$\mathcal{L}$ Y $\mathcal{L}^*$-CONVERGENCIAS EN G($\mathcal{H}$)

por

M. C. DE LAS OBRAS-L.

SUMMARY

Given a real separable Hilbert space $\mathcal{H}$, we denote with G ($\mathcal{H}$) the geometry of closed linear subspaces of $\mathcal{H}$.

The strong convergence of sequences of subspaces is shown to be a $\mathcal{L}^*$-convergence and the weak convergence a $\mathcal{L}$-convergence.

The smallest $\mathcal{L}^*$-convergence containing the weak convergence is found, and the orthogonal image of the strong convergence, which also is a $\mathcal{L}^*$-convergence, is defined.

Consideremos el espacio de Hilbert separable real $\mathcal{H}$. Con G ($\mathcal{H}$) denotamos la geometría de los subespacios lineales cerrados, [ ] la envoltura lineal cerrada, δ (M, N) la distancia entre los subespacios M y N definida por el máximo de los ángulos β (M, N) y β (N, M) [1].

Dada una sucesión $\{E^{(n)} \mid n \in N\} \subset G(\mathcal{H})$ sabemos que

$$E^{(n)} \to E \, (\equiv) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x_{h_n} \in E^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \to x \Longrightarrow x \in E \\ \forall\, x \in E \quad \exists\, x_n \in E^{(n)} \ni x_n \to x \end{array} \right.$$

equivalentemente $\underset{\to}{\text{ls}}\, E^{(n)} = \underset{\to}{\text{li}}\, E^{(n)}$

$$E^{(n)} \rightharpoonup E \, (\equiv) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x_{h_n} \in E^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \rightharpoonup x \Longrightarrow x \in E \\ \forall\, x \in E \quad \exists\, x_n \in E^{(n)} \ni x_n \rightharpoonup x \end{array} \right.$$

Se verifica $E^{(n)} \rightharpoonup E \Longrightarrow E^{(n)\perp} \to E^{\perp}$ [7], pero el recíproco en general no es cierto [5].

Si $E^{(n)} \rightharpoonup E$ y no existe una subsucesión $\{E^{(h_n)}\}$ de

$$\{E^{(n)}\} \quad \text{y} \quad x_{h_n} \in E^{(h_n)}$$

tal que $x_{h_n} \to x$, $x \neq 0$, la convergencia se dice débil estricta y se representa mediante $E^{(n)} \overset{e}{\rightharpoonup} E$.

En este trabajo se expone un estudio sobre la naturaleza de las convergencias definidas y se introducen dos nuevas.

La convergencia fuerte se comprueba fácilmente que es $\mathcal{L}^*$-convergencia, mientras que la débil demostraremos que sólo es $\mathcal{L}$-convergencia.

Lema 1.—Si $r_n \overset{r}{\rightharpoonup} r \Longrightarrow \pi_n \rightharpoonup \mathcal{H}$, $\pi_n = r_n^{\perp}$.

Lema 2.—Si $E^{(n)} \rightharpoonup E$ o $E^{(n)} \to E$ y $\{F^{(n)} \mid n \in N\}$ tal que

$$\delta\,(E^{(n)}, F^{(n)}) \to 0 \qquad \forall\, n,$$

entonces $F^{(n)}$ tiene los mismos límites que $E^{(n)}$.

Construyamos una sucesión de rayos $\{t_n \mid n \in N\}$ convergente fuertemente al vector nulo pero la sucesión de hiperplanos ortogonales no convergente débilmente a $\mathcal{H}$ [5].

Sea $p \subset \mathcal{H}$ y $p_i \rightharpoonup p$ con $\alpha\,(p_i, p) = 0$. Para cada p_i consideremos el cono de eje p_i y amplitud ε_i, $C\,(p_i, \varepsilon_i)$ con $\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$, $\varepsilon_i \to 0$, y una sucesión de rayos $\{p_i^{(n)} \mid n \in N\}$ con límite p_i y $\alpha\,(p_i^{(n)}, p_i) = \varepsilon_i$. Si $t_n = \bigcup p_i^{(n)}$ esta sucesión converge fuertemente al vector nulo y la sucesión de los ortogonales $\{\pi_n \mid n \in N\}$ no verifica el tercer axioma de Fréchet, ya que $\pi_n \not\rightharpoonup \mathcal{H}$ y por los lemas 1 y 2

$$\forall\, \{\pi_{h_n}\} \subset \{\pi_n\}, \quad \exists\, \{\pi_{k_n}\} \subset \{\pi_{h_n}\} \ni \pi_{k_n} \rightharpoonup \mathcal{H}.$$

Definición 1.—Diremos que $E^{(n)} \overset{a}{\rightharpoonup} E$ si y sólo si

$$\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(h_n)} = E \qquad \forall\, (h_n) \subset (n).$$

Se prueba fácilmente que esta convergencia verifica los tres axiomas de Fréchet y además es la mínima $\mathcal{L}^*$-convergencia que contiene a la débil.

