

# UN TEOREMA DE APROXIMACION EN ESPACIOS $L^p$

por

M. L. REZOLA

## 1. INTRODUCCIÓN

El objeto de este trabajo es obtener un resultado de aproximación en  $L^p$ -norma del tipo del teorema de Stone-Weierstrass para funciones continuas. Nos fijaremos para ello en la siguiente versión del teorema de Stone-Weierstrass que se ve en [3], pág. 53:

**TEOREMA 0.**—Sea  $X$  un espacio completamente regular,  $H$  una subálgebra de  $C(X)$ , que separa puntos (autoconjugada en el caso complejo) y  $S$  un subespacio de  $C(X)$ ,  $H$ -invariante ( $HS \subseteq S$ ); entonces  $f \in \bar{S}$  si y sólo si  $f(x) = 0$  para todo  $x \in F$ , siendo

$$F = \bigcap_{g \in S} g^{-1}(0)$$

Denotemos por (i) la condición: « $f(x) = 0$  para todo  $x \in F$ », y por (ii): « $H$  separa puntos».

Queremos un resultado análogo en  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$  (brevemente  $L^p(\mu)$ ), con  $X$  espacio de medida y  $\mu$  medida positiva. Sea  $S$  un subespacio de  $L^p(\mu)$  y  $H$  un subconjunto de  $L^\infty(\mu)$  (para que tenga sentido  $HS \subseteq S$ ) no necesariamente subálgebra; para caracterizar las funciones  $f \in \bar{S}$ , la condición (i) se traduce por: « $f$  se anula en los puntos en los que se anulan todas las funciones de  $S$ », y la condición (ii) podría traducirse (teniendo en cuenta que estamos considerando clases de equivalencia a. e.) por:

(\*) No existe ningún  $E$  de medida positiva (no átomo) tal que cada  $\varphi \in H$ , sea constante a. e. sobre  $E$ .

Sin embargo esto no es satisfactorio, pues basta tomar  $H = \{\text{funciones pares acotadas medibles en } \mathbb{R}\}$  que cumple (\*) pero  $S = \{\text{funciones pares medibles}\} \subseteq L^p(\mu)$  no es denso.

Obsérvese que el conjunto de las funciones pares continuas reales no cumple (ii), pues es constante en cada conjunto  $\{-a, a\}$  con  $a \in \mathbb{R}$ . La cuestión está en que estos conjuntos son de medida nula.

Una traducción más satisfactoria de (ii) es:

(\*\*) No existe ninguna  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ , contenida estrictamente en  $\mathcal{A}$ , tal que toda  $\varphi \in H$  sea  $\mathcal{F}$ -medible.

Nótese que la condición (\*\*) es más fina que (\*) (basta tomar  $\mathcal{F}_E = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap E = \emptyset \text{ ó } E \subset A\}$ ). El subespacio de las funciones pares acotadas, verifica (\*) pero no (\*\*).

Los resultados fundamentales que probaremos (teorema 1 para el caso real, teorema 2 para el caso complejo) establecen que el análogo del teorema 0 para  $L^p(\mu)$ , con  $0 < p < \infty$ , es cierto si en la condición (i) se sustituye  $F$  por el soporte del subespacio y (ii) se sustituye por (\*\*).

## 2. EL TEOREMA FUNDAMENTAL

Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito, y  $0 < p < \infty$ . Denotaremos por  $L^p_{\mathbb{C}}$  el espacio de las clases de equivalencia a. e. de funciones medibles complejas  $p$ -integrables y  $L^p$  cuando nos referimos a funciones reales. Si  $A$  es un subconjunto medible de  $X$ ,  $L^p_{\mathbb{C}}(A)$  y  $L^p(A)$  serán los correspondientes subespacios de los anteriores, de las funciones que se anulan fuera de  $A$ .

$\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$  ó  $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$  serán los espacios de las funciones medibles complejas o reales, esencialmente acotadas.

Si  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  y  $E \subseteq X$  es medible,  $f_E$  es la función,  $f_E(x) = 0$  si  $x \notin E$ ,  $f_E(x) = f(x)$  si  $x \in E$ , es decir la función  $f \chi_E$ .

Si  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ , la  $\sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{D}$  se denota  $\sigma(\mathcal{D})$ .

