SOBRE EL TEOREMA DE INMERSION DE MRÓWKA

por

M. LOPEZ PELLICER y E. TARAZONA FERRANDIS

ABSTRACT

Certains equivalences of the Mrówka's separating condition enables us to characterize when parametric maps are open, closed or quotient.

Sea $\mathcal{F} = (f_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de aplicaciones continuas, tales que $f_\xi : X \longrightarrow E_\xi$, donde X y E_ξ, $\xi \in \Theta$, son espacios topológicos. A la aplicación h de X en el producto topológico de Tychonoff $\Pi \{E_\xi, \xi \in \Theta\}$ definida por $h(x) = (f_\xi(x), \xi \in \Theta)$ se la llama aplicación paramétrica correspondiente a la familia $\mathcal{F}$.

Se dice que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de X si para cada par $(x, y) \in X^2$, tal que $x \neq y$, existe una $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Se dice que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos y cerrados de X si para cada subconjunto cerrado C de X y cada punto $p \in X - C$ existe un sistema finito $(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})$ formado por funciones de $\mathcal{F}$ tales que

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(p) \notin \text{cl}\ (f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(C),$$

donde la clausura se considera en

$$E_{\xi_1} \times E_{\xi_2} \times \ldots \times E_{\xi_n}.$$

En [1] S. Mrówka obtiene los siguientes resultados:

TEOREMA A (Teorema general de inmersión).—La aplicación h es un homeomorfismo de X sobre h (X) si y sólo si la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos y distingue puntos y cerrados ([1]-2.1).

TEOREMA B.—Si el espacio X es T_0, entonces la aplicación h es un homeomorfismo de X sobre h (X) si y sólo si la familia $\mathscr{F}$ distingue puntos y cerrados ([1]-2.1 y 2.3).

En general, se afirma en [1] lo siguiente:

TEOREMA C.—Si la familia $\mathscr{F}$ distingue puntos y cerrados, entonces la aplicación h es continua y cerrada (y, por tanto, h es una aplicación cociente, es decir: h (X) es homeomorfo a un cociente de X) ([1]-2.5).

Vamos a determinar algunas condiciones equivalentes a que una familia $\mathscr{F}$, formada por aplicaciones no necesariamente continuas, separe puntos y cerrados (teorema 1 y corolario 1) que nos permitirán obtener consecuencias relativas a inmersión topológica (corolario 2 y teorema 2). La hipótesis del teorema C no es necesaria; considérese el caso de una familia $\mathscr{F}$ de aplicaciones constantes, o que $\mathscr{F}$ conste de una proyección propia. En las proposiciones que siguen al teorema 2 se dan condiciones necesarias y suficientes para que h sea abierta, cerrada o cociente.

TEOREMA 1.—Sea X un espacio topológico, $(E_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de espacios topológicos, $\mathscr{F} = (f_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de aplicaciones, tales que $f_\xi \colon X \longrightarrow E_\xi$, y h la aplicación paramétrica correspondiente a la familia $\mathscr{F}$. Se tiene entonces que son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) La familia $\mathscr{F}$ distingue puntos y cerrados de X.

b) La topología de X es menos fina que la inicial correspondiente a $\mathscr{F}$.

c) Sea $(x_n, n \in D, \prec)$ una red en X. Si $(f(x_n), n \in D, \prec)$ converge a $f(x)$, para cada $f \in \mathscr{F}$, entonces $(x_n, n \in D, \prec)$ converge a x.

d) Los cerrados de X son h-saturados y la aplicación h es cerrada.

e) Los abiertos de X son h-saturados y la aplicación h es abierta.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Longrightarrow$ b). Sea a un punto del X-abierto A. Entonces a está separado del cerrado X — A; por lo tanto, A es entorno del punto a, respecto a la topología inicial definida por $\mathscr{F}$. Luego A es un abierto en dicha topología inicial.

b) $\Longrightarrow$ c). Si $(f(x_n), n \in D, \prec)$ converge a $f(x)$, $\forall f \in \mathscr{F}$, entonces $(x_n, n \in D, \prec)$ converge a x en la topología inicial definida por $\mathscr{F}$. Como $(x_n, n \in D, \prec)$ convergerá a x en cualquier topología menos fina que la inicial correspondiente a $\mathscr{F}$, se tendrá, pues, que $(x_n, n \in D, \prec)$ X-converge a x.

c) $\Longrightarrow$ d). Un subconjunto C de X se dice h-saturado si $C = h^{-1}(h(C))$. Si $C \neq h^{-1}(h(C))$, entonces existe $y \in C$ y $x \notin C$ tales que $h(y) = h(x)$, y cualquier red en $\{y\}$ converge a x; luego C no es X-cerrado. Si $h(C)$ no fuese cerrado en $h(X)$, se podría determinar una red $(h(x_n), n \in D, \prec)$ convergente a $h(x)$, con $x_n \in C$, $n \in D$, y $x \notin C$; entonces, por la condición c) se tiene que $(x_n, n \in D, \prec)$ sería X-convergente a x, por lo que C no sería X-cerrado.

d) $\Longrightarrow$ e). Evidente.

e) $\Longrightarrow$ a). Consideremos un subconjunto C de X, que sea cerrado, y $p \in X - C$. Se tiene, por la condición e), que

$$X - C = h^{-1}(h(X - C))$$

es un entorno del punto p respecto a la topología inicial definida por $\mathcal{F}$, pues $h(X - C)$ es un $h(X)$-abierto. Por tanto, la familia $\mathcal{F}$ separa puntos y cerrados.

Corolario 1.—Sea X un espacio topológico, $(E_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de espacios topológicos, $\mathcal{F} = (f_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de aplicaciones continuas, tales que $f_\xi: X \longrightarrow E_\xi$, y h la aplicación paramétrica correspondiente a la familia $\mathcal{F}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) La familia $\mathcal{F}$ distingue puntos y cerrados de X.

b) La topología de X es la inicial respecto a $\mathcal{F}$.

c) Una red $(x_n, n \in D, \prec)$ X-converge a x si y sólo si

$$(f(x_n), n \in D, \prec)$$

converge a $f(x)$, para cada $f \in \mathcal{F}$.

Demostración:

a) $\Longrightarrow$ b). Por la correspondiente implicación del teorema 1 se deduce que la topología de X es menos fina que la inicial definida por $\mathcal{F}$. Además, la topología de X debe ser más fina que la inicial dada por $\mathcal{F}$, pues las aplicaciones de $\mathcal{F}$ son continuas.

b) $\Longrightarrow$ c). En efecto, pues la condición c) es la caracterización de la convergencia en la topología inicial.

c) $\Longrightarrow$ a). Se deduce de que en el teorema 1 la condición a) es consecuencia de la condición c).

Se pueden dar otros enunciados del teorema general de inmersión de Mrówka (ver teorema A) sustituyendo la condición a) del corolario 1 por las b) o c).

En los espacios T_0 las familias de funciones que distinguen puntos y cerrados distinguen puntos. Se tiene por tanto:

COROLARIO 2.—Si el espacio X es T_0, entonces la aplicación h es un homeomorfismo de X sobre h (X), si y sólo si se verifica la siguiente condición:

Una red $(x_n, n \in D, \prec)$ X-converge a x si y sólo si

$$(f(x_n), \quad n \in D, \prec) \tag{1}$$

converge a $f(x)$, para cada $f \in \mathcal{F}$.

S. Mrówka introdujo la siguiente definición ([1]-3.1):

DEFINICIÓN A.—Dados dos espacios topológicos X y E se dice que X es E-completamente regular si X es homeomorfo a un subespacio topológico de cierta potencia E^m de E, siendo m un cardinal arbitrario.

Del teorema general de inmersión de Mrówka (teorema A), considerando $\mathcal{F}$ igual a la familia C (X, E) de todas las aplicaciones continuas de X en E, se deduce esta caracterización de E-completa regularidad de Mrówka ([1]-3.8):

TEOREMA D.—El espacio X es E-completamente regular si y sólo si la familia C (X, E) distingue puntos y puntos y cerrados.

El corolario 1 y la observación previa al corolario 2 proporcionan esta caracterización de R. Blefko de E-completa regularidad ([1]-3.9).

TEOREMA E.—Sea X un espacio T_0. El espacio X es E-completamente regular si y sólo si se verifica la siguiente condición:

Una red $(x_n, n \in D, \prec)$ X-converge a x si y sólo si

$$(f(x_n), \quad n \in D, \prec) \tag{2}$$

converge a $f(x)$, para cada $f \in C(X, E)$.

En general, si el espacio X no es T_0 se tiene que la condición (1) no implica que h sea un homeomorfismo de X sobre h (X); tampoco la condición (2) implica que X sea E-completamente regular, pues estas condiciones equivalen a que la aplicación h induce, de forma natural, una correspondencia biunívoca entre los abiertos de X y los abiertos de h (X), pudiendo ocurrir que h no sea inyectiva. Unas sencillas modificaciones en X o en h (X) permiten obtener ciertos homeomorfismos asociados a h. Se simplifica su exposición (ver teorema 2) con las siguientes definiciones y proposiciones clásicas:

Definición 1.—Sea X un espacio topológico. Se llama espacio T_0 asociado a X al espacio topológico cociente de X respecto a la relación binaria de equivalencia que considera equivalentes a dos puntos x e y si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Se le representa por X_{T_0}. La clase de equivalencia determinada por x la designaremos por $\hat{x}$.

Los puntos x e y son T_0-equivalentes si y sólo si la familia de abiertos que contienen a $\{x\}$ coincide con la familia de abiertos que contienen a $\{y\}$, pues los cerrados que no contienen a $\{x\}$ son los mismos que los cerrados que no contienen a $\{y\}$. Por tanto, la topología de X es la inicial respecto a la aplicación canónica φ de X en X_{T_0} definida por $\varphi(x) = \hat{x}$. Utilizaremos que una red $(x_n, n \in D, \prec)$ X-converge a x si y sólo si $(\hat{x}_n, n \in D, \prec)$ X_{T_0}-converge a $\hat{x}$.

Definición 2.—Diremos que el par (X^*, φ), formado por un espacio topológico X^* y una aplicación φ de X^* sobre el espacio topológico X está generado por separación de los puntos de X si la topología de X^* es la inicial definida por φ.

Si φ es la aplicación canónica de X en X_{T_0}, entonces (X, φ) es un par obtenido por separación de los puntos de X_{T_0}.

Proposición 1.—Sean X e Y dos espacios topológicos, (X, φ_1) e (Y, φ_2) dos pares obtenidos por separación de los puntos de X y de Y, sea g una aplicación de X^* en Y^* y f una aplicación de X en Y tal que $\varphi_2 g = f \varphi_1$. Entonces f es continua si y sólo si g es continua.

Demostración.—Supongamos que f es continua. Si V es un Y^*-abierto, entonces $V = \varphi_2^{-1}(W)$, siendo W un Y-abierto. Entonces

$$g^{-1}(V) \; (= g^{-1}(\varphi_2^{-1}(W) = (\varphi_2 g)^{-1}(W) = (f\varphi_1)^{-1}(W))$$

es X^*-abierto, por la continuidad de $f\varphi_1$. Luego g es continua.

Supongamos, ahora, que g es continua. Sea V un Y-abierto. Entonces

$$\varphi_1^{-1}(f^{-1}(V) \; (= (f\varphi_1)^{-1}(V) = (\varphi_2 g)^{-1}(V))$$

es un X*-abierto, por la continuidad de $\varphi_2\, g$. Por definición de topología inicial se tiene que $f^{-1}(\mathrm{V})$ es un X-abierto, lo que prueba la continuidad de f.

COROLARIO 3.—Sean X e Y dos espacios topológicos, f una aplicación continua de X en Y y $\hat{f}$ la aplicación de $\mathrm{X}_{\mathrm{T}_0}$ en $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_0}$ dada por $\hat{f}(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$. Entonces $\hat{f}$ es continua.

DEMOSTRACIÓN.—La aplicación $\hat{f}$ está bien definida, pues si $\overline{\{x_1\}} = \overline{\{x_2\}}$, entonces $\overline{\{f(x_1)\}} = \overline{\{f(x_2)\}}$, ya que los cerrados saturados que contienen a x_1 coinciden con los cerrados saturados, respecto a f, que contienen a x_2. Utilizando las proyecciones canónicas φ_1 y φ_2, de X sobre $\mathrm{X}_{\mathrm{T}_0}$ y de Y sobre $\mathrm{Y}_{\mathrm{T}_0}$, podemos escribir la igualdad $\hat{f}(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$ así:

$$\hat{f}\varphi_1(x) = \varphi_2 f(x), \quad \forall \times \in \mathrm{X}.$$

El corolario se deduce, por tanto, directamente de la proposición 1.

Diremos, en lo sucesivo, que $\hat{f}$ es la T_0-aplicación asociada a f. En particular, si el espacio Y es T_0 se tiene que $\widehat{f(x)} = \{f(x)\}$.

TEOREMA 2.—Sea X un espacio topológico, $(\mathrm{E}_\xi,\ \xi \in \Theta)$ una familia de espacios topológicos, $\mathcal{F} = (f_\xi,\ \xi \in \Theta)$ una familia de aplicaciones continuas, tales que $f_\xi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{E}_\xi$, y h la aplicación paramétrica correspondiente a la familia $\mathcal{F}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) Una red $(x_n,\ n \in \mathrm{D}, \prec)$ X-converge a x si y sólo si

$$(h(x_n), \quad n \in \mathrm{D}, \succ)$$

h (X)-converge a $h(x)$.

b) Existen unos pares $(\mathrm{E}_\xi{}^*, \varphi_\xi)$ obtenidos por separación de puntos de E_ξ, $\xi \in \Theta$, y unas aplicaciones continuas $f_\xi{}^* : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{E}_\xi{}^*$, tales que

$$\varphi_\xi\, f_\xi^* = f_\xi, \quad \forall\, \xi \in \theta,$$

y la aplicación paramétrica h^* correspondiente a la familia

$$\mathcal{F}^* = (f_\xi^*, \ \xi \in \theta)$$

es un homeomorfismo de X sobre $h^*(\mathrm{X})$.

c) La aplicación paramétrica $\hat{h}$, correspondiente a la familia $\hat{\mathscr{F}} = (\hat{f}_\xi, \xi \in \Theta)$ define un homeomorfismo de X_{T_0} sobre $\hat{h}(X_{T_0})$.

DEMOSTRACIÓN:

a) $\Longrightarrow$ b). Sea φ_ξ la segunda proyección de $X \times E_\xi$, E_ξ^* el espacio topológico obtenido al considerar en $X \times E_\xi$ la topología inicial correspondiente a φ_ξ y f_ξ^* la aplicación de X en E_ξ^* tal que

$$f_\xi^*(x) = (x, f_\xi(x)).$$

Se tiene que $\varphi_\xi f_\xi^* = f_\xi$, que $\mathscr{F}^* = (f_\xi^*, \xi \in \Theta)$ distingue puntos de X y puntos y cerrados de X (puesto que la familia $\mathscr{F} = (f_\xi, \xi \in \Theta)$, por el corolario 1 distingue puntos y cerrados de X). Por el teorema A se tiene que h^* es un homeomorfismo de X sobre h (X).

b) $\Longrightarrow$ c). Esta implicación se deduce de estas dos observaciones: 1) La aplicación paramétrica $\hat{h}$ correspondiente a la familia $(\hat{f}_\xi, \xi \in \Theta)$ define un homeomorfismo de X sobre su imagen, contenida en $\prod_{\xi \in \Theta} E_{\xi_{T_0}}$. 2) La aplicación g_ξ de $E^*_{\xi_{T_0}}$ sobre $E_{\xi_{T_0}}$ definida por $g(\widehat{(x, y)}) = \hat{y}$ es un homeomorfismo tal que $g_\xi \hat{f}_\xi^* = \hat{f}_\xi$.

c) $\Longrightarrow$ a). Es evidente que una red $(x_n, n \in D, \prec)$ X-converge a x si, y sólo si, $(\hat{x}_n, n \in D, \prec)$ X_{T_0}-converge a $\hat{x}$, y que $(h(x_n), n \in D, \prec)$ h (X)-converge a $h(x)$ si, y sólo si, $(\hat{h}(\hat{x}_n), n \in D, \prec)$ $\hat{h}(X_{T_0})$-converge a $\hat{h}(\hat{x})$. Por la condición c) se tiene que $(\hat{x}_n, n \in D, \prec)$ X_{T_0}-converge a $\hat{x}$ si, y sólo si, $(h(\hat{x}_n), n \in D, \prec)$ $\hat{h}(X_{T_0})$-converge a $\hat{h}(\hat{x})$. Por tanto, c) implica a).

TEOREMA 3.—Sea X un espacio topológico, $(E_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de espacios topológicos, $\mathscr{F} = (f_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de aplicaciones tales que $f_\xi \colon X \longrightarrow E_\xi$, y h la aplicación paramétrica corresondiente a la familia $\mathscr{F}$. Sea A un subconjunto de X. Se tiene que h (A) es h (X)-abierto si y sólo si para cada $p \in A$ existe un sistema finito $(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})$ formado por funciones de $\mathscr{F}$, tal que

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(p) \notin \mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(X - \mathrm{sat}\,A) \qquad (3)$$

donde sat A $= h^{-1}(h(A))$.

DEMOSTRACIÓN.—La condición (1) equivale, por la definición de topología producto, a que cada punto de h (A) tiene un h (X)-entorno contenido en h (A). Por tanto (3) equivale a que h (A) sea h (X)-abierto.

Corolario 4.—Siguiendo con las hipótesis del teorema 3 se tiene que la aplicación h es abierta si y sólo si se verifica una de las siguientes condiciones equivalentes:

a) Para cada abierto A de X y cada punto $p \in$ A existe un sistema finito $(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})$ de funciones de $\mathcal{F}$ tal que

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(p) \notin \mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(\mathrm{X} - \mathrm{sat}\,\mathrm{A}) \tag{4}$$

b) Para cada cerrado B de X y para cada punto $p \in \mathrm{X} - \mathrm{B}$ existe un sistema finito $(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})$ de funciones de $\mathcal{F}$ tales que

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(p) \notin \mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(\mathrm{B} - \mathrm{sat}\,(\mathrm{X} - \mathrm{B})) \tag{5}$$

Demostración.—La justificación del apartado a) es inmediata, pues es la condición (3) aplicada a cada abierto de X. La condición b) es la condición a) aplicada a X — B, teniendo en cuenta que

$$\mathrm{X} - \mathrm{sat}\,(\mathrm{X} - \mathrm{B}) = \mathrm{B} - \mathrm{sat}\,(\mathrm{X} - \mathrm{B}).$$

Corolario 5.—La aplicación h es cerrada (siguiendo con las mismas condiciones del teorema 3) si y sólo si se verifica una de estas condiciones equivalentes:

a) Para cada subconjunto cerrado B de X y cada punto

$$p \in \mathrm{X} - \mathrm{sat}\,\mathrm{B}$$

existe un sistema finito $(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})$ de funciones de $\mathcal{F}$ tales que

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(p) \notin \mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(\mathrm{B}) \tag{6}$$

b) Para cada abierto A de X y cada punto $p \in \mathrm{X} - \mathrm{sat}\,(\mathrm{X} - \mathrm{A})$ existe un sistema finito $(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})$ de funciones de $\mathcal{F}$ tales que

$$(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(p) \notin \mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})(\mathrm{X} - \mathrm{A}) \tag{7}$$

La aplicación h es cerrada si y sólo si h (X — sat B) es h (X)-abierto, para cada X-cerrado B. Sustituyendo en (3) A por X — sat B se obtiene (6), pues

$$\mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})\,(\mathrm{X} - (\mathrm{X} - \mathrm{sat\ B})) = \mathrm{cl}\,(f_{\xi_1}, f_{\xi_2}, \ldots, f_{\xi_n})\,(\mathrm{B}).$$

La condición b) se obtiene al aplicar la condición a) al X-cerrado X — A.

TEOREMA 4.—Sea X un espacio topológico, $(E_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de espacios topológicos, $\mathcal{F} = (f_\xi, \xi \in \Theta)$ una familia de aplicaciones continuas, tales que $f_\xi\colon X \longrightarrow E_\xi$, y h la aplicación paramétrica correspondiente a la familia $\mathcal{F}$. La aplicación h es cociente si y sólo si la familia $\mathcal{F}$ distingue puntos y cerrados h-saturados.

DEMOSTRACIÓN.—Si h es cociente, C es un X-cerrado h-saturado y $p \in$ C, entonces $\mathcal{F}$ distingue p y C, puesto que $h(p) \notin h(C)$, que es h (X)-cerrado ya que $C = h^{-1}(h(C))$ y h es cociente.

Si h no es cociente, entonces existe un subconjunto M en h (X) que no es h (X)-cerrado y tal que $h^{-1}(M)$ es X-cerrado. Sea p un punto de X tal que $h(p)$ es un punto de acumulación de M que no pertenece a M. Entonces la familia $\mathcal{F}$ no separa p y $h^{-1}(M)$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] MRÓWKA, S.: *Further results on E-compact spaces. I.* «Acta Mathematica», 120 (1968), 161-185.

Cátedra de Matemáticas
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos
Universidad Politécnica (Valencia)