SOBRE UNOS SISTEMAS DE NUMEROS ENTEROS ALGEBRAICOS DE D. S. GORSHKOV Y SUS APLICACIONES AL CALCULO

por

EMILIANO APARICIO BERNARDO

RESUMEN

El objeto del trabajo es la determinación de una cota superior del número real ρ definido como

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \rho_n \qquad \rho_n^{-n} = \min_{P_n \in H_n} \max_{0 \leq x \leq 1} | P_n (X) |$$

H n clase de polinomios no nulos con coeficientes en Z y grado menor o igual a n.

En un artículo anterior («R. M. H.-A.», 4 serie, t. XXXVIII, n.º 6, 1978, pp. 259-270) el autor muestra que dado $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ sistema completo de números reales algebraicos y algebraicamente conjugados, verificando:

$$0 \leq 1 / \lambda_i + s \leq 1 \qquad \forall_i, \quad \exists \, s \in Z$$

y definiendo

$$\delta = \Big(\prod_{i=1}^{m} | \lambda_i + s | \Big)^{1/m}$$

se verifica $\rho \leqslant \delta$, lo que proporciona una acotación superior de ρ. El autor construye explícitamente una sucesión de sistemas

$$A_p = \{ \lambda_i^p \} \quad p = 0, 1, \dots$$

con las propiedades requeridas, lo que permite obtener la acotación $\rho \leqslant 2{,}41421$.

El objetivo del presente trabajo es la construcción de otra sucesión A_p de tales sistemas de números algebraicos reales. La construcción es esencialmente distinta de la realizada en el artículo citado anteriormente y según señala el autor es el desarrollo de ideas de D. S. Gorshkov. Cada sistema A_p viene dado por las raíces de un cierto polinomio $G_p(X)$ definido recurrentemente. La nueva cota obtenida $\rho \leqslant 2{,}37686$ mejora la anterior.

Al final del trabajo el autor discute el problema de la acotación inferior de ρ y

señala un resultado en este sentido del profesor C. Simo ($\rho \gg 2{,}33071$) que mejora otro anterior del autor (artículo citado).

En conclusión se considera que es procedente la publicación de este trabajo por el interés del método de construcción y por ser complemento y mejora de resultados del autor publicados en la misma revista.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de números enteros algebraicos que se construyen a continuación pueden aplicarse para la obtención de una acotación superior bastante buena de la magnitud ρ que estudiábamos en [5] y [6]. Esta magnitud se definía como el límite

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \rho_n, \tag{1}$$

donde

$$\rho_n^{-n} = \min_{P_n \in H_n} \max_{0 \leq x \leq 1} |P_n(x)| \tag{2}$$

y H_n es la clase de polinomios de grado no superior a n con coeficientes enteros racionales no simultáneamente nulos. La existencia del límite (1) es conocida [4].

En [5] y [6] se demuestra que, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ es un sistema completo de números enteros algebraicos reales y algebraicamente conjugados tal que, para cierto entero racional s, se verifican las desigualdades

$$a \leq \frac{1}{\lambda_k + s} \leq b, \tag{3}$$

y $T_n(x)$ es un polinomio de coeficientes enteros racionales de grado n que cumple la condición

$$T_n\left(\frac{1}{\lambda_k + s}\right) \neq 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

entonces

$$\max_{a \leq x \leq b} |T_n(x)| \geq \delta^{-n}, \tag{5}$$

donde

$$= \left(\prod_{k=1}^{m} | \lambda_k + s | \right)^{\frac{1}{m}} . \tag{6}$$

En particular, si para todo $n > n_0$, el polinomio $T_m(x)$ de coeficientes enteros de desviación uniforme mínima a cero en el segmento $[a, b]$ cumple la condición (4), entonces de (5) se deduce inmediatamente que

$$\rho_n \leq \delta, \quad n > n_0 \tag{7}$$

y, por lo tanto, también

$$\rho \leq \delta. \tag{8}$$

Siguiendo este orden de cosas, ahora construiremos una sucesión de sistemas de números enteros algebraicos reales A_p, $p = 1, 2, \ldots$, todos distintos entre sí, que cumplan las condiciones enunciadas anteriormente. Denotaremos por

$$\lambda_1^{(p)} < \ldots \lambda_{m_p}^{(p)}, \tag{9}$$

los números del sistema A_p, dispuestos en orden creciente, y por δ_{m_p}, la magnitud correspondiente (6), que ahora tomará la forma

$$\delta\, m_p = \left(\prod_{k=1}^{m_p} | \lambda_k^{(p)} + s | \right)^{1/m_p}, \tag{10}$$

donde s es un entero racional.

Si los números (9) de distintos sistemas A_p son todos distintos, entonces, para $p > p_0$, las raíces del polinomio de coeficientes enteros de desviación uniforme mínima a cero $T_m(x)$ no podrán coincidir con $(\lambda_k^{(p)} + s)^{-1}$, o sea, se cumplirá la condición

$$T_n \left(\frac{1}{\lambda_k^{(p)} + s} \right) \neq 0, \quad k = 1, \ldots, m_p, \tag{11}$$

y, en virtud de (7), tendremos

$$\rho_n \leq \delta_{m_p}, \quad p > p_0 . \tag{12}$$

Si logramos construir los sistemas A_p de tal modo que exista el límite

$$\delta^* = \lim_{p \to \infty} \delta_{m_p}, \tag{13}$$

entonces, pasando a límites en (12), obtendremos

$$\rho_n \leq \delta^*, \tag{14}$$

de donde, pasando de nuevo a límites cuando n tiende al infinito, para la magnitud (1) resultará

$$\rho \leq \delta^* . \tag{15}$$

§ 1. Sistemas de números enteros algebraicos de D. S. Gorshkov

En [5], [6] se construyeron unos sistemas A_p de números (9) con las condiciones enunciadas. Ahora, siguiendo unas ideas expresadas varios años atrás por el profesor D. S. Gorshkov, construiremos otros sistemas de números enteros algebraicos que cumplan las mismas condiciones.

Consideremos para ello dos sistemas de polinomios de coeficientes enteros $\{G_p(x)\}$ y $\{J_p(x)\}$, definidos por las fórmulas de recurrencia

$$\begin{aligned} G_{p+1}(x) &= (G_p(x) + J_p(x))^2, \\ J_{p+1}(x) &= G_p(x) \cdot J_p(x), \end{aligned} \tag{16}$$

siendo

$$\begin{aligned} G_0(x) &= (x-1)^2, \\ J_0(x) &= -x. \end{aligned} \tag{17}$$

Está claro que $G_p(x)$ es el cuadrado de un polinomio de coeficientes enteros de grado 2^{p+1}.

Inmediatamente comprobamos que

$$\begin{aligned} G_1(x) &= x^2 G_0(t(x)), \\ J_1(x) &= x^2 J_0(t(x)), \end{aligned} \tag{18}$$

donde

$$t(x) = \frac{(x-1)^2}{x}, \tag{19}$$

y, por inducción, que

$$\begin{aligned} G_p(x) &= x^{2^p} G_{p-1}(t(x)), \\ J_p(x) &= x^{2^p} J_{p-1}(t(x)). \end{aligned} \tag{20}$$

Facilmente se deduce ahora que las raíces del polinomio $G_p(x)$ son todas reales, positivas y de 2.° orden. Estas las denotaremos mediante $\lambda_k^{(p)}$, $k = 1, \ldots, 2^p$, y supondremos que están dispuestas en orden de crecimiento.

El sistema pedido A_p estará formado precisamente por estos números y lo llamaremos sistema de números enteros algebraicos de D. S. Gorshkov.

