\mathrm{T}) \setminus \sigma_{ed}\,(\mathrm{T}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{I} \in SF \ \text{ y } \ i\,(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{T}) = +\infty\}
\end{aligned}$$

Como la función i es continua y para T en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ los huecos y pseudohuecos en $\sigma_e\,(\mathrm{T})$ son conexos por definición, se sigue que $i\,(\mathrm{T} - \lambda\,\mathrm{I})$ como función de λ es constante y finita en cada hueco y constante pero infinita en cada pseudohueco de $\sigma_e\,(\mathrm{T})$.

En 1977 C. Pearcy [13] utilizando esas propiedades define la figura espectral de un operador que denotaremos por FE (T) como la estructura que consiste de $\sigma_e\,(\mathrm{T})$, de las colecciones $\{\mathrm{H}_j\}$ y $\{\mathrm{P}_k\}$ de huecos y pseudohuecos en $\sigma_e\,(\mathrm{T})$ y de las colecciones de índices de Fredholm $i\,(\mathrm{H}_j)$, $i\,(\mathrm{P}_k)$. Para calcular la figura espectral del producto tensorial tendremos que calcular tres cosas: el espectro esencial, los huecos y pseudohuecos y los índices correspondientes.

3. Los espectros de $A \otimes B$

En esta sección demostraremos las fórmulas que relacionan el espectro esencial (derecho, izquierdo) del producto tensorial de dos operadores con el espectro esencial (derecho, izquierdo) de ellos.

Empezaremos por enunciar como lema una propiedad de los subconjuntos de los números complejos.

Lema 3.1.—Sean U y V dos subconjuntos abiertos conexos y acotados de $\mathbb{C}$. Si $\mu \gamma = \lambda$, donde $\mu \in U$ y $\gamma \in V$, entonces existen $\mu_0 \in \overline{U}$ y $\gamma_0 \in \overline{V}$ tales que $\mu_0 \gamma_0 = \lambda$ y $\mu_0 \in \partial U$ o bien $\gamma_0 \in \partial V$.

Lema 3.2.—Sean $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

i) Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B)$, entonces $\mu \gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$.

ii) Si $\mu \in \sigma_{ed}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B)$, entonces $\mu \gamma \in \sigma_{ed}(A \otimes B)$.

Demostración.—Sólo demostraremos la primera parte ya que la otra se puede hacer de manera análoga.

Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$, entonces $\operatorname{Ran}(A - \mu I)$ no es cerrado o $\operatorname{Nul}(A - \mu I) = \infty$; en cualquier caso existe una sucesión ortonormal $\{x_n\}$ con la propiedad que

$$\| (A - \mu I)(x_n) \| \to 0 .$$

Si $\gamma \in \sigma_i(B)$ entonces $(B - \gamma I)$ no está acotado inferiormente, luego existe una sucesión $\{y_n\}$ con $\| y_n \| = 1$ y tal que

$$\| (B - \gamma I) y_n \| \to 0 .$$

Veamos que $\| (A \otimes B - \mu \gamma I \otimes I)(x_n \otimes y_n) \| \longrightarrow 0$ y que $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal, con lo cual tendremos que $\mu \gamma \in \sigma_{ei}(A \otimes B)$.

$$\| (A \otimes B - (\mu \gamma I \otimes I))(x_n \otimes y_n) \| \leq \| (A - \mu I) x_n \otimes B y_n \| +$$
$$+ \| \mu x_n \otimes (B - \gamma I) y_n \| \longrightarrow 0 .$$

Es inmediato ver que

$$< x_i \otimes y_i ,\ x_j \otimes y_j > = < x_i ,\ x_j > < y_i\ y_j > = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

con lo cual hemos comprobado que $\{x_n \otimes y_n\}$ es ortonormal.

Lema 3.3.—Sean A, B $\in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Si $\mu \in U \subset \sigma(A)$ y $\gamma \in V \subset \sigma(B)$, donde U y V son huecos o pseudohuecos de $\sigma_e(A)$ y $\sigma_e(B)$ respectivamente, entonces $\mu\,\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

Demostración.—Como U y V son subconjuntos abiertos, conexos y acotados de $\mathbb{C}$, por el lema 3.1 existen $\mu_0 \in \overline{U}$ y $\gamma_0 \in \overline{V}$ tales que $\mu_0\,\gamma_0 = \mu\,\gamma$ y $\mu_0 \in \partial U$ o bien $\gamma_0 \in \partial V$. Si $\mu_0 \in \partial U \subset \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(B)$ y $\gamma_0 \in \overline{V} \subset \sigma(B)$, por el lema 3.2, $\mu\,\gamma = \mu_0\,\gamma_0 \in \sigma(A \otimes B)$. El caso de $\mu_0 \in \overline{U}$ y $\gamma_0 \in \partial V$ es análogo.

Teorema 3.4.—Sean A y B en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_e(A)\,\sigma(B) \cup \sigma(A)\,\sigma_e(B) \subset \sigma_e(A \otimes B).$$

Demostración.—Sean $\mu \in \sigma_e(A)$ y $\gamma \in \sigma(B)$. Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B)$ ó $\mu \in \sigma_{ed}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B)$ entonces, por el lema (3.2), $\mu\,\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

Si $\mu \in \sigma_{ei}(A) \backslash \sigma_{ed}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B) \backslash \sigma_i(B)$, entonces $\mu \in U \subset \sigma(A)$, donde U es un pseudohueco de $\sigma_e(A)$, y $\operatorname{Def}(B - \gamma) > 0$, por lo tanto, $\gamma \in V \subset \sigma(B)$, donde V es un hueco o pseudohueco de $\sigma_e(B)$, y, por el lema 3.3, $\mu\,\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$.

El caso $\mu \in \sigma_{ed}(A) \backslash \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B) \backslash \sigma_d(B)$ y el caso $\mu \in \sigma(A)$ y $\gamma \in \sigma_e(B)$ son similares a los anteriores.

Demostraremos ahora algunos resultados que nos permitirán probar la igualdad en el teorema 3.4.

Lema 3.5.—Sea $\lambda \in \sigma(A \otimes B) \backslash (\sigma_e(A)\,\sigma(B) \cup \sigma(A)\,\sigma_e(B))$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda = \mu\,\gamma$, entonces μ es punto aislado de $\sigma(A) \backslash \sigma_e(A)$ o γ es punto aislado de $\sigma(B) \backslash \sigma_e(B)$.

Demostración.—Usando la igualdad $\sigma(A \otimes B) = \sigma(A)\,\sigma(B)$ [2], tenemos que $\lambda = \mu\,\gamma \in \sigma(A)\,\sigma(B)$ y, por el teorema 3.4, $\lambda \in \sigma(A) \backslash \sigma_e(A)$ y $\gamma \in \sigma(B) \backslash \sigma_e(B)$.

Recordemos [13 Prop. 1.27] que si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\sigma(T)\backslash\sigma_e(T)$ está constituido por huecos de $\sigma_e(T)$ contenidos en $\sigma(T)$ y puntos aislados de $\sigma(T)\backslash\sigma_e(T)$. Por lo tanto si ni μ es punto aislado de $\sigma(A)\backslash\sigma_e(A)$ ni γ es punto aislado de $\sigma(B)\backslash\sigma_e(B)$, entonces $\mu \in U \subset \sigma(A)$ y $\gamma \in V \subset \sigma(B)$, donde U y V son huecos de $\sigma_e(A)$ y $\sigma_e(B)$ respectivamente, luego por el lema 3.1 $\lambda = \mu\gamma \in \sigma_e(A \otimes B)$ lo que contradice al teorema 3.4, con lo cual queda probado el lema.

LEMA 3.6.—Sea $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(A \otimes B)\backslash(\sigma_e(A)\,\sigma(B) \cup \sigma(A)\,\sigma_e(B))$ y sea $D_A = \{\mu \mid \mu$ es un punto aislado de $\sigma(A)\backslash\sigma_e(A)$ y existe $\gamma \in \sigma(B)$ tal que $\lambda = \mu\gamma\}$, entonces D_A es un conjunto finito.

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que D_A es infinito. $D_A \subset \sigma(A)\backslash\sigma_e(A) \subset \subset \sigma(A)$. Como $\sigma(A)$ es compacto, existe una sucesión $\{\mu_n\} \subset D_A$ convergente

$$\mu_n \longrightarrow \mu_0 \in \sigma(A)$$

donde μ_0 es un punto de acumulación de $\sigma(A)$.

Como $D_A \subset \sigma(A)\backslash\sigma_e(A)$, podemos tener $\mu_0 \in \sigma_e(A)$ o bien $\mu_0 \notin \sigma_e(A)$.

— Si $\mu_0 \notin \sigma_e(A)$, entonces $A - \mu_0 I$ es Fredholm y μ_0 está en un hueco H de $\sigma(A)$ (o bien es un punto aislado lo cual queda descartado por ser de acumulación). Como μ_n converge a μ_0 para n suficientemente grande, μ_n está en H, ya que los huecos son abiertos, por lo tanto μ_n no es un punto aislado de $\sigma(A)\backslash\sigma_e(A)$ lo cual contradice el que $\mu_n \in D_A$.

— Si $\mu_0 \in \sigma_e(A)$ sea $\gamma_n = \lambda/\mu_n$. $\{\gamma_n\}$ es una sucesión que converge a $\lambda/\mu_0 = \gamma_0$ (Observemos que $\mu_0 \neq 0$ ya que las γ_n están acotadas). Así $\lambda = \mu_0\gamma_0$ con $\mu_0 \in \sigma_e(A)$ y $\gamma_0 \in \sigma(B)$, es decir, $\lambda \in \sigma_e(A)\,\sigma(B)$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto podemos concluir que D_A es finito. Observemos que si $\mu \in D_A \subset \sigma(A)\backslash\sigma_e(A)$, entonces $A - \mu I$ es Fredholm y por lo tanto el rango de $A - \mu I$ es cerrado, $\mathrm{Nul}(A - \mu I) < \infty$ y $\mathrm{Def}(A - \mu I) < \infty$, de donde μ es un valor propio de multiplicidad finita.

Usando este conjunto $D_A = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, podemos descomponer a $\mathcal{H}$ (salvo isomorfismos) en una suma ortogonal

$$\mathcal{H} = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus M_{n+1}$$

y al operador A en

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus A_{n+1}$$

donde

1) $A_j \in \mathcal{L}(M_j)$ para $1 \leqslant j \leqslant n + 1$.
2) $\dim M_j < \infty$ para $1 \leqslant j \leqslant n$.
3) $\sigma(A_j) = \{\mu_j\}$ para $1 \leqslant j \leqslant n$.
4) $\sigma(A_{n+1}) \cap D_A = \phi$.
5) La matriz asociada a cada A_j es una matriz triangular con μ_j en diagonal para $1 \leqslant j \leqslant n$.

Análogamente, el conjunto $D_B = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ definido de manera similar a D_A permite descomponer a $\mathcal{H}$ en

$$\mathcal{H} = N_1 \oplus \dots \oplus N_m \oplus N_{m+1}$$

y a B en

$$B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m \oplus B_{m+1}$$

Usando estas descomposiciones, obtenemos

$$\begin{aligned} A \otimes B - \lambda I = {} & (A_1 \otimes B_1 - \lambda I) \oplus \dots \oplus (A_1 \otimes B_m - \lambda I) \oplus (A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I) \\ & \vdots \\ & \oplus (A_n \otimes B_1 - \lambda I) \oplus \dots\dots \oplus (A_n \otimes B_{m+1} - \lambda I) \\ & \oplus (A_{n+1} \otimes B_1 - \lambda I) \oplus \dots\dots \oplus (A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I) \end{aligned}$$

donde cada $A_j \otimes B_k - \lambda I \in \mathcal{L}(M_j \otimes N_k)$.

PROPOSICIÓN 3.7.—Sea $\lambda \neq 0$,

$$\lambda \in \sigma(A \otimes B) \setminus (\sigma_e(A)\, \sigma(B) \cup \sigma(A)\, \sigma_e(B))$$

con $\lambda = \gamma$ y $\mu \in \sigma(A)$, $\gamma \in \sigma(B)$. Si A_j y B_k con $1 \leqslant j \leqslant n + 1$ y $1 \leqslant k \leqslant m + 1$ son los operadores correspondientes a la descomposición anterior:

i) $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm de índice cero para $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$.

ii) $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es Fredholm de índice cero.

iii) $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es Fredholm de índice igual a $(\dim M_j)\, i\, (B_{m+1} - \lambda/\mu_j I)$ para $1 \leqslant j \leqslant n$.

iv) $A_{n+1} \otimes B_k$ es Fredholm de índice igual a $(\dim N_k)\, i\, (A_{n+1} - \lambda/\gamma_k I)$ para $1 \leqslant k \leqslant m$.

DEMOSTRACIÓN.—Probaremos primero que $A_1 \otimes B_1 - \lambda I$ es Fredholm. Como M_1 y N_1 son de dimensión finita, el espacio $S = M_1 \otimes N_1$ es de dimensión igual a $\dim M_1 \times \dim N_1$ y por lo tanto cerrado. Si $T = A_1 \otimes B_1 - \lambda I$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dim S &= \dim (\text{Rango } T) + \dim (\text{Ker } T) = \\ &= \dim (\text{Ker } T^*)^{\perp} + \dim (\text{Ker } T) = \\ &= \dim S - \dim (\text{Ker } T^*) + \dim (\text{Ker } T). \end{aligned}$$

Así que $\dim (\text{Ker } T) = \dim (\text{Ker } T^*)$, es decir $\text{Nul } T = \text{Def } T$ y $\text{Ran } T$ es cerrado ya que S es de dimensión finita, por lo tanto T es Fredholm de índice cero.

De manera análoga se prueba que $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm de índice cero para $1 \leqslant j \leqslant n$ y $1 \leqslant k \leqslant m$.

Veamos ahora que $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es Fredholm. Como $\lambda \notin \sigma(A_{n+1})\, \sigma(B_{m+1}) = \sigma(A_{n+1} \otimes B_{m+1})$, entonces $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es invertible y por lo tanto Fredholm de índice cero.

Nos quedan por analizar los operadores de la forma

$$A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I \quad \text{y} \quad A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I \quad \text{con} \quad 1 \leq j \leq n \quad \text{y} \quad 1 \leq k \leq m.$$

Veamos que $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es Fredholm.

$$\begin{aligned} A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I &= (A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I) + (\mu_1 I \otimes B_{m+1}) - \\ &- (\mu_1 I \otimes B_{m+1}) = (I \otimes \mu_1 B_{m+1} - \lambda I \otimes I) + (A_1 \otimes B_{m+1} - \\ &- \mu_1 I \otimes B_{m+1}) = (I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}})) + \\ &+ ((A_1 - \mu_1 I_{M_1}) \otimes B_{m+1}) \end{aligned}$$

Veamos primero que $I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}})$ es Fredholm.

$$I_{M_1} \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}}) =$$

$$= \underbrace{(\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}}) \oplus \ldots \oplus (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I_{N_{m+1}})}_{\dim M_1 < \infty}$$

Debemos ver entonces que cada sumando es Fredholm. Tenemos que $\mu_1 B_{m+1} - \lambda I = \mu_1 (B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I)$ y $\lambda/\mu_1 \notin \sigma_e (B_{m+1})$ ya que si $\lambda/\mu_1 \in \sigma_e (B_{m+1}) \subset \sigma_e (B)$, $\mu_1 \in \sigma (A_1) \subset \sigma (A)$ con lo cual tendríamos $\lambda = \mu_1 (\lambda/\mu_1) \in \sigma (A) \sigma_e (B)$ contrario a la hipótesis. Así que $B_{m+1} - \lambda/\mu_1 I$ es Fredholm y por lo tanto $\mu_1 B_{m+1} - \lambda I$ también lo es y podemos entonces concluir que $I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)$ es Fredholm y que su índice está dado por

$$i (I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) = (\dim M_1)\, i (\mu_1 (B_{m+1} - \lambda / \mu_1 I).$$

Ahora, como el conjunto de operadores de Fredholm es abierto en $\mathcal{L} (\mathcal{H})$, existe $\delta > 0$ tal que si $\| S - I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) \| < \delta$ entonces S es Fredholm y tiene el mismo índice que $I \otimes \mu_1 B_{m+1} - \lambda I$.

Consideremos ahora el operador $A_1 - \mu_1 I_M$, que es un operador nilpotente y, por lo tanto, similar a un operador nilpotente de norma pequeña [15], en este caso, elegiremos la norma menor que $\delta/\| B_{m+1} \|$. Es decir, que existe $X \in \mathcal{L} (M_1)$, X invertible y tal que $X^{-1} (A_1 - \mu_1 I) X = T$ con $\| T \| < \delta/\| B_{m+1} \|$.

Observemos entonces que se tiene

$$\| (I \otimes \mu_1 B_{m+1} - \lambda I) - [(I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I)) + X^{-1} (A_1 -$$

$$- \mu_1 I) X \otimes B_{m+1}] \| = \| X^{-1} (A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1} \| =$$

$$= \| X^{-1} (A_1 - \mu_1 I) X \| \; \| B_{m+1} \| < \delta.$$

Así que $I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) + X^{-1} (A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1}$ es Fredholm y del mismo índice que $I \otimes \mu_1 B_{m+1} - \lambda I$.

Por otro lado,

$$(X \otimes I)^{-1} (A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I) (X \otimes I) =$$

$$= I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) + (X^{-1} (A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1})$$

de manera que $A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I \otimes I$ es similar a

$$I \otimes (\mu_1 B_{m+1} - \lambda I) + (X^{-1} (A_1 - \mu_1 I) X \otimes B_{m+1})$$

y por lo tanto es Fredholm y del mismo índice igual a

$$(\dim M_1) (i (\mu_1 (B_{m+1} - \lambda / \mu_1 I))) .$$

De manera análoga se prueba que $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ y $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ con $1 \leqslant j \leqslant n$ y $1 \leqslant k \leqslant m$ son Fredholm. Así que $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm para todo j y k.

TEOREMA 3.8.—Si A y B están en $\mathcal{L} (\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_e (A \otimes B) = \sigma_e (A) \sigma (B) \cup \sigma (A) \sigma_e (B).$$

DEMOSTRACIÓN.—Por el teorema 3.4, tenemos

$$\sigma_e (A) \sigma (B) \cup \sigma (A) \sigma_e (B) \subset \sigma_e (A \otimes B) .$$

Probaremos la otra contención. Si $0 \in \sigma_e (A \otimes B)$, entonces $A \otimes B = (A \otimes I) (I \otimes B)$ no es de Fredholm, entonces [13 prop. 1.16] alguno de los factores no es de Fredholm. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(A \otimes I)$ no es de Fredholm, esto es, $0 \in \sigma_e (A \otimes I) = \sigma (A)$. Tomemos cualquier $\gamma \in \sigma_e (B)$, entonces

$$0 = 0 . \gamma \in \sigma (A) \sigma_e (B) \subset \sigma_e (A) \sigma (B) \cup \sigma (A) \sigma_e (B).$$

Ahora, si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma_e (A \otimes B)$, supongamos que $\lambda \notin \sigma_e (A) \sigma (B) \cup \sigma (A) \sigma_e (B)$, entonces por los lemas 3.5 y 3.6 podemos obtener una descomposición de $\mathcal{H}$ y de $A \otimes B - \lambda I$ como

$$\begin{aligned} A \otimes B - \lambda I = {} & (A_1 \otimes B_1 - \lambda I) \oplus \ldots \oplus (A_1 \otimes B_{m+1} - \lambda I) \\ & \vdots \\ & \oplus (A_{n+1} \otimes B_1 - \lambda I) \oplus \ldots \oplus (A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I) . \end{aligned}$$

Por la proposición 3.7, tenemos que cada sumando es de Fredholm y, como la suma directa de operadores de Fredholm es de Fredholm, entonces $A \otimes B - \lambda I$ lo es y, por lo tanto, $\lambda \notin \sigma_e (A \otimes B)$ lo cual es una contradicción; por lo tanto hemos probado

$$\sigma_e (A \otimes B) \subset \sigma_e (A) \, \sigma (B) \cup \sigma (A) \, \sigma_e (B)$$

y queda demostrado el teorema.

Ahora probaremos resultados similares al anterior para el espectro esencial derecho e izquierdo.

Para probar que

$$\sigma_e \, (A \otimes B) = \sigma_{ei} (A) \, \sigma_i (B) \cup \sigma_i (A) \, \sigma_{ei} (B)$$

basta probar que $\sigma_{ei} (A \otimes B) \subset \sigma_{ei} (A) \, \sigma_i (B) \cup \sigma_i (A) \, \sigma_{ei} (B)$ ya que la otra contención es una consecuencia del lema 3.2.

El siguiente lema es similar al lema 3.3 y se prueba siguiendo la misma técnica pero utilizando que si $T \in \mathcal{L} (\mathcal{H})$ y $\lambda \in \partial (\sigma_i (T))$ y no es un punto aislado de $\sigma_i(T)$, entonces $\lambda \in \sigma_{ed}(T) \cap \sigma_{ei}(T)$ [7 lema 3.6].

Lema 3.9.—Sean $A, B \in \mathcal{L} (\mathcal{H})$, y si $\mu \in U \subset \sigma_i (A)$ y $\gamma \in V \subset \sigma_i (B)$ donde U y V son huecos o pseudohuecos de índice $-\infty$, entonces $\mu \, \gamma \in \sigma_{ei} (A \otimes B)$.

Como en el caso del espectro esencial, tenemos que si $T \in \mathcal{L} (\mathcal{H})$, $\sigma_i (T) \backslash \sigma_{ei} (T)$ está constituido por huecos o pseudohuecos de $\sigma_e (T)$ contenidos en $\sigma_i (T)$ y por puntos aislados de $\sigma_i (T) \backslash \sigma_{ei} (T)$, por lo que tenemos el siguiente resultado, similar al del lema 3.5, que se prueba con la misma técnica que en dicho lema y usando el resultado de Harte [10] $\sigma_i (A \otimes B) = \sigma_i (A) \, \sigma_i (B)$.

Lema 3.10.—Si $\lambda \neq 0$ está en $\sigma_i (A \otimes B) \backslash \sigma_{ei} (A) \, \sigma_i (B) \cup \sigma_i (A) \, \sigma_{ei} (B)$ entonces μ es un punto aislado de $\sigma_i (A) \backslash \sigma_{ei} (A)$ o bien γ es un punto aislado de $\sigma_i (B) \backslash \sigma_{ei} (B)$.

Lema 3.11.—Sea $\lambda \neq 0$ como en el lema anterior, entonces el conjunto $D_{A_i} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu$ es un punto aislado de $\sigma_i (A) \backslash \sigma_{ei} (A)$ con la propiedad de que existe $\gamma \in \sigma_i (B)$ tal que $\lambda = \mu \, \gamma\}$ es finito.

La demostración es similar a la del lema 3.6.

En [7], Fialkow prueba que se puede tener una descomposición similar a la que explicamos después del lema 3.6 usando el conjunto $D_{A_i} = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$, esto es, podemos descomponer a $\mathcal{H}$ (salvo isomorfismos) en una suma ortogonal

$$\mathcal{H} = M_1 \oplus \ldots \oplus M_{n+1}$$

y al operador A en

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_{n+1}$$

donde

1) $\dim M_j < \infty$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.
2) $\sigma(A_j) = \{\mu_j\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.
3) $\sigma_i(A_{n+1}) \cap D_{A_i} = \phi$.
4) La matriz asociada a cada A_j es una matriz triangular con μ_j en la diagonal, para $1 \leqslant j \leqslant n$.

Análogamente, el conjunto $D_{B_i} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ definido de manera similar nos permite descomponer a

$$\mathcal{H} \text{ en } N_1 \oplus \ldots \oplus N_{m+1} \quad \text{y a B en } B_1 \oplus \ldots \oplus B_{m+1}$$

Usando estas descomposiciones y la misma técnica que la desarrollada en la proposición 3.7, se puede probar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.12.—Sea λ como en el lema 3.10, entonces

i) $A_j \otimes B_k - \lambda I$ es Fredholm de índice cero para $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant m$.
ii) $A_{n+1} \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es semi-Fredholm de índice menor o igual a cero.
iii) $A_j \otimes B_{m+1} - \lambda I$ es semi-Fredholm de índice igual a

$$(\dim M_j)\, i\,(B_{m+1} - \lambda/\gamma_k I) < \infty \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n .$$

iv) $A_{n+1} \otimes B_k - \lambda I$ es semi-Fredholm de 'ndice igual a

$$(\dim N_k)\, i\,(A_{n+1} - \lambda/\gamma_k I) < \infty \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq m .$$

Finalmente tenemos todos los elementos para calcular $\sigma_{ei}(A \otimes B)$ usando una técnica similar a la del teorema 3.8 pero esta vez con operadores semi-Fredholm.

TEOREMA 3.13.—Si A y B están en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_{ei}(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\,\sigma_{ei}(B)$$

De la misma manera que se demostró 3.13, se podría hacer la demostración para el caso del espectro esencial derecho, pero aquí usaremos ese teorema para obtener el resultado de una manera más rápida tomando operadores adjuntos.

TEOREMA 3.14.—Si A y B están en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces

$$\sigma_{ed}(A \otimes B) = \sigma_{ed}(A)\,\sigma_d(B) \cup \sigma_d(A)\,\sigma_{ed}(B)\,.$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta ver que $\lambda \in \sigma_{ed}(A \otimes B)$ es equivalente a que $\bar{\lambda} \in \sigma_{ei}(A \otimes B)^*$ y que $\sigma_{ei}(A \otimes B)^* = \sigma_{ei}(A^* \otimes B^*)$.

Observemos que tenemos dos resultados para el espectro de $A \otimes B$:

$$\text{I)} \quad \sigma_e(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A \otimes B) \cup \sigma_{ed}(A \otimes B)$$

y

$$\text{II)} \quad \sigma_e(A \otimes B) = \sigma_e(A)\,\sigma(B) \cup \sigma(A)\,\sigma_e(B)\,.$$

Si descomponemos los espectros y espectros esenciales de la segunda fórmula en uniones de espectros y espectros esenciales izquierdos y derechos, y los resultados de 3.13 y 3.14 en la primera, obtenemos

$$\text{I}')\quad \sigma_e(A \otimes B) = \sigma_{ei}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_i(A)\,\sigma_{ei}(B) \cup \sigma_{ed}(A)\,\sigma_d(B) \cup \\ \cup\, \sigma_d(A)\,\sigma_{ed}(B)\,.$$

$$\text{II}')\quad \sigma_e(A \otimes B) = (\sigma_{ei}(A) \cup \sigma_{ed}(A))\,(\sigma_i(B) \cup (\sigma_d(B)) \cup \\ \cup\, (\sigma_i(A) \cup \sigma_d(A))\,(\sigma_{ei}(B) \cup \sigma_{ed}(B)) = \\ = \sigma_{ei}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_{ei}(A)\,\sigma_d(B) \cup \sigma_{ed}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\,\sigma_d(B) \cup \\ \cup\, \sigma_i(A)\,\sigma_{ei}(B) \cup \sigma_i(A)\,\sigma_{ed}(B) \cup \sigma_d(A)\,\sigma_{ei}(B) \cup \sigma_d(A)\,\sigma_{ed}(B)\,.$$

En II′ aparecen términos que no aparecen en I′, sin embargo veremos que estos resultados son equivalentes probando el siguiente

LEMA 3.15.

$$\sigma_{ei}(A)\,\sigma_d(B) \subset \sigma_{ei}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\,\sigma_d(B)$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\,\sigma_d(B)$ donde $\lambda = \mu\,\gamma$ con $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B)$.

Si $\mu \in \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A)$ o $\gamma \in \sigma_d(B) \cap \sigma_i(B)$, es inmediato que $\lambda = \mu\,\gamma \in \sigma_{ei}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\,\sigma_d(B)$.

Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)\backslash\sigma_{ed}(A)$ y $\gamma \in \sigma_d(B)\backslash\sigma_i(B)$. entonces, como en el teorema 3.4, μ está en un pseudohueco U de $\sigma_e(A)$. Y como $\gamma \in \sigma_d(B)\backslash\sigma_i(B)$ entonces Def $(B - \gamma) > 0$, por lo tanto γ está en un hueco o pseudohueco V de $\sigma_e(B)$, por el lema 3.1, existen $\mu_0 \in \overline{U}$ y $\gamma_0 \in \overline{V}$ tales que $\mu_0\,\gamma_0 = \lambda$ y $\mu_0 \in \partial U$ o bien $\gamma_0 \in \partial V$ y como

$$\partial U \subset \sigma_{ei}(A) \cap \sigma_{ed}(A) \quad \text{y} \quad \partial V \subset \sigma_{ei}(B) \cap \sigma_{ed}(B)$$

entonces

$$\lambda = \mu\,\gamma = \mu_0\,\gamma_0 \in \sigma_{ei}(A)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_{ed}(A)\,\sigma_d(B)$$

4. LA FIGURA ESPECTRAL DE $A \otimes B$

Determinaremos ahora la figura espectral de $A \otimes B$ conociendo las de A y B.

LEMA 4.1.—Sean J un hueco de $\sigma_e(A)$ y $\gamma \neq 0$ un punto aislado de $\sigma(B)\backslash\sigma_e(B)$. Si $\gamma\,J\backslash\sigma_e(A \otimes B)$ es no vacío, entonces sus componentes conexas son huecos de $\sigma_e(A \otimes B)$.

DEMOSTRACIÓN.—Como $\gamma\,J$ es abierto y $\sigma_e(A \otimes B)$ es compacto, entonces $\gamma\,J\backslash\sigma_e(A \otimes B)$ es abierto. Si es no vacío, como J es acotado, entonces $\gamma\,J\backslash\sigma_e(A \otimes B)$ es un subconjunto acotado y abierto de $\mathbb{C}\backslash\sigma_e(A \otimes B)$ y por lo tanto cada una de sus componentes conexas V está contenida en un único hueco H de $\sigma_e(A \otimes B)$.

Supongamos que $V \neq H$, entonces existe un punto $z_0 \in \partial V \cap H$ y, como $H \cap \sigma_e(A \otimes B) = \phi$, entonces $z_0 \notin \sigma_e(A \otimes B)$.

Elegimos una sucesión $\{z_n\}$ de puntos distintos de V que converja a z_0.

Como $V \subset \sigma J \backslash \sigma_e (A \otimes B)$, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos distintos de J tales que $\gamma x_n = z_n$ para cada n.

Sea $\{x_{n_k}\}$ una subsucesión convergente de $\{x_n\}$, digamos $x_{n_k} \longrightarrow x_0$. Entonces $x_0 \in \bar{J}$ y claramente $\gamma x_0 = z_0$, pero $x_0 \in \partial J$ es imposible porque $\partial J \subset \sigma_e (A)$ y $\gamma x_0 = z_0 \notin \sigma_e (A \otimes B)$, $x_0 \in J$ también es imposible porque implicaría que $\gamma x_0 = z_0 \in \gamma J \backslash \sigma_e (A \otimes B)$ contrario al hecho de que $z_0 \in \partial V$. Por lo tanto $V = H$.

Análogamente se demuestra que si W es un hueco de $\sigma_e (B)$, y $\mu \neq 0$ es un punto aislado de $\sigma (A) \backslash \sigma_e (A)$, y si $\mu W \backslash \sigma_e (A \otimes B) \neq \phi$, entonces sus componentes conexas son huecos de $\sigma_e (A \otimes B)$.

Veremos a continuación cómo se forman los huecos de $\sigma_e (A \otimes B)$ partiendo de los huecos de $\sigma_e (A)$ y $\sigma_e (B)$ y de los puntos aislados de $\sigma (A) \backslash \sigma_e (A)$ y $\sigma (B) \backslash \sigma_e (B)$.

Sea H un hueco de $\sigma_e (A \otimes B)$ y $\lambda \in H$.

Definimos $E_A (\lambda) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \mu$ es un punto aislado de $\sigma (A) \backslash \sigma_e (A)$ tal que $\lambda/\mu \in V_\mu \subset \sigma (B)$, donde V_μ es un hueco de $\sigma_e (B)\}$, y $E_B (\lambda) = \{\gamma \in \mathbb{C} \mid \gamma$ es un punto aislado de $\sigma (B) \backslash \sigma_e (B)$ tal que $\lambda/\gamma \in J_\gamma \subset \sigma (A)$ donde J_γ es un hueco de $\sigma_e (A)\}$.

Consideremos los conjuntos D_A y D_B definidos en el lema **3.6.** Como $E_A (\lambda) \subset D_A$ y $E_B (\lambda) \subset D_B$ y D_A y D_B son finitos, entonces $E_A (\lambda)$ y $E_B (\lambda)$ también lo son.

Lema 4.2.—Sea H un hueco de $\sigma_e (A \otimes B)$, $\lambda \in H$ y $\gamma \in E_B (\lambda)$, $\gamma \neq 0$, entonces $H \subset \gamma J_\gamma \subset \sigma (A \otimes B)$, esto es, todo punto de H es producto del mismo punto aislado de $\sigma (B) \backslash \sigma_e (B)$ por algún punto del hueco J_γ de $\sigma_e (A)$.

Demostración.—Queremos probar que $H \subset \gamma J_\gamma$. Supongamos que $H \not\subset \gamma J_\gamma$, entonces existe $z \in H \cap \partial (\gamma J_\gamma) \subset H \cap \gamma (\partial J_\gamma)$ ya que H y γJ_γ son abiertos. Sea $x \in \partial J_\gamma$ tal que $\gamma x = z$, entonces

$$x \in \sigma_{ei} (A) \cap \sigma_{ed} (A) \quad \text{y} \quad z = \gamma x \in \sigma_e (A) \sigma (B) \subset \sigma_e (A \otimes B)$$

lo que es una contradicción ya que $z \in H$.

Además $\gamma J_\gamma \subset \sigma (B) \sigma (A) = \sigma (A \otimes B)$.

Análogamente, si $\lambda \in H$ y $\mu \in E_A (\lambda)$, $\mu \neq 0$, entonces $H \subset \mu V_\mu \subset$ $\subset \sigma (A \otimes B)$.

Lema 4.3.—Los conjuntos E_A y E_B son independientes de la λ elegida en H.

DEMOSTRACIÓN.—Probaremos el resultado para E_B.

Sea $E_B(\lambda) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ y supongamos que existe $\lambda' \in H$ tal que $\gamma' \mu'$ con $\gamma' \neq \gamma_i$ para todo i. Sea J' el hueco de $\sigma_e(A)$ donde está μ', entonces, por 4.2, $H \subset \gamma' J'$, es decir $\lambda = \mu'' \gamma'$ lo cual es una contradicción ya que $\gamma' \notin E_B(\lambda)$.

LEMA 4.4.—Sea H un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$. $H \subset \sigma(A \otimes B)$ si y sólo si $E_A \neq \phi$ o $E_B \neq \phi$ y en este caso H es una componente conexa de

$$\Big(\Big(\bigcap_{\gamma \in E_B} \gamma J_\gamma\Big) \cap \Big(\bigcap_{\mu \in E_A} \mu V_\mu\Big)\Big) \setminus \sigma_e(A \otimes B).$$

DEMOSTRACIÓN.—$\Leftarrow$) es inmediata de 4.2.