Si  $\mathcal{B}$  es la familia de los borelianos de  $\mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ,

$$\sigma(H) = \bigvee_{\varphi \in H} \varphi^{-1}(\mathcal{B})$$

es la mínima  $\sigma$ -álgebra contenida en  $\mathcal{A}$ , respecto de la cual todas las  $\varphi \in H$  son medibles, o, equivalentemente la  $\sigma$ -álgebra engendrada por

$$\{\varphi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}, \varphi \in H\}.$$

DEFINICIONES:

1) Dada cualquier función medible  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ , llamamos *sopORTE* de  $f$  al conjunto medible:

$$\text{sop } f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

2) Sea  $S$  una familia de funciones medibles (o de clases de equivalencia a. e. de funciones medibles). Dado un conjunto medible  $E$ , diremos que  $S$  se anula sobre  $E$  cuando:  $\mu(E) > 0$  y  $f_E = 0$  a. e. para toda  $f \in S$ .

3) Sea  $H$  una familia de funciones medibles acotadas (o esencialmente acotadas). Una familia  $S$  de funciones medibles (o clases de equivalencia a. e.) se dice *H-invariante* si  $f \varphi \in S$  y  $\varphi \in H$ .

4) Sean  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$   $\sigma$ -álgebras. Diremos que  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son equivalentes si sus complecciones (respecto de  $\mu$ ) coinciden.

5) Sea  $S$  un subespacio de  $L^p$  con  $0 < p < \infty$ ; sabemos que  $X$  puede descomponerse en dos conjuntos medibles disjuntos, tales que  $S$  se anula en uno de ellos y no se anula en ningún subconjunto del otro, es decir,  $X = A \cup B$  con  $A \cap B = \emptyset$ ,  $S$  nulo en  $B$  y no nulo en los subconjuntos de  $A$  (véase [6], pág. 481).

Tales conjuntos  $A, B$  quedan unívocamente determinados (módulo conjuntos de medida nula) y designaremos  $\text{sop } S = A$ .

TEOREMA 1.—Sea  $H$  un subconjunto de  $\mathcal{L}^\infty$  y  $S$  un subespacio *H*-invariante de  $L^p$ , con  $0 < p < \infty$ . Si  $\text{sop } S = A$  y  $\sigma(H)$  es equivalente a  $\mathcal{A}$  entonces la clausura de  $S$  en  $L^p$  es  $L^p(A)$ .

### 3. LEMAS PREVIOS

Veamos unos lemas previos a la demostración del teorema; el primero es un caso particular del teorema a probar.

LEMA 1.—Sea  $S$  un subespacio vectorial de  $L^p$  ( $0 < p < \infty$ )  $\mathcal{L}^\infty$ -invariante y  $A \subseteq X$  su soporte; entonces  $S$  es denso en  $L^p(A)$ .

DEMOSTRACIÓN.—Consideremos en primer lugar el caso  $1 \leq p < \infty$ . Si  $g \in L^p(A)$ , bastará ver que todo funcional lineal acotado que se anula en  $S$ , se anula en  $g$ .

Sea  $h \in L^{p'}(A) = (L^p(A))'$  tal que  $\int_A h f d\mu = 0$  para toda  $f \in S$ .

Dada  $f \in S$ , por ser  $S$   $\mathcal{L}^\infty$ -invariante, tenemos que  $f\varphi \in S$  para toda  $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ , luego  $\int_A h f \varphi d\mu = 0$  para toda  $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ , por lo que  $h f = 0$

a. e., para toda  $f \in S$ . Entonces,  $S$  se anula en  $\text{sop } h$ , de lo que se deduce que  $S$  se anula en  $\text{sop } h \cap \text{sop } g$  y, como por hipótesis,  $S$  no se anula en subconjuntos de  $A$ , se tendrá que

$$\mu(\text{sop } h \cap \text{sop } g) = 0,$$

por lo que  $\int_A h g = 0$ .

Sea ahora  $0 < p < 1$ . Es claro que  $S \cap L^1$  es  $\mathcal{L}^\infty$ -invariante. Veamos que  $\text{sop}(S \cap L^1) = A$ . Si  $\text{sop}(S \cap L^1)$  no fuese  $A$ , tendríamos que  $S \cap L^1$  se anularía en algún  $C$ , subconjunto medible de  $A$ , con  $\mu(C) > 0$ ; ahora bien, como  $\text{sop } S = A$ , existe  $f \in S$  tal que

$$\mu\{x \in C : f(x) \neq 0\} > 0,$$

y se puede encontrar un  $E \subseteq C$  con  $\mu(E) > 0$  tal que  $\int_E |f| < \infty$ .

Tenemos pues que  $f \chi_E \in L^1(A)$  y, por ser  $S$   $\mathcal{L}^\infty$ -invariante,  $f \chi_E \in S$ , con lo que  $f \chi_E \in S \cap L^1$  y esto contradice la hipótesis de que  $S \cap L^1$  se anula en  $C$ .

Como  $S \cap L^1$  es un subespacio de  $L^1$   $\mathcal{L}^\infty$ -invariante y con soporte  $A$ , por la parte anterior, sabemos que  $S \cap L^1$  es denso en  $L^1$ .

En el caso de ser  $\mu(X) < \infty$ , como  $L^1(A)$  es un subespacio denso de  $L^p(A)$  cumpliéndose,

$$\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_1 |\mu(x)|^{1/p-1}$$

con  $0 < p < 1$ , es claro que  $S \cap L^1$  es denso en  $L^p(A)$  y por tanto  $S$  es denso en  $L^p(A)$ .

Veamos qué ocurre si  $\mu(A) = \infty$ . Por ser  $\mu$   $\sigma$ -finita,  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  con los  $A_n$  crecientes y de medida finita. Como  $S \subset L^p$ , es claro que

$$S \chi_{A_n} \subset L^p(A_n)$$

es  $\mathcal{L}^\infty(A_n)$ -invariante y no se anula en ningún subconjunto de  $A_n$ , lo

que implica que

$$\overline{S \chi_{A_n}} = L^p(A_n)$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Probemos que  $S$  es denso en  $L^p(A)$ . Dada  $h \in L^p(A)$  y  $\varepsilon > 0$  tenemos que

$$\int_A |h|^p = \lim_n \int_{A_n} |h|^p < \infty,$$

de donde existirá  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si

$$n \geq n_0, \int_{A-A_n} |h|^p < \varepsilon/2.$$

Por otra parte, por ser  $S \chi_{A_n}$  denso en  $L^p(A_n)$ , existe  $f_n \in S$  tal que

$$\|f_n \chi_{A_n} - h \chi_{A_n}\|_p^p \leq \varepsilon/2$$

luego

$$\begin{aligned} \|f_n \chi_{A_n} - h\|_p^p &= \int_A |f_n \chi_{A_n} - h|^p d\mu = \\ &= \int_{A \setminus A_n} |f_n \chi_{A_n} - h|^p d\mu + \int_{A_n} |f_n \chi_{A_n} - h|^p d\mu = \\ &= \int_{A \setminus A_n} |h|^p d\mu + \int_A |f_n \chi_{A_n} - h \chi_{A_n}|^p d\mu \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Además  $f_n \chi_{A_n} \in S$ , pues  $f_n \in S$  que es  $\mathcal{L}^\infty$ -invariante y subespacio vectorial; por lo tanto  $S$  es denso en  $L^p(A)$ . Nótese que si  $\text{sop } S = A$ , entonces  $\text{sop } \overline{S} = A$  por lo que  $\overline{S} = L^p(A)$ .

El segundo lema es un resultado conocido (véase [1], pág. 53).

LEMA 2.—Sea  $\mathcal{D}$  una familia de partes de  $X$ , cerrada para la formación de intersecciones finitas, y sea  $\mathcal{A}$  otra familia de parte de  $X$ , que verifica:

- a)  $X \in \mathcal{A}$ .  
 b)  $A, B \in \mathcal{A}$  y  $B \subseteq A \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$ .  
 c)  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $A_n \downarrow A \implies A \in \mathcal{A}$ .  
 Entonces si  $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$  se tiene  $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{A}$ .

## 4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

La realizaremos en tres etapas.

1.º) Sea

$$\mathcal{D}_0 = \bigcup_{\varphi \in H} \varphi^{-1}(\mathcal{B}) = \{\varphi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}, \varphi \in H\}.$$

Si  $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{D}_0$  y  $f \in S$ , veamos que

$$f \chi_{E_1 E_2 \dots E_n} \in S.$$

Por simplificar, lo demostraremos para dos conjuntos.

Como  $H \subset \mathcal{L}^\infty$ , puede suponerse que el rango esencial de cada uno de sus elementos está contenido en un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ . Así, consideremos

$$E = \varphi^{-1}(B) \quad \text{y} \quad F = \Psi^{-1}(C)$$

donde

$$(\varphi, \Psi) \in H, \varphi: X \rightarrow [a, b] \quad \text{y} \quad \Psi: X \rightarrow [c, d]$$

con  $B$  boreliano contenido en  $[a, b]$ ,  $C$  boreliano contenido en  $[c, d]$ . Llamemos

$$(\varphi, \Psi) = \xi: X \rightarrow [a, b] \times [c, d]$$

Tenemos

$$\xi^{-1}(B \times C) = \varphi^{-1}(B) \cap \Psi^{-1}(C),$$

luego  $E \cap F = \xi^{-1}(B \times C)$ , por lo que  $\chi_{E \cap F} = \chi_{B \times C} \circ \xi$ .

Sea  $\alpha$  la medida imagen por  $\xi$  de la medida de densidad  $\nu$ , dada por  $d\nu = |f|^p$ , es decir,

$$\alpha(\cdot) = \int_{\xi^{-1}(\cdot)} |f|^p d\mu.$$

Como  $|f|^p d\mu$  es una medida positiva finita, la medida imagen  $\alpha$  será una medida de Borel finita y positiva sobre  $[a, b] \times [c, d]$ .

Dada  $\gamma_{B \times C} \in L^p([a, b] \times [c, d], \alpha)$ , como consecuencia del teorema de Lusin y del teorema de Stone-Weierstrass, es sencillo ver que existe una sucesión de polinomios reales en dos variables,  $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ , uniformemente acotados en  $[a, b] \times [c, d]$  y tal que  $P_n \rightarrow \gamma_{B \times C}$  ( $\alpha$  - a. e.). En consecuencia

$$P_n \circ \xi \rightarrow \gamma_{B \times C} \circ \xi \quad (\nu - a. e.) \quad \text{y} \quad |P_n \circ \xi - \gamma_{B \times C} \circ \xi|^p \rightarrow 0 \quad (\nu - a. e.)$$

Como, por otra parte,

$$|P_n \circ \xi - \gamma_{B \times C} \circ \xi|^p \leq (k+1)^p$$

(donde  $k$  es la constante que acota uniformemente a los polinomios), por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se tiene que  $P_n \circ \xi \rightarrow \gamma_{B \times C} \circ \xi$  en  $L^p(\nu)$  y, teniendo en cuenta la definición de  $\nu$ ,  $(P_n \circ \xi) f \rightarrow (\gamma_{B \times C} \circ \xi) f$  en  $L^p(\mu)$ .

Ahora si

$$P_n(x, y) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x^i y^j, \quad P_n \circ \xi = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \varphi^i \Psi^j$$

y por ser  $S$  subespacio  $H$ -invariante tenemos que  $(P_n \circ \xi) f \in S$ , luego  $(\gamma_{B \times C} \circ \xi) f \in \bar{S}$ , es decir  $f \gamma_{B \times C} \in \bar{S}$ .

2.º) Fijada  $f \in S$ , sean  $\mathcal{D}$  la familia de las intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{D}_0$  y

$$\mathcal{F} = \{E \in \mathcal{A} \mid f \gamma_E \in \bar{S}\}.$$

Como la familia  $\mathcal{F}$  verifica los apartados a), b) y c) del lema 2 (simple comprobación), por 1.º),  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ , luego aplicando el lema 2,  $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{F}$ . Ahora bien,  $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ , luego  $\sigma(H) \subset \mathcal{F}$ , por lo que  $f \gamma_A \in S$  para todo  $A \in \sigma(H)$ .

3.º) Por último, veremos que  $\bar{S}$  es  $\mathcal{L}^\infty$ -invariante, con lo que aplicando el lema 1, habremos concluido el teorema.

Dadas  $f \in S$  y  $\varphi \in \mathcal{L}^\infty$ , existe una sucesión de funciones simples  $\sigma(H)$ -medibles,  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ , tal que  $s_n \rightarrow \varphi$  [unif.] a. e., por lo que  $s_n \rightarrow \varphi$  en  $L^p(\nu)$  y  $s_n f \rightarrow \varphi f$  en  $L^p(\mu)$ . Como  $\bar{S}$  es subespacio vectorial se tiene por 2.º)  $s_n f \in \bar{S}$ , luego  $\varphi f \in S$ . Por continuidad, lo anterior se extiende a todo  $f \in \bar{S}$ .

## 5. ALGUNAS VARIANTES Y EJEMPLOS

OBSERVACIÓN 1.—La hipótesis « $\sigma(H)$  equivalente a  $\mathcal{A}$ » del teorema no es superflua. En efecto, si  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra,  $\sigma$ -finita (respecto  $\mu$ ), no equivalente a  $\mathcal{A}$ , llamando  $S = L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$ , es fácil ver que  $S$  es  $H$ -invariante, con  $H = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{F}, \mu)$ ,  $\text{sop } S = X$  y sin embargo  $L^p(X, \mathcal{F}, \mu)$  está contenido estrictamente en  $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

OBSERVACIÓN 2.—Si en el teorema 1 consideramos el espacio  $L^p_{\mathbb{C}}$ , sin añadir más hipótesis, no es cierto, pues basta tomar el espacio  $L^p(T)$ , siendo  $T$  el toro unidimensional, y  $S = \{\text{polinomios analíticos en } T\}$ ; es evidente que  $S$  es subespacio de  $L^p(T)$ ,  $H$ -invariante para  $H = S$  que a su vez cumple  $\sigma(H) = \{\text{borelianos de } T\}$  y  $\text{sop } S = T$ . Sin embargo  $S = \Pi^{\mathbb{C}}$  está estrictamente contenido en  $L^p_{\mathbb{C}}$ .

TEOREMA 2.—Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finito,  $H$  un subconjunto de  $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}$  y  $S$  un subespacio  $H$ -invariante de  $L^p_{\mathbb{C}}$ , con  $0 < p < \infty$ . Si  $\text{sop } S = A$ ,  $\sigma(H)$  es equivalente a  $\mathcal{A}$  y  $H$  es autoconjugado, entonces  $S = L^p_{\mathbb{C}}(A)$ .

DEMOSTRACIÓN.—La única diferencia, de la demostración del teorema 1 (caso real), aparece en la primera etapa. Al aplicar el teorema de Stone-Weierstrass y el teorema de Lusin, utilizando la misma notación y teniendo en cuenta que ahora el rango esencial de las funciones de  $H$  son bolas cerradas en  $\mathbb{C}$ , tendremos que dada  $\gamma_{B \times \mathbb{C}}$ , existe una sucesión de polinomios

$$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} (P_n(z, \bar{z}, w, \bar{w})) = \sum_{1 \leq j, k, h, l \leq n} c_{ikhj} z^j \bar{z}^k w^h \bar{w}^l$$

tal que  $P_n \rightarrow \gamma_{B \times \mathbb{C}}$  a. e.

Ahora,

$$P_n \circ \xi = \sum c_{ikhj} \varphi^j \bar{\varphi}^k \Psi^h \bar{\Psi}^l \quad \text{y} \quad (P_n \circ \xi) f \in S$$

por ser  $S$   $H$ -invariante con  $H$  autoconjugada. De forma análoga al teorema 1 se acaba la demostración.

OBSERVACIÓN 3.—La condición  $\sigma(H)$  equivalente a  $\mathcal{A}$  ( $\sigma(H) \sim \mathcal{A}$ )

puede ser a veces difícil de comprobar. A continuación damos una condición que es suficiente para que se cumpla la anterior.

«Se dice que  $H \subset \mathcal{L}_c^\infty$  es una *familia total* si separa puntos de  $L_c^1$  (i. e., si  $H$  engendra un subespacio \*-débilmente denso en  $\mathcal{L}_c^\infty$ )».

Veamos que si  $H \subset \mathcal{L}_c^\infty$  es total y la  $\sigma$ -álgebra  $\sigma(H)$  es  $\sigma$ -finita (respecto  $\mu$ ), entonces  $\sigma(H) \sim \mathcal{A}$ . En efecto, si  $\sigma(H)$  no fuera equivalente a  $\mathcal{A}$ , estaría contenida estrictamente en  $\mathcal{A}$ ; considerando el subespacio  $S = L^2(X, \sigma(H), \mu)$ , que también estaría estrictamente contenido en  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ , tendríamos que, dada una función  $g$  no nula, ortogonal a  $S$ , como el  $\text{sop } S = X$ , existiría alguna función  $f$  de  $S$  tal que  $fg = 0$ .

Además  $\int_{\bar{x}} f \varphi \bar{g} d\mu = 0$  para toda  $\varphi \in H$ , pues el subespacio  $S$  es  $H$ -invariante, y, como  $f \bar{g} \in L_c^1$ , entonces  $H$  no sería total.

EJEMPLOS.—Para los ejemplos siguientes entendemos que un conjunto medible  $M \subseteq X$  es *localmente nulo* cuando no posee ningún subconjunto de medida finita, es decir  $\mu(M \cap E) = 0$ , para todo  $E$  tal que  $0 < \mu(E) < \infty$ .

1) Sean  $X$  y  $\mu$  cualesquiera. Si  $f \in L_c^1$  y  $f^{-1}(0)$  es localmente nulo, toda función de  $L_c^1$  puede aproximarse en  $L^p$ -norma por combinaciones

lineales de la forma  $\sum_{k=1}^n c_k f_{E_k}$  con  $c_k \in \mathbb{C}$  y  $0 < \mu(E_k) < \infty$ .

2) Sea  $X$  un espacio localmente compacto (Hausdorff) y  $\mu$  una medida regular. Si  $f \in L_c^1$  con  $p \leq r < \infty$  y  $f^{-1}(0)$  es localmente nulo, el subespacio  $\{f \varphi \mid \varphi \text{ es continua de soporte compacto}\}$  es denso en  $L_c^r$ .

3) Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida cualquiera. Si  $f \in L^p$ ,  $\varphi$  es continua, estrictamente monótona de  $\mathcal{L}^\infty$ ,  $f^{-1}(0)$  y  $\varphi^{-1}(0)$  son localmente nulos, y  $\varphi$  engendra una  $\sigma$ -álgebra equivalente a  $\mathcal{A}$ , entonces el subespacio

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k f \varphi^k \mid a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en  $L^p$ .

4) Sea  $G$  un grupo abeliano, localmente compacto y  $\sigma$ -compacto y  $\mu$  su medida de Haar. Todo subespacio lineal no nulo  $S \subset L_c^1$  invariante por traslaciones e invariante por: a) restricción a conjuntos compactos, o, b) multiplicación por funciones continuas de soporte com-

pacto, o, c) multiplicación por caracteres continuos, es denso en  $L^p$ . Este ejemplo, con la condición c), generaliza el teorema de aproximación obtenido en [5] únicamente para  $L^1_c$ .

5) Todo subespacio lineal no nulo de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , invariante por traslaciones y tal que el soporte de sus transformadas de Fourier sea  $\mathbb{R}^n$ , es denso en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Esto es una variante para  $L^2(\mathbb{R}^n)$  del teorema tauberiano de Wiener (véase [4]).

6) Todo subespacio lineal no nulo en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , invariante por convolución respecto una familia de medidas, cuyas transformadas de Fourier engendran los borelianos de  $\mathbb{R}^n$ , es denso en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . El ejemplo anterior es un caso particular de éste cuando se toma la familia de las  $\delta$  de Dirac en todos los puntos de  $\mathbb{R}^n$ .

OBSERVACIÓN 4.—Los teoremas 1 y 2, en el caso de ser  $\mu$  finita son válidos para espacios de Orlicz,  $\Phi(L)$ , siendo  $\Phi$  una función no negativa definida en  $[0, \infty]$ , creciente, continua, convexa y que satisface la condición  $\Delta_2$  (véase [2]).

#### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HUNT, G. A.: *Martingales et processus de Markov*. Dunod (1966).
- [2] KUFNER, A. et al.: *Function Spaces*. Noordhoff Int. Publ. (1977).
- [3] NACHBIN, L.: *Elements of approximation theory*. Van Nostrand (1967).
- [4] REITER, H.: *Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups*. Oxford Math. Monographs. (1968).
- [5] RUBIO, J. L.: *Un criterio de aproximación en  $L^1(R)$* . «Actas 1.<sup>as</sup> Jornadas Mat. Luso-Españolas» (1973), 197-202.
- [6] ZAAANEN, A.: *Integration*. North-Holland Pu. Co. (1967).

Departamento de Teoría de Funciones  
Facultad de Ciencias  
Zaragoza