Sabemos que no existe equivalencia entre la convergencia fuerte de una sucesión de subespacios $\{E^{(n)} \mid n \in N\}$ y la débil de sus ortogonales. Sin embargo si $E^{(n)} \to E$ y $E^{(n)\perp} \rightharpoonup F$, F es necesariamente $E^{\perp}$. Por esta razón daremos una nueva definición de convergencia que designaremos por $\overset{b}{\rightharpoonup}$, siendo b la biyección ortogonal en G ($\mathcal{H}$).

DEFINICIÓN 2.—$E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E \iff E^{(n)\perp} \to E^{\perp}$.

Es una $\mathcal{L}^*$-convergencia y se verifica la siguiente relación de contenido $\rightharpoonup \subset \overset{a}{\rightharpoonup} \subset \overset{b}{\rightharpoonup}$.

LEMA 3.—Sea una sucesión $\{E^{(n)} \mid n \in N\} \ni E^{(n)} \to E$ y r un rayo de $E^{\perp}$. Existe un cono C (r, θ) con $0 < \theta < \pi/2$ tal que

$$C(r, \theta) \cap E^{(n)\perp} \neq 0$$

para casi todo n.

TEOREMA 1.—$E^{(n)} \to E$ si y sólo si $E^{\perp} = [\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)\perp}]$ $\forall\, (h_n)$.

DEMOSTRACIÓN.—Si $E^{(n)} \to E$, sea $\{E^{(h_n)\perp}\}$ una subsucesión de $\{E^{(n)\perp}\}$ y r un rayo de $E^{\perp}$ ortogonal a $\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)\perp}$. Existe una sucesión $\{r_{h_n}\}$ tal que $r_{h_n} \subset C(r, \theta) \cap E^{(h_n)\perp}$ y por la compacidad débil en P ($\mathcal{H}$), una subsucesión $\{r_{k_n}\} \subset \{r_{h_n}\}$ tal que $r_{k_n} \rightharpoonup s$, con $\alpha\,(r, s) < \theta$ y $s \subset \underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)}$, absurdo.

El recíproco se prueba fácilmente.

COROLARIO 1.—$E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$ si y sólo si $[\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)}] = E$ $\forall\, (h_n)$.

COROLARIO 2. — a) $E = [\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)}]$ $\forall\, (h_n) \iff E^{\perp} = [\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)\perp}]$ $\forall\, (h_n)$. b) $E^{(n)} \to E$ si y sólo si $E = [\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)}]$ $\forall\, (h_n)$, equivalentemente $E = \underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(h_n)}$ $\forall\, (h_n)$.

PROPOSICIÓN 1.—Una condición necesaria y suficiente para que $E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$ es que $\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(n)} \subset E$ y para todo rayo r de E, exista un cono C (r, θ) con $0 < \theta < \pi/2$, que corte casi todos los términos de la sucesión $\{E^{(n)}\}$.

DEMOSTRACIÓN.—Al admitir la existencia de una subsucesión $\{E^{(k_n)}\}$ de $\{E^{(n)}\}$ tal que $[\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(k_n)}] \neq E$, todo cono de eje un rayo r de E ortogonal a $[\underrightarrow{\text{ls}}\, E^{(k_n)}]$, corta a lo más un número finito de subespacios de $\{E^{(k_n)}\}$.

PROPOSICIÓN 2.—$E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$ si y sólo si:

a) Para todo rayo r de E, existe un cono de eje r y amplitud θ $0 < \theta < \pi/2$, que corta infinitos subespacios de cada subsucesión $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$.

b) Para todo rayo s de E, todo cono de eje s y amplitud η $0 < \eta < \pi/2$ corta a lo más un número finito de subespacios de $\{E^{(n)}\}$.

DEMOSTRACIÓN.—Si $E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$, la primera condición se desprende de la proposición anterior.

Supongamos la existencia de un rayo s de E y θ con $0 < \theta < \pi/2$ tales que el cono $C(s, \theta)$ corte a $\{E^{(k_n)}\}$. Si $s_{k_n} \subset E^{(k_n)} \cap C(s, \theta)$, existe una subsucesión $\{s_{h_n}\} \subset \{s_{k_n}\}$ $s_{h_n} \rightharpoonup s'$ con $s' \subset C(s, \theta)$ y por tanto $s' \not\subset E$.

Recíprocamente, sea $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$, se verifica $\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(h_n)} \subset E$. Si no fuese así existiría un rayo r fuera de E y una subsucesión $\{E^{(k_n)}\} \subset \subset \{E^{(h_n)}\}$ con $r_{k_n} \subset E^{(k_n)}$ débilmente convergente a r. Si s es la proyección ortogonal de r en $E^{\perp}$, $\alpha(s, r_{k_n}) < \theta < \pi/2$ $\forall\, n > \nu$ [7], y el cono $C(s, \theta)$ corta infinitos subespacios de $\{E^{(n)}\}$ absurdo por 2. Mas precisamente $[\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(h_n)}] = E$ $\forall\, (h_n)$.

Como en general si $E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$, E está contenido estrictamente en el $\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(n)}$, tiene sentido considerar la intersección de dicho límite superior con $E^{\perp}$.

PROPOSICIÓN 3.—$\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{Ls}}\; E^{(n)} \neq E$ si y sólo si $(\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(n)}) \cap E^{\perp} \neq 0$.

PROPOSICIÓN 4.—Si $E^{(n)} \rightarrow E$ y $E^{(n)} \overset{a}{\rightharpoonup} F$ se verifica

$$\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(n)} = ((\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(n)}) \cap E^{\perp}) \underset{\perp}{\oplus} E.$$

TEOREMA 2.—Sea $E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$. La condición necesaria y suficiente para que exista una subsucesión $\{E^{(h_n)}\}$ de $\{E^{(n)}\}$ débilmente convergente a E, es que se pueda encontrar otra subsucesión $\{E^{(k_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$ tal que $\underset{\rightharpoonup}{\mathrm{ls}}\, E^{(q_n)} = E$ $\forall\, (q_n) \subset (k_n) \subset (h_n)$.

Es evidente que la condición es necesaria. La suficiencia viene implicada por el lema 3.

COROLARIO 4.—Si $E^{(n)} \overset{b}{\rightharpoonup} E$ son equivalentes las siguientes condiciones:

a) $\mathrm{E} = \underset{\rightarrow}{\mathrm{ls}}\, \mathrm{E}^{(k_n)}\ \forall\ (k_n)$.

b) Para toda subsucesión $\{\mathrm{E}^{(k_n)}\}$ de $\{\mathrm{E}^{(n)}\}$ existe otra subsucesión $\{\mathrm{E}^{(p_n)}\}$ de $\{\mathrm{E}^{(k_n)}\}$ débilmente convergente a E.

NOTA.—Las tres convergencias $\rightharpoonup$, $\overset{a}{\rightharpoonup}$, $\overset{b}{\rightharpoonup}$ coinciden en sucesiones de subespacios de dimensión finita y constante.

Este trabajo es una parte de mi Tesis Doctoral y quiero expresar por ello mi agradecimiento al profesor A. Plans, director de la misma.

BIBLIOGRAFÍA

[1] DIXMIER, M. J.: *Étude sur les variétés et les operateurs de Julia, avec quelques applications.* «Bull. Soc. Math. France», t. 77 (1949).

[2] DUDLEY, R. M.: *On sequential convergence.* «Trans. Amer. Math. Soc.», t. 112 (1964).

[3] FRÉCHET, M.: *Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits.* «Bull. Sci. Math.», t. 42 (1918).

[4] KURATOWSKI, K.: *Topology*, vol. I. Academic Press (1966).

[5] OBRAS, M. C.: *Sobre convergencia en el espacio de Hilbert de sucesiones de subespacios de dimensión o codimensión finita II.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 4.ª serie, t. XXXIV, núm. 6 (1974).

[6] OBRAS, M. C.: *Convergencias en G* $(\mathcal{H})$. En prensa.

[7] PLANS, A.: *Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 4.ª serie, t. XXI, núm. 3-4 (1961).

[8] URYSOHN, P.: *Sur les classes de M. Fréchet.* «Rev. Ensegnement Math.», t. 25 (1926).

Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo