H-ESPACIOS FINITOS NO SIMPLEMENTE CONEXOS

por

J. F. SAENZ

§ 1. Introducción

Utilizando la técnica de mezclar grupos de homotopía introducida por Zabrodsky [10] obtenemos aquí nuevos H-espacios finitos no simplemente conexos, cuyos más conocidos ejemplos son los que tienen por cubrimiento universal los H-espacios de rango 2 y tipo (3,7) generalmente denotados como $E_{k\omega}$ [4].

La dificultad mayor está en la demostración de la finitud de estos H-espacios, pues al no ser simplemente conexos lo único que en principio puede afirmarse es que son casifinitos; para salvar esta dificultad utilizo algunos recientes resultados de G. Mislin que me permiten demostrar los teoremas 2 y 3; en el segundo doy las condiciones en las que el nuevo H-espacio resultado de mezclar grupos de homotopía es finito.

En este trabajo supondremos que los espacios utilizados son nilpotentes del tipo de homotopía de un CW-complejo conexo. En el § 2 resumo algunos resultados de [4] que me permiten aplicar la técnica de mezclar grupos de homotopía al caso simplemente conexo; en el § 3 obtengo que el recubrimiento de un H-espacio cuasifinito es cuasifinito, en el § 4 demuestro los antes citados teoremas 2 y 3, en el § 5 aplico dichos resultados a H-espacios de rango 2 no simplemente conexos y en el § 6 doy otros posibles ejemplos.

2. Mezclar grupos de homotopía

Decimos que un espacio es cuasifinito si tiene homología de tipo finito y además $H_n(X) = 0$ a partir de un n en adelante. Si X es cuasifinito tiene la homología y cohomología de un CW-complejo finito, además es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con esqueletos finitos (por ser de tipo finito) [4].

Definición.—Dada una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ diremos que es una p-equivalencia, si su localización f_p es una equivalencia de homotopía.

Siendo P un conjunto de números primos, diremos que f es una P-equivalencia si es p-equivalencia para todo $p \in P$ (o cuando f_P es una equivalencia de homotopía).

Por tanto f será p-equivalencia si $\pi_n(f)$ o $H_n(f)$ son p-isomorfismos para todo n [4], o en caso de tipo finito si $H_n(f; Z/p)$ es isomorfismo para todo n.

Por otra parte, según el método de Zabrodsky de mezclar grupos de homotopía [10], dados dos espacios X, Y O-equivalentes y dada una partición del conjunto de números primos $\pi = P \cup Q$, existe un espacio nilpotente Z con $Z_P \simeq X_P$, $Z_Q \simeq Y_Q$:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{u} & X_P \\ \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_Q & \xrightarrow[g]{} & X_0 \end{array}$$

donde f, v son Q-equivalencias mientras que u, g son P-equivalencias. Además si X, Y son cuasifinitos, resulta que Z es cuasifinito y si X_P Y_Q son H-espacios con cohomologías racionales isomorfas como álgebras de Hopf, Z es H-complejo y las equivalencias $Z_P \simeq X_P$, $Z_Q \simeq Y_Q$ son H-equivalencias. Y si X, Y son del tipo de homotopía de un CW-complejo finito simplemente conexo, Z también lo es (7.13, 7.14 [4]).

§ 3. Recubrimientos de H-espacios

Dado un H-espacio conexo por arcos, un recubrimiento suyo $\bar{X}$ tiene asimismo estructura de H-espacio, de modo que la proyección conserva el producto y puede descomponerse del siguiente modo:

$$\bar{X} = X_n \xrightarrow{\pi_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots \xrightarrow{\pi_1} X$$

de forma que cada X_i es espacio de cubrimiento de X_{i-1} con fibra un grupo cíclico y con $\pi_1 \circ \dots \circ \pi_n = \pi$ ([3]).

Por otra parte, si X es de tipo finito y nilpotente, según un teorema de Mislin (proposición 1 [8]), $\tilde{X}$ es de tipo finito y nilpotente; además si X es cuasifinito, sin más que considerar la sucesión espectral asociada al fibrado $\tilde{X} \longrightarrow X \longrightarrow K(G, 1)$, también $\tilde{X}$ es cuasifinito ([3]), por lo que podemos concluir:

Proposición 1.—Dado un H-espacio cuasifinito X, todo recubrimiento suyo $\tilde{X}$, será H-espacio cuasifinito.

§ 4. Condiciones de finitud para H-espacios no simplemente conexos

Dados dos H-espacios finitos X, Y racionalmente equivalentes ($X_0 \simeq Y_0$) consideraremos el H-espacio Z mezcla de X, Y: $Z \simeq_P X$, $Z \simeq_Q Y$, con P, Q una partición del conjunto de números primos. Vamos a ver en qué condiciones Z es finito.

Consideraremos el caso de X, Y H-espacios con grupo fundamental finito, pues si no lo fuera sabemos que podría descomponerse en la forma $X' \times (S^1)^k$ donde X' sí que tiene grupo fundamental finito. Supondremos además que P contiene a todos los primos p tales que los grupos $\pi_1(X)$ o $\pi_1(Y)$ tengan p-torsión.