El polinomio $G_p(x)$ puede ahora expresarse en la forma

$$G_p(x) = \prod_{k=1}^{2^p} (x - \lambda_k^{(p)})^2. \tag{21}$$

En la primera igualdad (20) observamos que las raíces del polinomio $G_p(x)$ se obtienen resolviendo las ecuaciones

$$t(x) = \lambda_k^{(p-1)} \tag{22}$$

para todo $k = 1, \ldots, 2^{p-1}$.

Así pues, el sistema A_p está formado por las raíces de las ecuaciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} &x^2 - (\lambda_1^{(p-1)} + 2)\, x + 1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x^2 - (\lambda_{2^p-1}^{(p-1)} + 2)\, x + 1 = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

En virtud del orden de crecimiento dispuesto anteriormente, las raíces de estas ecuaciones son los pares de números:

$$\begin{array}{ll} \lambda^{(p)}_{2p-1}, & \lambda^{(p)}_{2p-1+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \lambda^{(p)}_{1}, & \lambda^{(p)}_{2p}, \end{array} \tag{24}$$

respectivamente.

Para las ecuaciones de la forma (23) resulta trivial el siguiente lema:

LEMA.—*Si* $0 < a < b$, *entonces las raíces* $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ *de la ecuación cuadrática*

$$x^2 - (a + 2) x + 1 = 0, \tag{25}$$

están comprendidas entre las raíces $0 < \beta_1 < \beta_2$ *de la ecuación cuadrática*

$$x^2 - (b + 2) x + 1 = 0, \tag{26}$$

o sea,

$$\beta_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 . \tag{27}$$

He aquí algunos casos particulares:

El sistema A_0 consta del solo número $\lambda_1^{(0)} = 1$. El sistema A_1 está formado por las raíces de la ecuación

$$x^2 - (\lambda_1^{(0)} + 2) x + 1 = 0, \tag{28}$$

de modo que

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38, \qquad \lambda_2^{(1)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2{,}62. \tag{29}$$

El sistema A_2 está formado por las raíces de las ecuaciones

$$\begin{array}{l} x^2 - (\lambda_1^{(1)} + 2) x + 1 = 0, \\ x^2 - (\lambda_2^{(1)} + 2) x + 1 = 0, \end{array} \tag{30}$$

o sea, por los números

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(2)} &\approx 1{,}09, & \lambda_3^{(2)} &\approx 1{,}84, \\ \lambda_1^{(2)} &\approx 0{,}23, & \lambda_4^{(2)} &\approx 4{,}39. \end{aligned} \tag{31}$$

En general, aplicando el lema anterior, deducimos que las dos raíces de cada una de las ecuaciones del sistema (23) (salvo la última), están comprendidas entre las raíces de la ecuación siguiente. Una vez más se comprueba que los números que forman el sistema A_p son todos distintos entre sí.

Las fórmulas (16) muestran qué distintos sistemas de números A_p *carecen de elementos comunes.*

En efecto, la 2.ª fórmula implica que

$$J_{p+1}(x) = G_p(x)\, G_{p-1}(x) \ldots G_0(x)\, J_0(x), \tag{32}$$

y, por lo tanto,

$$G_{p+1}(x) = (G_p(x) - x\, G_{p-1}(x) \ldots G_0(x))^2. \tag{33}$$

De aquí que, si $G_{p+1}(x)$ tuviese alguna raíz común con $G_k(x)$ para algún $k \leqslant p$, entonces ésta también sería una raíz de $G_p(x)$ y, por lo tanto, también sería una raíz de algún $G_k(x)$ con $k \leqslant p - 1$. De este modo, $G_p(x)$ estaría en las mismas condiciones respecto de esta raíz que $G_{p+1}(x)$, por lo que la raíz mencionada también sería una raíz de $G_{p-1}(x)$, y así sucesivamente. Llegaríamos a la conclusión de la existencia de una raíz común para $G_0(x)$ y $G_1(x)$, lo cual no es cierto.

Así pues, los sistemas de números enteros algebraicos A_p, de D. S. Gorshkov, cumplen todas las propiedades requeridas. Son sistemas completos de números enteros algebraicos reales, positivos y distintos todos ellos entre sí.

Como

$$0 < \frac{1}{1 + \lambda_k^{(p)}} < 1, \tag{34}$$

podemos aplicarlos para hallar una acotación superior para la magnitud ρ en el segmento $[0, 1]$.

En este caso, $s = 1$, $m_p = 2^p$ y

$$\delta_{2^p} = \delta_{m_p} = \prod_{k=1}^{2^p} (1 + \lambda_k^{(p)})^{1/2^p} \tag{35}$$

A continuación demostraremos la existencia del límite

$$\delta^* = \lim_{p \to \infty} \delta_{2^p} \tag{36}$$

y efectuaremos un cálculo aproximado de esta magnitud. Pero antes construiremos una sucesión auxiliar de números positivos.

§ 2. Sucesión $\{\theta_k\}$.

Consideremos la sucesión de números reales positivos, definidos por las igualdades

$$\theta_{k+1} = \sqrt{\frac{G_k(-1)}{J_k(-1)}}, \quad \theta_0 = 1. \tag{37}$$

Aplicando las fórmulas de recurrencia (16), obtenemos

$$\theta_{k+1} = \sqrt{\frac{(G_{k-1}(-1) + J_{k-1}(-1))^2}{G_{k-1}(-1)\, J_{k-1}(-1)}} = \sqrt{\theta^2 + 2 + \frac{1}{\theta_k^2}}, \tag{38}$$

de donde vemos que la fórmula de recurrencia para θ_{k+1} tiene la forma

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{1}{\theta_k} = \theta_k \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right), \quad \theta_0 = 1, \tag{39}$$

y, por lo tanto,

$$1 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_k < \ldots; \lim_{k \to \infty} \theta_k = \infty. \tag{40}$$

Haciendo en (39) $k = 0, 1, \ldots, n + 1$, y multiplicando las igualdades obtenidas, resulta la fórmula

$$\theta_{n+1} = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2} \right), \tag{41}$$

que nos servirá para el cálculo de la magnitud δ^*.

He aquí una pequeña tabla de valores de θ_k, obtenida con ayuda de una calculadora CASIO, fx-102, a partir de la fórmula (39):

n	n
0	1,000000000
1	2,000000000
2	2,500000000
3	2,900000000
4	3,244827586
5	3,553010370
6	3,834461842
7	4,095254631
8	4,339439691
9	4,569884188
10	4,788708114
11	4,997532702

(42)

§ 3. Estudio de la sucesión $\{\delta_{2p}\}$ y cálculo de δ^*

Para simplificar, en lugar de δ_{2p} escribiremos a continuación δ_p. Comparando (21) y (35) vemos ahora que

$$\delta_p^{2p+1} = G_p(-1). \tag{43}$$

Pero, según (37),

$$G_p(-1) = \theta_{p+1}^2 \, J_p(-1), \tag{44}$$

y, de aquí, aplicando (16), hallamos que

$$J_p(-1) = \theta_p^2 \, J_{p-1}^2(-1), \tag{45}$$

de donde, por recurrencia, obtenemos:

$$J_p(-1) = \theta_p^2 \, \theta_{p-1}^{2^2} \ldots \theta_1^{2^p}, \tag{46}$$

y sustituyendo en (44),

$$G_p(-1) = \theta_{p+1}^2 \, \theta_p^2 \, \theta_{p-1}^{2^2} \ldots \theta_1^{2^p}. \tag{47}$$

Teniendo en cuenta esto, para δ_p obtenemos ahora de (43):

$$\delta_p = \theta_{p+1}^{2^{-p-1}} \prod_{k=1}^{p+1} \theta_k^{2^{-k}}. \tag{48}$$

Aplicando la fórmula (41), el 2.º factor que figura en (48) lo podemos expresar en la forma

$$\prod_{k=1}^{p+1} \theta_k^{2^{-k}} = \prod_{k=1}^{p+1} \prod_{s=0}^{k-1} \left(1 + \frac{1}{\theta_s^2}\right)^{2^{-k}}, \tag{49}$$

y cambiando el orden de los productos, obtenemos

$$\prod_{k=1}^{p+1} \theta_k^{2^{-k}} = \prod_{k=0}^{p} \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right)^{2^{-k} - 2^{-p-1}}. \tag{50}$$

Ahora bien, expresando el primer factor en (48) según (41),

$$\theta_{p+1}^{2^{-p-1}} = \prod_{k=0}^{p} \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right)^{2^{-p-1}}, \tag{51}$$

y multiplicando esto por (50), obtenemos para δ_p en (48) definitivamente:

$$\delta_p = \prod_{k=0}^{p} \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right)^{2^{-k}}. \tag{52}$$

Esto muestra que la sucesión $\{\delta_p\}$ es monótona creciente y convergente:

$$\delta_0 = 2 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_p < \ldots; \tag{53}$$

su límite δ^* es:

$$\delta^* = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right)^{2^{-k}}. \tag{54}$$

Esta fórmula nos permitirá efectuar un cálculo aproximado de δ^*. Pasando a logaritmos, obtenemos la serie convergente:

$$\ln \delta^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ln \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right). \tag{55}$$

En virtud de (52), vemos que

$$\ln \delta^* = \ln \delta_p + R_p, \tag{56}$$

donde

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \ln \left(1 + \frac{1}{\theta_k^2}\right) < \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k\, \theta_k^2}, \tag{57}$$

y, por lo tanto, para el resto R_p, obtenemos la acotación:

$$0 < R_p < \frac{1}{2^p\, \theta_{p+1}^2}. \tag{58}$$

Así, por ejemplo, aplicando la tabla de valores (42), hallamos:

$$0 < R_{10} < \frac{1}{2^{10}\, \theta_{11}^2} \approx 3{,}910108 - 05 < 4.10^{-5} \tag{59}$$

mientras que

$$0{,}86573 < \ln \delta_{10} < 0{,}86574, \tag{60}$$

de modo que

$$0{,}86573 < \ln \delta^* < 0{,}86578, \tag{61}$$

de donde

$$2{,}37674 < \delta^* < 2{,}37686. \tag{62}$$

§ 4. Aplicación al cálculo de algunas desviaciones diofánticas mínimas a cero

Volvamos de nuevo a examinar las desviaciones diofánticas a cero en el segmento $[0, 1]$. Para la magnitud ρ, definida en (1), habíamos demostrado la desigualdad (15). En virtud del resultado obtenido anteriormente para δ^*, ahora queda demostrada la siguiente acotación superior:

$$\rho \leq 2{,}37686. \tag{63}$$

En [5], [6] se demostró que las desviaciones mínimas a cero en los segmentos $[0, 1]$ y $[0, 1/4]$ guardan una estrecha relación. Haciendo

$$r = \lim_{n \to \infty} r_n, \tag{64}$$

donde

$$r_n^{-n} = \min_{P_n \in H_n} \max_{0 \leq x \leq 1/4} | P_n(x) |, \tag{65}$$

se demostró entonces la igualdad

$$\rho = \sqrt{r}\ . \tag{66}$$

En virtud de (63), esto muestra que

$$r \leq 5{,}64947. \tag{67}$$

El problema de las acotaciones inferiores para ρ y r es, en cierto modo, más sencillo. Como se vio en [5], [6], el problema se reduce a hallar algún polinomio de coeficientes enteros que proporcione una desviación relativa lo más mínima posible. Naturalmente, lo mejor sería hallar para todo n un polinomio de desviación mínima a cero; pero este problema todavía no está resuelto (véase [3]).

Considerando el ejemplo del polinomio

$$p(t) = t^5 (1 - 4t)(1 - 5t) \tag{68}$$

en el segmento [0, 1/4], se consiguió hallar entonces también una acotación inferior bastante buena para r:

$$r \geq 5{,}3715643. \tag{69}$$

Después de mi comunicación [5], el profesor Dr. Carlos Simó, de la Universitat Autónoma de Barcelona, halló un polinomio de coeficientes enteros de grado 17 para el segmento [0, 1/4] que proporciona un resultado todavía mejor. Este polinomio es:

$$p(t) = t^{11} (29t^2 - 11t + 1)(1 - 4t)^2 (1 - 5t)^2 \tag{70}$$

que, aplicando lo expuesto en [5], [6] nos da para r:

$$r > 5{,}43222. \tag{71}$$

Aplicando la fórmula (66), de aquí obtenemos para ρ la siguiente acotación inferior:

$$\rho > 2{,}33071. \tag{72}$$

En resumen, para las magnitudes ρ y r quedan ahora demostradas las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} 2{,}33071 &< \rho < 2{,}37686, \\ 5{,}43222 &< r < 5{,}64947. \end{aligned} \tag{73}$$

En las VI Jornadas de Matemáticas Hispano-Lusas, celebradas en junio de 1979 en Santander, el autor hizo una breve comunicación sobre estos resultados [7].

Estas acotaciones pueden aplicarse también para el caso de la métrica L_2. En [4], para un segmento arbitrario $[a, b]$, habíamos introducido la magnitud

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sigma_n , \tag{74}$$

donde

$$\sigma_n^{-2n} = \min_{Q_n \in H_n} \int_a^b Q_n^2(x)\,dx , \tag{75}$$

demostrando la existencia del límite (74) y la igualdad

$$\sigma = \rho_{ab} ; \tag{76}$$

aquí, ρ_{ab} denota ahora una magnitud análoga a (1), pero para el segmento $[a, b]$.

Esto muestra que las acotaciones (73) también son válidas para σ en sus respectivos segmentos.

Finalmente, me gustaría que el presente trabajo pudiese servir como un modesto homenaje a mi amigo y colega el profesor Dr. D. S. Gorshkov, cuyas ideas han sido fundamentales aquí y que espero hayan sido correctamente expresadas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] ANDRIA, GEORGE D.: *Approximation of Continuous Functions by Polynomials with Integral Coefficients, University of Pittsburgh.* «Journal of approximation theory», 4, 357-362 (1971).

[2] APARICIO BERNARDO, E.: *Propiedades extremales de los polinomios de coeficientes enteros y aproximación de las funciones mediante dichos polinomios.* Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, Bilbao, 1972.

[3] — — *Estructura asintótica de los polinomios con coeficientes enteros de desviación mínima a cero en el segmento* [0, 1]. Informe presentado a las «III Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas en Sevilla», año 1974.

[4] — — *Generalización de un teorema de L. G. Shnirelmán sobre la existencia de límite en las desviaciones diofánticas mínimas a cero.* Informe presentado a la «XII Reunión Anual de Matemáticos Españoles» en Málaga, año 1976.

[5] — — *Sobre el cálculo de la desviación diofántica mínima a cero en el segmento* [0, 1]. «Actas del V Congreso de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina», Palma de Mallorca, año 1977.

[6] — — *Métodos para el cálculo aproximado de la desviación diofántica uniforme mínima a cero en un segmento.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo XXXVIII, número 6, Madrid, 1978, 259-270.

[7] — — *Nuevas acotaciones para la desviación diofántica uniforme mínima a cero en* [0, 1] *y* [0, 1/4]. Informe presentado a las «VI Jornadas de Matemáticas Hispano-Lusas» en Santander, año 1979. *E*

[8] HEWITT, E. y ZUCKERMAN, H.: *Approximation by polynomials with integral coefficients, a reformulation of the Stone-Weirstrass theorem.* «Duke Math. J.», 26 (1959), 305-324.

Universidad Autónoma de Bilbao
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias