ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE APLICACIONES CONTINUAS SOBRE ACOTADOS

por

LUIS RODRIGUEZ MARIN

Introducción y notaciones

Sean E y F espacios vectoriales topológicos separados y β y β' bornologías compatibles respectivamente con las topologías de E y F. En [3] se introduce el espacio $\overline{C}$ (E, F) de las aplicaciones de E en F β-continuas; es decir, cuya restricción a cada acotado de β es continua, y además son (β, β') acotadas (transforman los elementos de β en elementos de β'). Este espacio, al que se dota de la topología de la convergencia uniforme en los acotados de β, aparece de forma natural como resultado de una teoría coherente de diferenciación en espacios vectoriales topológicos no normados, en la que las aplicaciones diferenciables en $a \in$ E son β-continuas en a y el espacio de aplicaciones de clase p es isomorfo a un subespacio del producto cartesiano de p espacios de la forma $\overline{C}$ (E, G).

Diversos autores[2], [5], [6] han estudiado las propiedades del espacio C (X) de las aplicaciones reales y continuas del espacio completamente regular X, con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de X. Este trabajo estudia la completitud de espacios del tipo $\overline{C}$ (E, F) y sus equivalencias, extendiendo así la propiedad clásica de C (X). Para ello ha sido necesario definir los β-espacios y dar algunas de sus propiedades más elementales, cuestión que se aborda en el epígrafe 1. Finaliza con la extensión de la metrizabilidad de C (X) al espacio $\overline{C}$ (E, F) cuando se considera en E una bornología con base numerable y F métrico.

Los espacios E y F los consideramos localmente convexos y sus bornologías estables por la envoltura cerrada y convexa. Designaremos por C (E, F) el espacio de las aplicaciones β-continuas de E en F, por $\overline{\mathrm{C}}$ (E, F) el de las β-continuas y (β, β') acotadas, por Co (E, F) el de las continuas y por Co (E, F) el de las continuas y (β, β') acotadas. Una vez fijadas las bornologías y si no hay advertencia previa, consideramos la topología de la convergencia uniforme en los acotados de β.

Notaremos $W(B, V) = \{f \in C(E, F) : f(B) \subset V\}$. La familia de estos conjuntos, cuando B recorre β y V recorre los entornos del origen de F, constituye un sistema fundamental de entornos del origen en el espacio de aplicaciones.

1. Espacios

Análogamente a como se definen los K-espacios, si β es una bornología vectorial compatible con la topología T de E, podemos definir en E una nueva topología T de la siguiente manera:

1. Definición.—Un subconjunto A de E es un cerrado en T_{β} si la intersección de A con cualquier cerrado B de β es cerrada. Es fácil comprobar que T_{β} es una topología y que las topologías inducidas por T y T_{β} en un cerrado B de β son las mismas. Consideramos bases de β formadas por elementos cerrados.

2. Definición.—E es un β-espacio si son iguales las topologías T y T_{β}.

El siguiente teorema caracteriza los β-espacios.

3. Teorema.—E es un β-espacio si y sólo si para todo espacio separado X, toda aplicación f de E en X β-continua es continua.

Demostración.—Supongamos que E es un β-espacio y f una aplicación β-continua de E en X. Sea H un cerrado de X, si f_B es la restricción de a a B, $f_B^{-1}(H)$ es cerrado en B, por lo tanto es cerrado en E. Ahora bien:

$$f^{-1}(H) \cap B = f_B^{-1}(H)$$

y por ser E un β-espacio, $f^{-1}(H)$ es cerrado en E.

Recíprocamente. Supongamos que E no es un β-espacio, entonces existe un subconjunto C de E, tal que $C \cap B$ es cerrado para todo B cerrado de β, y C no es cerrado. Sea i la aplicación identidad entre (E, T) y (E, T_β), i no es continua ya que i^{-1} (C) no es cerrado en E, sin embargo su restricción a cada B sí es continua.

El ser β-espacio es una propiedad hereditaria; es decir, si F es un subespacio de E y E es un β-espacio entonces F es un β-espacio para la bornología restringida.

Si β_1 es una bornología más fina que β_2 y E es un β_1-espacio, entonces es un β_2-espacio.

La clase de espacios vectoriales topológicos separados que son β-espacios para alguna bornología β es muy amplia. Por ejemplo, todo espacio E de generación compacta es un β-espacio para la bornología de los relativamente compactos. Todo espacio metrizable E es un β-espacio para toda bornología que contenga las sucesiones convergentes. De una manera más general tenemos:

4. Teorema.—Si E es una Δ-espacio para la bornología β [1], entonces E es un β-espacio.

Demostración.—Supongamos que E no es un β-espacio; es decir, que existe una aplicación f de E en un espacio topológico separado X, β-continua pero no continua. Por lo tanto existe $a \in$ E y U entorno de $f(a)$ en X, tal que para todo V entorno de a existe $x_V \in$ V cumpliéndose $f(x_V) \notin$ U.

Consideremos el subconjunto A de E formado por todos los elementos x_V. Como $a \in \bar{A} \setminus A$, por ser E un Δ-espacio existe una red β-acotada $\{x_{V_j}\}$ contenida en A y convergente a a. Por ser f continua en acotados $\{f(x_{V_j})\}$ converge a $f(a)$, luego dado U existe V_{j_0} tal que para todo $V_j \geqslant V_{j_0}$ se tiene $f(x\,V_j) \in$ U en contradicción con lo anterior.

5. Definición.—E es un β_X-espacio si toda aplicación β-continua de E en X es continua.

Por el teorema 3 es claro que si E es un β-espacio para todo espacio topológico separado X, entonces es un β-espacio; y que todo β-espacio es en particular un β_X-espacio. Además se cumple:

6. Proposición.—Un β_R-espacio E es un β-espacio si y sólo si (E, T_β) es completamente regular.

Demostración.—Por ser E un β_R-espacio las aplicaciones continuas de (E, T) y (E, T_β) en $\mathbb{R}$ coinciden, entonces como ambos son completamente regulares se tiene $T = T_\beta$.

En el caso de considerar un espacio vectorial topológico F se cumple la siguiente propiedad:

7. Proposición.—E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio si y sólo si es un β_F-espacio.

Demostración.—Si E es un β_F-espacio, teniendo en cuenta que $\mathbb{R}$ es isomorfo a todos los subespacios de dimensión uno de F, es claro que E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio. El recíproco es una consecuencia inmediata de ser F completamente regular.

2. Completitud de los espacios de aplicaciones β-continuas

En [3] hemos demostrado:

A) Cualquiera que sea la bornología β de E, si F es completo y se considera la bornología de Von Newmann, entonces C (E, F) y $\overline{C}$ (E, F) son completos.

B) Si en E y en F se consideran las bornologías de los relativamente compactos (o en F cualquier otra menos fina) y F es completo, entonces $\overline{C}$ (E, F) = C (E, F) es completo.

1. Lema.—Cualesquiera que sean las bornologías de E y F, F es isomorfo al subespacio cerrado de $\overline{C}$ (E, F) formado por las aplicaciones constantes.

Demostración.—Sea β la aplicación de F en $\overline{C}$ (E, F) definida por $\rho(y) = f$, en donde f es la aplicación constante cuya imagen es y. En primer lugar ρ (F) es cerrado, ya que si $f \in \overline{\rho(F)}$ existe una red $\{f_j\}$ contenida en ρ (F) que converje a f uniformemente en cada acotado B de β, y por lo tanto para cada $x \in$ E, $\lim_j f_j(x) = f(x)$. Como cada f_j es constante:

$$\lim_j f_j(x) = \lim_j y_j = y = f(x).$$

Por otro lado ρ es bicontinua entre F y ρ (F) ya que cualesquiera que sean $B \in \beta$ y V entorno de cero en F se tiene:

$$\rho(V) = W(B, V) \cap \rho(F).$$

2. TEOREMA.—Si en F se considera la bornología de Von Newmann o bien si en E y F se considera las bornologías de los relativamente compactos, los espacios F, C (E, F) y $\overline{\mathrm{C}}$ (E, F) son completos si y sólo si uno de ellos lo es.

DEMOSTRACIÓN.—Es clara teniendo en cuenta A), B) y el lema anterior.

3. TEOREMA.—Las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. $\overline{\mathrm{C}}_0$ (E, $\mathbb{R}$) es completo
2. $\overline{\mathrm{C}}_0$ (E, $\mathbb{R}$) es semicompleto
3. E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio

DEMOSTRACIÓN.—Es obvio que 1 implica 2. Veamos que 2 implica a 3, para ello probamos que $\overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathbb{R}) = \overline{\mathrm{C}} (\mathrm{E}, \mathbb{R})$. Sea $f \in \overline{\mathrm{C}} (\mathrm{E}, \mathbb{R})$, consideramos la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f_n (x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| < n \\ n & \text{si} \quad f(x) \geqslant n \\ -n & \text{si} \quad f(x) \leqslant -n \end{cases}$$

esta sucesión es claramente de Cauchy y converge a f, luego $f \in \overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathbb{R})$ y por lo tanto es continua, entonces E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio.

Finalmente 3 implica a 1, ya que si E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio $\overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathbb{R}) = \overline{\mathrm{C}} (\mathrm{E}, \mathbb{R})$ y por el enunciado A) es último espacio completo.

4. LEMA.—Si M es un subespacio cerrado de F la inclusión i de $\overline{\mathrm{C}}_0$ (E, M) en $\overline{\mathrm{C}}_0$ (E, F) es un isomorfismo topológico entre C_0 (E, M) y su imagen por i, siendo $i (\overline{\mathrm{C}} (\mathrm{E}, \mathrm{M}))$ cerrado.

DEMOSTRACIÓN.—Es claro que i es lineal, biyectiva sobre la imagen y continua, además L^{-1} es continua ya que

$$i (\mathrm{W} (\mathrm{B}, \mathrm{V} \cap \mathrm{M})) = \mathrm{W} (\mathrm{B}, \mathrm{V}) \cap i (\overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathrm{M})).$$

Por otro lado $i (\overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathrm{M}))$ es cerrado ya que si $f \in i (\overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathrm{M}))$ existe una red $\{f_j\} \subset i (\overline{\mathrm{C}}_0 (\mathrm{E}, \mathrm{M}))$ convergente a f, con lo que

$\{f_j(x)\} \subset M$ converge a $f(x)$ para todo $x \in E$, y por ser M cerrado $f(x) \in M$.

5. TEOREMA.—Si en F se considera la bornología de Von Newmann, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\overline{C}_0(E, F)$ es completo
2. $\overline{C}_0(E, F)$ es semicompleto
3. E es un β_F-espacio

DEMOSTRACIÓN.—Que 1 implica a 2 es obvio. 2 implica a 3 ya que por ser $\overline{C}_0(E, F)$ semicompleto el lema anterior nos asegura que $\overline{C}_0(E, \mathbb{R})$ es semicompleto y por el teorema 3 E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio y por lo tanto un β_F-espacio.

Finalmente si E es un β_F-espacio $C_0(E, F) = C(E, F)$ y por el enunciado A) este último espacio es completo.

6. TEOREMA.—Si en E se considera la bornología de los relativamente compactos y en F la misma o cualquier otra menos fina, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\overline{C}_0(E, F)$ es completo
2. $\overline{C}_0(E, F)$ es semicompleto
3. E es un K_F-espacio

DEMOSTRACIÓN.—Es análoga a la del teorema 5, teniendo en cuenta el resultado correspondiente para esta bornología del teorema 4 y el enunciado B).

Consideremos en E la bornología β de Von Newmann o cualquier otra menos fina que la de los relativamente compactos. En el espacio $\overline{C}_0(E, \mathbb{R})$ de las funciones continuas y acotadas respecto a la bornología β, supondremos dos topologías: la de la convergencia uniforme respecto a los acotados β y la de la convergencia uniforme respecto a los relativamente compactos, designando el espacio respectivamente por $\overline{C}_0(E, \mathbb{R})_\beta$ y $\overline{C}_0(E, \mathbb{R})_K$. Veamos que la semicompletitud de este último espacio, es condición suficiente para la completitud de $\overline{C}_0(E, \mathbb{R})_\beta$ y que cuando se consideran en E y F la bornología de Von Newmann la semicompletitud de $\overline{C}_0(E, F)_K$ lo es para la completitud de $\overline{C}_0(E, F)_\beta$.

7. PROPOSICIÓN.—Si $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R})_K$ es semicompleto entonces

$$\overline{C}_0 (E, \mathbb{R}) = C_0 (E, \mathbb{R}).$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $f \in C_0 (E, \mathbb{R})$, si f es acotada en E, entonces ces $f \in \overline{C}_0 (E, \mathbb{R})$. Si f no es acotada en E, la sucesión definida en la demostración del teorema 3 es una sucesión de Cauchy en $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R})_K$ que converge a f.

8. TEOREMA.—Si $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R})_K$ es semicompleto entonces $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R})_\beta$ es completo.

DEMOSTRACIÓN.—Por la proposición anterior $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R}) = C_0 (E, \mathbb{R})$ con lo que $C_0 (E, \mathbb{R})_K$ es semicompleto. El teorema 1 de [6] afirma que E es un $K_{\mathbb{R}}$-espacio, como β es menos fina que K entonces E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio y $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R}) = C (E, \mathbb{R})$, con lo que el enunciado A) nos asegura que $C_0 (E, \mathbb{R})_\beta$ es completo.

9. COROLARIO.—Si $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R})_K$ es completo, entonces

$$\overline{C}_0 (E, \mathbb{R}) = C_0 (E, \mathbb{R}) = \overline{C} (E, \mathbb{R}) = C (E, \mathbb{R}).$$

DEMOSTRACIÓN.—La primera igualdad es la proposición 7.

$$\overline{C}_0 (E, \mathbb{R}) = \overline{C} (E, \mathbb{R})$$

por el teorema 8, ya que E es un $\beta_{\mathbb{R}}$-espacio, y como consecuencia de ambas se tiene

$$\overline{C}_0 (E, \mathbb{R}) = C (E, \mathbb{R}).$$

10. TEOREMA.—Si en E y F se considera la bornología de Von Newmann y $\overline{C}_0 (E, F)_K$ es semicompleto entonces $C_0 (E, F)_\beta$ es completo.

DEMOSTRACIÓN.—Por el lema 4 $\overline{C}_0 (E, \mathbb{R})_K$ es semicompleto, por el teorema 8 E es un β_F-espacio, de donde $\overline{C}_0 (E, F) = \overline{C} (E, F)$ y por el enunciado A) $\overline{C}_0 (E, F)_\beta$ es completo.

3. METRIZABILIDAD

1. TEOREMA.—C (E, F) es métrico si y sólo si β posee una base numerable y F es métrico.

DEMOSTRACIÓN.—Si $\{B_{n \in n}\}$ es una base de β cumpliendo $B_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{V_n\}_{n \in N}$ es una base de entornos del origen en F, con $V_n \supset V_{n+1}$ para todo $n \in N$, entonces $\{W(B_n, V_n)\}_{n \in N}$ es una base numerable de entornos del origen en $\bar{C}$ (E, F).

Recíprocamente, sea $\{W(B_n, V_n)\}_{n \in N}$ un sistema fundamental de entornos del origen de $\bar{C}$ (E, F) y consideremos

$$B_n \subset B_{n+1}, \; W(B_n, V_n) \supset W(B_{n+1}, V_{n+1})$$

y B_n cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $E = \bigcup_{n \in N} B_n$; si no fuese así, existe $x \in E \setminus \bigcup_{n \in N} B_n$. Por ser E completamente regular para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n \in C_0(E, [0, 1])$ tal que $f_n(x) = 1$ y $f_n(B_n) = \{0\}$. Sea a_n un elemento de F, $a_n \notin V_n$. Si g_n es la aplicación de $[0, 1]$ en F definida por $g_n(\lambda) = \lambda \cdot a_n$, entonces $h_n = g_n \circ f_n \in W(B_n, V_n)$ y $h_n \notin W(x, V_n)$ luego para cada $n \in \mathbb{N}$ hemos encontrado una aplicación h_n tal que $h_n \in W(B_n, V_n)$ y $h_n \notin W(x, V_n)$. Veamos ahora que no existe dos números naturales p y q tales que $W(B_p, V_p) \subset W(x, V_q)$, con lo que W (x, V) no puede ser un entorno del origen en $\bar{C}$ (E, F). Efectivamente:

Si $p \leqslant q$ entonces $h_p \in W(B_p, V_p)$ y $h_p(x) \notin V_p$, como $V_p \supset V_q$, $h_p(x) \notin V_q$ y por lo tanto $h_p \notin W(x, V_q)$.

Si $p \geqslant q$ entonces

$$h_q \in W(B_q, V_q), \; h_q \in W(B_p, V_p) \quad \text{y} \quad h_q(x) \notin V_q$$

por lo tanto $h_q \notin W(x, V_q)$.

Finalmente si $\bar{C}$ (E, F) es metrizable entonces F es metrizable ya que por el lema 4 de 2 F es isomorfo a subespacio cerrado de $\bar{C}$ (E, F).

2. TEOREMA.—Si $\bar{C}$ (E, F) cumple la condición de convergencia estricta de Mackey entonces β posee una base numerable.

Demostración.—Sea g la aplicación continua de $[0, 1]$ en F definida por $g(\lambda) = \lambda\, a$, en donde a es un elemento fijo de

$$F \cdot A = \{f \in C_0(E, \mathbb{R}) : \operatorname{Sup} |f(E)| \leqslant 1\}.$$

El conjunto $g \circ A \subset \overline{C}(E, F)$ está acotado. Por hipótesis existe un acotado H de $\overline{C}(E, F)$ convexo equilibrado y cerrado conteniendo a $g \circ A$ tal que para todo n^{-1}, n natural existe un entorno V_n de 0 en $\overline{C}(E, F)$ de modo que

$$V_n \cap g \circ A \subset n^{-1} H$$

por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $W(B_n, U_n)$ entorno de 0 en $\overline{C}(E, F)$ cumpliendo $W(B_n, U_n) \subset V_n$. Probemos que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Si existe $x \in E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, por ser completamente regular existe para cada n, $f_n \in A$, tal que $f_n(x) = 1$ y $f_n(B_n) = \{0\}$.

Entonces se tiene:

$$g \circ f_n \in V_n \cap g \circ A \subset n^{-1} H$$

de donde $n \cdot g \circ f_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot g \circ f_n(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n\, a$$

que no es un acotado de F, con lo que $\{n \cdot g \circ f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está contenida en H.

3. Corolario.—Si F es métrico las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $\overline{C}(E, F)$ cumple la condición de convergencia estricta de Mackey.

(2) β posee una base numerable.

(3) $\overline{C}(E, F)$ es métrico.

Demostración.—Es claro en virtud de los teoremas anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BOMBAL, F. y RODRÍGUEZ, MARÍN, L.: *Una extensión de los espacios secuenciales*. «Real Academia de Ciencias», t. LXXIII, cuad. 4.º. Madrid, 1979.

[2] NACHBIN, L.: *Topological vector spaces of continuous functions proc*. «Nat. Acad. Sc. U. S. A.», vol. 40 (1954)

[3] RODRÍGUEZ MARÍN, L.: *Diferenciación en espacios vectoriales topológicos*. Tesis doctoral. Facultad de Matemáticas. Universidad Complutense. Madrid, 1976.

[4] SCHAEFER, H. H.: *Topological vector spaces*. Macmillan. Nueva York, 1967.

[5] SCHMETS, J.: *Espaces des fonctions continues*. «Lectures Notes», t. 519, 1976.

[6] WARNER, S.: *The topology of compact convergence on continuons spaces*. «Duke Mat. J.», 25 (1958).