$\Rightarrow$) Sean $H \subset \sigma(A \otimes B)$, $\lambda \in H$ y $\{\lambda_n\} \subset H$ una sucesión de puntos distintos entre sí y distintos de cero que converge a λ.

Como $H \subset \sigma(A \otimes B) = \sigma(A)\,\sigma(B)$, para todo n, $\lambda_n = \mu_n \gamma_n$ con $\mu_n \in \sigma(A)$ y $\gamma_n \in \sigma(B)$. Como $\lambda_n \notin \sigma_e(A \otimes B)$ entonces $\mu_n \in \sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$, $\gamma_n \in \sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$.

Como $\{\mu_n\}$ y $\{\gamma_n\}$ están acotadas, existe una subsucesión $\{\mu_{n_k}\}$ de $\{\mu_n\}$ que converge a un μ_0 y una subsucesión $\{\gamma_{n_{k_j}}\}$ de $\{\gamma_{n_k}\}$ que converge a un γ_0, entonces $\{\mu_{n_{k_j}} \gamma_{n_{k_j}}\}$ converge a $\mu_0 \gamma_0 = \lambda$.

Alguna de las dos sucesiones $\{\mu_{n_{k_j}}\}$ o $\{\gamma_{n_{k_j}}\}$ no es constante, supongamos que es $\{\mu_{n_{k_j}}\}$, entonces μ_0 es un punto de acumulación de $\sigma(A) \setminus \sigma_e(A)$, por lo tanto debe estar en un hueco J de $\sigma_e(A)$ contenido en $\sigma(A)$ y, por 3.5, γ_0 debe ser un punto aislado de $\sigma(B) \setminus \sigma_e(B)$, de donde $\gamma_0 \in E_B$.

Por el lema 4.2,

$$H \subset \Big(\Big(\bigcap_{\gamma \in E_B} \gamma J_\gamma\Big) \cap \Big(\bigcap_{\mu \in E_A} \mu V_\mu\Big)\Big) \setminus \sigma_e(A \otimes B)$$

Por el lema 4.1, H es una componente conexa de cada uno de los conjuntos $\gamma J_\gamma \setminus \sigma_e(A \otimes B)$, $\mu V_\mu \setminus \sigma_e(A \otimes B)$ con $\gamma \in E_B$ y $\mu \in E_A$, como las fronteras $\partial(\gamma J_\gamma)$ y $\partial(\mu V_\mu)$ son subconjuntos de $\sigma_e(A \otimes B)$ entonces H es una componente conexa de

$$\Big(\Big(\bigcap_{\gamma \in E_B} \gamma J_\gamma\Big) \cap \Big(\bigcap_{\mu \in E_A} \mu V_\mu\Big)\Big) \setminus \sigma_e(A \otimes B).$$

Por último queremos determinar el índice de H y para ello usaremos la descomposición de $A \otimes B - \lambda I$ de la proposición 3.7, donde $\lambda \in H$ y H es un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$.

Como el índice de una suma directa de operadores es la suma de los índices de los sumandos obtenemos, por 3.7,

$$i(A \otimes B - \lambda I) = \sum_{k=1}^{m} (\dim N_k)\,(i(A_{n+1} - \lambda / \gamma_k)) + \\ + \sum_{j=1}^{n} (\dim M_j)\, i(B_{m+1} - \lambda / \mu_j I)\,.$$

Si llamamos J_{γ_k} al hueco de $\sigma_e(A)$ donde está λ/γ_k y V_{μ_j} al hueco de $\sigma_e(B)$ donde está λ/μ_j, obtenemos

$$i(A \otimes B - \lambda I) = \sum_{j=1}^{u} (\dim M_j)\,(i(V_{\mu_j})) + \sum_{k=1}^{m} (\dim N_k)\,(i(J_{\gamma_k}))\,.$$

Esta fórmula no depende del λ elegido en H.

Recopilando lo anterior tenemos:

TEOREMA 4.5.—Sea H un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$.

i) Si $E_A = E_B = \phi$, entonces $H \not\subset \sigma(A \otimes B)$ y por lo tanto $i(H) = 0$.

ii) Si $E_A \neq \phi$ o $E_B \neq \phi$ entonces

$$i(H) = \sum_{\mu_j \in E_A} (\dim M_j)\,(i(V_{\mu_j})) + \sum_{\gamma_k \in E_B} (\dim N_k)\,(i(J_{\gamma_j}))$$

donde $\dim(M_j)$ y $\dim(N_k)$ son las multiplicidades geométricas de μ_j y γ_k, respectivamente, y V_{μ_j} y J_{γ_k} son los huecos de $\sigma_e(A)$ y $\sigma_e(B)$ que contienen a $\frac{1}{\mu_j}$ H y $\frac{1}{\gamma_k}$ H, respectivamente.

Estudiaremos ahora los pseudohuecos de $\sigma_e(A \otimes B)$.

LEMA 4.6.—Sea J' un pseudohueco de índice $-\infty$ $[+\infty]$ de $\sigma_e(A)$ y $\gamma \neq 0$ un punto aislado de $\sigma_i(B) \backslash \sigma_{ei}(B)$ $[\sigma_d(B) \backslash \sigma_{ed}(B)]$. Si $\gamma J' \backslash \sigma_{ei}(A \otimes B)$ es no vacío $[\gamma J' \backslash \sigma_{ed}(A \otimes B)]$, entonces sus componentes conexas son pseudohuecos de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $-\infty$ [$+\infty$].

La demostración es análoga a la del lema 4.1. Análogamente, si W' es un pseudohueco de índice $-\infty$ [$+\infty$] de $\sigma_e(B)$ y $\mu \neq 0$ es un punto aislado de $\sigma_i(A) \backslash \sigma_{ei}(A)$ [$\sigma_d(A) \backslash \sigma_{ed}(A)$], si $\mu W' \backslash \sigma_{ei}(A \otimes B)$ es no vacío [$\mu W' \backslash \sigma_{ed}(A \otimes B)$] entonces sus componentes conexas son pseudohuecos de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $-\infty$ [$+\infty$].

Para λ en un pseudohueco H' de índice $-\infty$ definimos $E_{A_i}(\lambda)$ como el conjunto de $\mu \in \mathbb{C}$ tal que μ es punto aislado de $\sigma_i(A) \backslash \sigma_{ei}(A)$ y $\lambda/\mu \in V_\mu \subset \sigma_i(B)$ donde V_μ es un pseudohueco de $\sigma_e(B)$ de índice $-\infty$. Definimos E_{B_i} de manera análoga.

De la misma manera que como se hizo en el caso de huecos, se demuestra que E_{A_i} y E_{B_i} son finitos y no dependen de la λ elegida en el pseudohueco. Además tenemos que $H' \subset \sigma_i(A \otimes B)$ si y sólo si $E_{A_i} \neq \phi$ o $E_{B_i} \neq \phi$ lo cual nos permite obtener un teorema similar a 4.4.

Teorema 4.7.—Sea H' un pseudohueco de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $-\infty$. $H' \subset \sigma_i(A \otimes B)$ si y sólo si E_{A_i} o E_{B_i} son no vacíos y en este caso H' es una componente conexa de

$$\Big(\bigcap_{\gamma \in E_{B_i}} \gamma J'_\gamma \Big) \cup \Big(\bigcap_{\mu \in E_{A_i}} \mu U'_\mu \Big) \setminus \sigma_{ei}(A \otimes B) .$$

Desde luego, se tiene un teorema análogo para pseudohuecos de índice $-\infty$.

No todos los pseudohuecos de $\sigma_e(A \otimes B)$ se obtienen como en el teorema anterior, como lo muestran los ejemplos de § 5, veamos otra manera en que pueden aparecer pseudohuecos.

Teorema 4.8.—Si $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ [$\sigma_{ed}(A)$] y H es un hueco o pseudohueco de $\sigma_e(B)$ tal que $H \subset \sigma_i(B)$ [$\sigma_d(B)$], entonces las componentes conexas de $\mu H \backslash \sigma_{ed}(A \otimes B)$ [$\mu H \backslash \sigma_{ei}(A \otimes B)$] son pseudohuecos de índice $+\infty$ [$-\infty$].

Demostración.—Si $\lambda \in \mu H \backslash \sigma_{ed}(A \otimes B)$, entonces $\lambda = \mu\gamma$ donde $\mu \in \sigma_{ei}(A)$ y $\gamma \in \sigma_i(B)$, entonces $\lambda \in \sigma_{ei}(A)\, \sigma_i(B) \subset \sigma_{ei}(A \otimes B)$ y $\lambda \notin \sigma_{ed}(A \otimes B)$, por lo tanto λ estará en un pseudohueco J de $\sigma_e(A \otimes B)$ de índice $+\infty$.

La demostración de que J es una componente conexa de μ $H \backslash \sigma_{ed}(A \otimes B)$ es similar a la de 4.1.

5. Ejemplos

5.1. Sea U el corrimiento lateral izquierdo en l_2 definido por

$$U(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots,) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots,).$$

Entonces U^* es el corrimiento lateral derecho, es claro que $U U^* = I$ y $U^* U = I - P$ donde P es una proyección de rango 1.

Es conocido que $\sigma_i(U)$ es $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ y $\sigma_d(U)$ es $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Para calcular el espectro esencial de U basta observar que $\pi(U)$ es unitario, entonces $\sigma_e(U) = \partial D$, además como $i(U) = 1$, D forma un hueco de índice $+1$.

Por lo tanto

$$FE(U) = \{\sigma_e(U) = \{\lambda \mid |\lambda| = 1\},$$

$$H = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}, \quad i(H) = 1\}.$$

5.2. Sea I la identidad, y U como en el ejemplo 1.

Calcularemos la figura espectral de $U \otimes I$. Sabemos que $\sigma(I) = \sigma_i(I) = \sigma_d(I) = \sigma_e(I) = \sigma_{ei}(I) = \sigma_{ed}(I) = \{1\}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}
\sigma(U \otimes I) &= \sigma(U)\,\sigma(I) = \sigma(U) = \overline{D} \\
\sigma_i(U \otimes I) &= \sigma_i(U)\,\sigma_i(I) = \sigma_i(U) = \overline{D} \\
\sigma_d(U \otimes I) &= \sigma_d(U)\,\sigma_d(I) = \sigma_d(U) = \partial D\,. \\
\sigma_{ei}(U \otimes I) &= \sigma_{ei}(U)\,\sigma_i(I) \cup \sigma_i(U)\,\sigma_{ei}(I) = \sigma_i(U) = \overline{D} \\
\sigma_{ed}(U \otimes I) &= \sigma_{ed}(U)\,\sigma_d(I) \cup \sigma_d(U)\,\sigma_{ed}(I) = \sigma_d(U) = \partial D \\
\sigma_e(U \otimes I) &= \sigma_{ei}(U \otimes I) \cup \sigma_{ed}(U \otimes I) = \overline{D}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$FE(U \otimes I) = \{\sigma_e(U \otimes I) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\},$$

$$pH = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}, \quad i(pH) = +\infty\}.$$

5.3. Sea U como en el ejemplo 1. Calcularemos la figura espectral de $U \otimes U$.

$$
\begin{aligned}
\sigma(U \otimes U) &= \sigma(U)\,\sigma(U) = \overline{D}\\
\sigma_i(U \otimes U) &= \sigma_i(U)\,\sigma_i(U) = \overline{D}\\
\sigma_d(U \otimes U) &= \sigma_d(U)\,\sigma_d(U) = \partial D\\
\sigma_{ei}(U \otimes U) &= \sigma_{ei}(U)\,\sigma_i(U) = \overline{D}\\
\sigma_{ed}(U \otimes U) &= \sigma_{ed}(U)\,\sigma_d(U) = \partial D\\
\sigma_e(U \otimes U) &= \sigma_e(U)\,\sigma(U) = \overline{D}\,.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
FE(U \otimes U) = \{\, \sigma_e(U \otimes U) &= \{\lambda \mid |\lambda| \leq 1\},\\
pH &= \{\lambda \mid |\lambda| < 1\},\quad i(pH) = +\infty \,\}
\end{aligned}
$$

5.4. Sea $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador tal que

$$
\begin{aligned}
&\sigma(B) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 2\} \cup \{3\},\\
&\sigma_i(B) = \sigma(B),\\
&\sigma_d(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 2\} \cup \{3\},\\
&\sigma_e(B) = \sigma_{ei}(B) = \sigma_{ed}(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 2\}
\end{aligned}
$$

y la multiplicidad del punto aislado es 2.

Sea U como en el ejemplo 1. Calcularemos la figura espectral de $U \otimes B$.

$$
\begin{aligned}
&\sigma(U \otimes B) = \sigma(U)\,\sigma(B) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 3\}\\
&\sigma_i(U \otimes B) = \sigma_i(U)\,\sigma_i(B) = \{\lambda \mid |\lambda| \leq 3\}\\
&\sigma_d(U \otimes B) = \sigma_d(U)\,\sigma_d(B) = \{\lambda \mid |\lambda| = 3\} \cup \{\lambda \mid |\lambda| = 2\}.\\
&\sigma_{ei}(U \otimes B) = \sigma_{ei}(U)\,\sigma_i(B) \cup \sigma_i(U)\,\sigma_{ei}(B) = \{\lambda \mid |\lambda| =\\
&\qquad = 3\} \cup \{\lambda \mid |\lambda| \leq 2\}\\
&\sigma_{ed}(U \otimes B) = \sigma_{ed}(U)\,\sigma_d(B) \cup \sigma_d(U)\,\sigma_{ed}(B) = \sigma_d(U \otimes B)\\
&\sigma_e(U \otimes B) = \sigma_e(U)\,\sigma(B) \cup \sigma(U)\,\sigma_e(B) = \sigma_{ei}(U \otimes B)
\end{aligned}
$$

Huecos:

$$
\mathbb{C} \setminus \sigma_e(U \otimes B) = \{\lambda \mid 1 < |\lambda| < 3\}
$$

Pseudohuecos:

$$\sigma_e (U \otimes B) \setminus \sigma_{ed} (U \otimes B) = \{ \lambda \mid |\lambda| < 2 \} .$$

El índice del hueco es igual a la multiplicidad del punto aislado de $\sigma (B) \times$ índice del hueco de $\sigma_e (U) = 2 \times 1 = 2$. El índice del pseudohueco es $+\infty$, por lo que la figura espectral es

$$\begin{gathered} \mathrm{FE}\ (U \otimes B) = \{ \sigma_e (U \otimes B) = \{ \lambda \mid |\lambda| \leq 2 \quad \text{o} \quad |\lambda| = 3 \}, \\ H = \{ \lambda \mid 2 < |\lambda| < 3 \}, \quad i (H) = 2, \\ pH = \{ \lambda \mid |\lambda| \leq 2 \}, \quad i (pH) = +\infty \} \end{gathered}$$

5.5. Sea $A \in \mathcal{L} (\mathcal{H})$ tal que

$$\begin{gathered} \sigma (A) = \sigma_i (A) = \sigma_d (A) = \sigma_e (A) = \sigma_{ei} (A) = \sigma_{ed} (A) \\ = \{ \lambda \mid |\lambda| = 1, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0 \} . \end{gathered}$$

Calcularemos la figura espectral de $A \otimes A$.

$$\sigma (A \otimes A) = \sigma (A)\, \sigma (A) = \{ \lambda \mid |\lambda| = 1 \} .$$

$$\begin{gathered} \sigma_i (A \otimes A) = \sigma_d (A \otimes A) = \sigma_e (A \otimes A) = \sigma_{ei} (A \otimes A) = \\ = \sigma_{ed} (A \otimes A) = \sigma (A \otimes A) . \end{gathered}$$

Hay un hueco $H = \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ que no está contenida en $\sigma (A \otimes A)$ por lo tanto su índice es cero.

$$\begin{gathered} \mathrm{FE}\ (A \otimes A) = \{ \sigma_e (A \otimes A) = \{ \lambda \mid |\lambda| = 1 \}, \\ H = \{ \lambda \mid |\lambda| < 1 \}, \quad i (H) = 0 \} . \end{gathered}$$

6. Aplicaciones

Recordemos las siguientes definiciones:

6.1. Definición [13 definición 48].—Un operador A en $\mathcal{L} (\mathcal{H})$ es quasitriangular si existe una sucesión $\{P_n\}$ de proyecciones de rango finito que converge puntualmente a I y que satisfacen $\| P_n A P_n - - A P_n \| \longrightarrow 0$. La clase de todos los operadores quasitriangulares se denota por $\underset{\sim}{Q}\, T$.

6.2. DEFINICIÓN.—Un operador A en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es biquasitritriangular si A y A^* son quasitriangulares. La clase de todos los operadores biquasitriangulares se denotará por $B\,\underset{\sim}{Q}\,T$.

Estas clases de operadores son muy importantes ya que los rumanos Apostol, Foiaș y Voiculescu demostraron que si un operador no es biquasitriangular, entonces tiene un subespacio hiperinvariante [13 teorema 4.27] utilizando la siguiente caracterización [13 teorema 1.31]: Un operador T es quasitriangular si y sólo si F E (T) no contiene ni huecos ni pseudohuecos de índice negativo.

A continuación veremos cómo se comportan los operadores quasitriangulares en el producto tensorial.

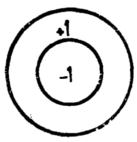
6.3. TEOREMA.—Si $A \in \underset{\sim}{Q}\,T$ y $B \in \underset{\sim}{Q}\,T$, entonces $A \otimes B \in \underset{\sim}{Q}\,T$.

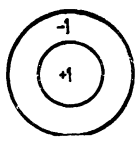
DEMOSTRACIÓN.—Si H es un hueco de $\sigma_e(A \otimes B)$ entonces, por 4.5, $i(H) \geqslant 0$. Como A y B son quasitriangulares, entonces $\sigma_{ed}(A) \subset \sigma_{ei}(A)$, $\sigma_{ed}(B) \subset \sigma_{ei}(B)$, $\sigma_d(A) \subset \sigma_i(A)$, $\sigma_d(B) \subset \sigma_i(B)$ entonces $\sigma_{ed}(A \otimes B) \subset$ $\subset \sigma_{ei}(A \otimes B)$, por lo que $F\,E\,(A \otimes B)$ no puede tener pseudohuecos de índice negativo.

6.4. COROLARIO.—Si $A \in B\,\underset{\sim}{Q}\,T$ y $B \in B\,\underset{\sim}{Q}\,T$ entonces $A \otimes B \in$ $\in B\,\underset{\sim}{Q}\,T$.

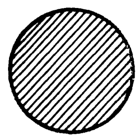
Sin embargo es posible que aparezcan operadores biquasitriangulares en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ a partir de operadores que no lo son, como lo muestra el siguiente ejemplo.

6.5. EJEMPLO.—Sean A y B en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tales que

FE (A) = 

FE (B) = 

si calculamos $F\,E\,(A \otimes B)$ como lo hicimos en § 5 obtenemos

FE (A ⊗ B) = 

y como no tiene huecos ni pseudohuecos, $A \otimes B \in B\,\underset{\sim}{Q}\,T$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BOSCH, C., HERNÁNDEZ, C., OTEYZA, E. y PEARCY, C.: *Spectral pictures of functions of operators*. «J. of Operator Theory», 8, # 2 (1982).

[2] BROWN, A. and PEARCY, C.: *Spectra of tensor products of operators*. «Proc. Amer. Math. Soc.», 17 (1966), 162-166.

[3] BROWN, A. and PEARCY, C.: *Introduction to operator theory I*. Springer Verlag, 1977.

[4] DIXMIER, J.: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*. Gauthier-Villars, París, 1956.

[5] DOUGLAS, R.: *Banach algebra techniques in operator theory*. Academic Press, New York and London, 1972.

[6] FIALKOW, L.: *Elements of spectral theory for generalized derivations I*. «J. Operator Theory», 3 (1980), 89-113.

[7] FIALKOW, L.: *Elements of spectral theory for generalized derivation II*. «Can. J. Math.», 38, # 5 (1981).

[8] FIALKOW, L.: *The essential spectrum of a tensor product of operators*. Abstracts AMS 1980, vol. 4, No. 6, P. 575.

[9] HALMOS, P.: *Finite-dimensional vector spaces*. Springer Verlag, 1974.

[10] HARTE, R.: *Spectral mapping theorems on a tensor product*. «Bull. Amer. Math. Soc.», 79 (1973).

[11] ICHINOSE, T.: *Spectral properties of tensor products of linear operators I*. «Trans. AMS», vol. 235, 1978, 78-113.

[12] KATO, T.: *Perturbation theory for linear operators*, 2d edition. Springer Verlag, 1976.

[13] PEARCY, C.: *Some recent developments in operator theory*. C. B. M. S., «Amer. Math. Soc.», number 36, 1978.

[14] RADJAVI, H. and ROSENTHAL, P.: *Invariant subspaces*. Springer Verlag, 1973.

[15] ROTA: *On models of linear operators*. «Com Pure Apl. Math.», 13 (1960).

Carlos Bosch Giral
Carlos Hernández Garciadiego
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma
de México

Elena de Oteyza de Oteyza
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional Autónoma
de México