En primer lugar, por lo dicho en el § 2, al ser X, Y cuasifinitos el espacio Z es asimismo cuasifinito.

Consideremos ahora el fibrado inducido siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X) & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & Z \\ \| & & \downarrow & & \downarrow f \\ \pi_1(X) & \longrightarrow & \tilde{X} & \xrightarrow[\pi]{} & X \end{array}$$

en el que f es la P-equivalencia que relaciona Z con X, y $\tilde{X}$ el cubrimiento universal de X, que será H-espacio finito simplemente conexo, pues tiene homología finitamente generada, es simplemente conexo y del tipo de homotopía de un CW-complejo (ver 7.2 Lundell). Entonces tenemos:

Teorema 2.—El espacio Z' es un H-espacio simplemente conexo y del tipo de homotopía de un CW-complejo finito.

Demostración.—Z' es mezcla de Z y $\tilde{X}$ mediante las equivalencias: $Z' \simeq_P \tilde{X}$, $Z' \simeq_Q Z$ al ser f P-equivalencia y π Q-equivalencia. Además si consideramos los cubrimientos universales $\bar{X}$, $\bar{Y}$ de X, Y, que son H-espacios finitos, sea Z″ el H-espacio finito simplemente conexo (§ 2) que resulta de mezclar los grupos de homotopía de $\bar{X}$ e $\bar{Y}$, de modo que:

$$Z'' \simeq_P \bar{X} \qquad Z'' \simeq_Q \bar{Y}$$

entonces

$$Z' \simeq_P \bar{X} \simeq_P Z'' \quad \text{y} \quad Z' \simeq_Q Z \simeq_Q Y \simeq_Q \bar{Y} \simeq_Q Z''$$

luego Z′ pertenece al mismo género que X″, lo que implica considerando el resultado de Mislin (T. 4.4. [7]), que al ser Z″ finito también es del tipo de homotopía de un CW-complejo finito, con lo que obtenemos el resultado del teorema.

Pero en qué condiciones podremos afirmar la finitud para el H-espacio Z.

Teorema 3.—Si Z tiene por grupo fundamental $\mathbb{Z}/p$ con p primo ($p \in P$), entonces Z es finito.

Demostración.—Por ser Z cuasifinito y con Z′ del tipo de homotopía de un complejo finito, Z está dominado por un complejo finito y según el teorema A [6] de Mislin su obstrucción de Wall será cero $\tilde{w}(Z) = 0$, se puede entonces aplicar el teorema 1.3 del mismo trabajo y se obtiene que Z es del tipo de homotopía de un complejo finito.

§ 5. Aplicaciones a H-espacios de rango 2

Si consideramos como espacios X, Y los H-espacios finitos no simplemente conexos P Sp (2) y $P(S^3 \times S^7) = P\,\mathbb{R}^3 \times P\,\mathbb{R}^7$, que tienen por cubrimientos universales a Sp (2) y $S^3 \times S^7$ respectivamente, y que son del tipo (3,7), tomamos una partición de los números primos P, Q tal que $2 \in P$ y $3 \in Q$, y mezclamos los grupos de homotopía de estos espacios, obtenemos el espacio Z_1 tal que

$$Z_1 \simeq_P P\,Sp\,(2) \qquad Z_1 \simeq_Q P\,(S^3 \times S^7)$$

si ahora construimos el fibrado inducido siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z'_1 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\mathbb{Z}/2 \arrow[r] & \mathrm{Sp}\,(2) \arrow[r, "\pi"'] & \mathrm{P\,Sp}\,(2)
\end{tikzcd}$$

donde f_1 es P-equivalencia y π es Q-equivalencia pues $2 \notin Q$.

Teorema 4.—Z'_1 es H-espacio finito simplemente conexo del tipo de homotopía de $E_{3\,w}$ (notación de [4]).

Demostración.—Aplicando el teorema 2 obtenemos que Z'_1 es H-espacio simplemente conexo y del mismo género que $E_{3\,w}$, pues

$$E_{3w} \simeq_P \mathrm{Sp}\,(2), \qquad E_{3w} \simeq_Q S^3 \times S^7$$

es además de tipo (3,7) y como los H-espacios finitos de tipo (3,7) están clasificados por tipos de homotopía [5] y el único tipo de homotopía existente en el género de $E_{3\,w}$ es él mismo, necesariamente Z'_1 será del tipo de homotopía de $S_{3\,w}$, con lo que el teorema está demostrado.

Si aplicamos ahora el teorema 3 obtenemos:

Teorema 5.—Z_1 es H-espacio finito no simplemente conexo.

Además Z_1 será del tipo de homotopía de $P\,E_{3\,w}$ por ser Z'_1 del tipo de homotopía de $E_{3\,w}$ y ser CW-complejos.

Análogamente podríamos considerar como X, Y del § 4 los H-espacios $P\,\mathbb{R}^3 \times S^7$ y Sp (2) (o $S^3 \times P\,\mathbb{R}^7$ y Sp (2)) con lo que obtenemos un nuevo espacio Z_2 (o Z_3) tal que:

$$Z_2 \simeq_Q \mathrm{Sp}\,(2) \ \ Z_2 \simeq_P P\,\mathbb{R}^3 \times S^7$$
$$Z_3 \simeq_Q \mathrm{Sp}\,(2) \ \ Z_3 \simeq_P S^3 \times P\,\mathbb{R}^7$$

considerando los correspondientes cubrimientos:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z'_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_2 \arrow[d] \\
\mathbb{Z}/2 \arrow[r] & S^3 \times S^7 \arrow[r] & (P\,S^3) \times S^7
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}/2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z'_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z_3 \arrow[d] \\ \mathbb{Z}/2 \arrow[r] & S^3 \times S^7 \arrow[r] & S^3 \times P\,S^7 \end{tikzcd}$$

y aplicando el teorema 2, obtenemos:

TEOREMA 6.—Z'_2, Z'_3 son H-espacios simplemente conexos y del tipo de homotopía de un CW-complejo finito. Además son homotópicamente equivalentes a $E_{4\,w}$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta aplicar el teorema 2 y tener en cuenta que:

$$Z'_2 \simeq_Q Z_2 \simeq_Q \mathrm{Sp}\,(2) \simeq_Q E_{4w} \simeq_Q \mathrm{Sp}\,(2) \simeq_Q Z_3 \simeq_Q Z'_3$$
$$Z'_2 \simeq_P S^3 \times S^7 \simeq_P E_{4w} \simeq_P S^3 \times S^7 \simeq_P Z'_3$$

con lo que Z'_2, $Z'_3 \in G\,(E_{4\,w})$, pero como en este género sólo hay un tipo de homotopía [5], los tres pertenecen a este mismo tipo.

Si aplicamos de nuevo el teorema 3 obtenemos:

COROLARIO 7.—Tanto Z_2 como Z_3 son H-espacios finitos no simplemente conexos y del mismo género.

§ 6. OTROS EJEMPLOS

Similar técnica se puede usar en los ejemplos de H-espacios inducidos mediante el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}\,(n) \arrow[r] \arrow[d] & D_{kw} \arrow[r] \arrow[d] & S^{4n+3} \arrow[d] \\ \mathrm{Sp}\,(n) \arrow[r] & \mathrm{Sp}\,(n+1) \arrow[r] & S^{4n+3} \end{tikzcd}$$

(en las condiciones del teorema 13.4 de [1]).

Por ejemplo, si tomamos $n = 2$ la aplicación característica del fibrado es un generador de $\mathbb{Z}/5!$, y por tanto obtenemos nuevos H-espacios D_{kw} para todo k impar. En particular para $k = 3$ tendremos:

$$(D_{3w})_p \simeq \mathrm{Sp}\,(3)_p \quad \text{para} \quad p \neq 3, \quad (D_{3w})_p \simeq (\mathrm{Sp}\,(2) \times S^{11})_p \quad \text{para} \quad p \neq 2{,}5$$

(factores primos de 40).

Entonces obtenemos $P D_{3\omega}$ mezclando $P\,Sp(3)$ con $P(Sp(2) \times S^{11})$ de modo que

$$(P\, D_{3w})_p \simeq P\, Sp\, (3)_p \quad \text{para} \quad p \neq 3,$$
$$(P\, D_{3w})_p \simeq P\, (Sp\, (2) \times S^{11})_p \quad \text{para} \quad p \neq 2{,}5.$$

Con lo que $P D_{3w}$ es H-espacio finito no simplemente conexo cuyo cubrimiento universal es D_{3w}.

De modo totalmente análogo se podrán obtener otros ejemplos para distintos valores de n y k.

Bibliografía

[1] ARKOWICZ: *Localization and H-spaces.* «Lect. Notes», S 44. Aarhus Univer., 1976.

[2] BOREL, A.: *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes.* «Amer. J. of Math.», 76, 1954.

[3] BROWDER, W.: *The cohomology of covering spaces of H-spaces.* «Bull. AMS», 65, 1959.

[4] HILTON, P.-MISLIN-ROITBERG: *Localisation of nilpotent groups and spaces.* «North Holland Math. Studies», 15, 1975.

[5] HILTON, P.-ROITBERG: *On the classication problem for H-spaces of rank two.* «Comm. Math. Helv.», 45, 1970.

[6] MISLIN, G.: *Wall's obstruction for nilpotent spaces.* «Topology», 14, 1975.

[7] MISLIN, G.: *Finitely dominated nilpotent spaces.* «Ann. of Math.», 103, 1976.

[8] MISLIN, G.: *Conditions de finitude pour les polyedres.* Publ. de la seccio de mat. Univ. Aut. de Barcelona, 4, 1977.

[9] SERRE, J. P.: *Homologie singulière des espaces fibrés.* «Ann. of Math.», 54, 1951.

[10] ZABRODSKY, A.: *Homotopy associativity and finite CW-complexes.* «Topology», 9, 1970.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza