GENERALIZACION DE UN TEOREMA DE J. A. GREEN A ALGEBRAS UNIVERSALES

por

FRANCISCO POYATOS

Aquí trataremos de propiedades de W-álgebras o álgebras universales. Se dice que A es una W-álgebra si es un conjunto no vacío dotado de operaciones; W designa el conjunto de todas las operaciones definidas sobre A. Denotamos por W (n) el subconjunto de W formado por todas las operaciones n-arias (con n argumentos) definidas sobre A. Todas las operaciones sobre A tienen un número finito de argumentos.

Las únicas restricciones que imponemos en este trabajo son:

$$W \neq \varnothing \quad \text{y} \quad W(0) = \varnothing.$$

Extendemos en este artículo a álgebras universales un teorema que J. A. Green estableció para semigrupos en 1951, en «On the structure of semigroups», Annals of Math., 54 (1951) 163-172.

Como es bien sabido, D es W-subálgebra de la W-álgebra A si y sólo si se verifica:

$$\forall\, n \in N, \quad \forall\, w \in W(n),$$
$$\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in D\ [w(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D].$$

Un modo abreviado de expresar lo anterior es éste:

$$\forall\, n \in N, \quad \forall\, w \in W(n), \quad w(D, D, \overset{n}{\smile}\!\!\ldots, D) \subset D.$$

Definimos aquí, en este artículo, tronco. Decimos que T es un W-tronco de la W-álgebra A si y sólo si $T \subset A$ cumple

$$\forall n \in N, \quad \forall w \in W(n), \quad \forall i \in [1, n],$$
$$\forall t \in T, \quad \forall a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$$
$$w(a_1, \ldots, a_{i-1}, \overset{i}{t}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in T. \tag{1}$$

Obsérvese que, fijados de antemano $n \in N$, $w \in W(n)$, en (1) se imponen n condiciones distintas según que $i = 1, 2, \ldots, n$.

Una manera abreviada de expresar las n condiciones de (1) es ésta:

$$\forall n \in N, \quad \forall w \in W(n), \quad \forall i \in [1, n]$$
$$w(A, \ldots, A, \overset{i}{T}, A, \ldots, A) \subset T. \tag{2}$$

Evidentemente, todo W-tronco de A es una W-subálgebra de A.

Se dice que $R \subset A \times A$ es una congruencia en la W-álgebra A si y sólo si R es una relación de equivalencia en A compatible con toda operación de W, es decir, que satisface

$$\forall n \in N, \quad \forall w \in W(n), \quad \forall a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in A$$
$$[a_1 \, R \, b_1, \ldots, a_n \, R \, b_n \Longrightarrow w(a_1, \ldots, a_n) \, R \, w(b_1, \ldots, b_n)].$$

Decimos que $b \in A$ es elemento permitido de A si y sólo si $\{b\}$ es tronco de A, esto es, b satisface

$$\forall n \in N, \quad \forall w \in W(n), \quad \forall a_1, \ldots, a_n \in A, \quad \forall i \in [1, n]$$
$$w(a_1, \ldots, a_{i-1}, \overset{i}{\breve{b}}, a_{i+1}, \ldots, a_n) = b.$$

En el supuesto

$$\bigcup_{n \geq 2} W(n) \neq \varnothing,$$

si existe elemento permitido, éste es único. Convenimos en que el conjunto vacío $\varnothing$ es un w-tronco de A, que llamamos trivial. El lector comprobará la

PROPOSICIÓN 1.—*El conjunto de los* w-*troncos de la* w-*álgebra* A, *junto con la relación de inclusión, forma un subretículo del retículo de las partes de* A.

Es decir, la intersección y la reunión conjuntistas de una familia cualquiera de w-*troncos es un* w-*tronco.*

La intersección de todos los troncos no triviales de A puede ser $\emptyset$ o no. En este último caso, denominamos a esa intersección el *tronco nuclear* de A. En el supuesto de que A tenga elemento permitido b, entonces dicho tronco nuclear es $\{b\}$.

PROPOSICIÓN 2.—*Sea T un tronco no trivial de A; la relación binaria S_T sobre A, construida de este modo*

$$x, y \in A, \ x\, S_T\, y \iff (x = y) \vee (x, y \in T)$$

(donde $\vee$ designa a la disyunción lógica) es una congruencia en A, que decimos está engendrada por el tronco T y que llamamos de Rees, por analogía a las congruencias que Rees descubrió en semigrupos. (Ver Rees, D.: «On semi-groups», Proc. Cambridge Phil. Soc.», vol. 36, 1940, 387-400.)

Que S_T es relación de equivalencia en A se comprueba inmediatamente. Veamos que es compatible con todo $w \in W(n)$, $\forall n \in N$. Supongamos $a_i\, S_T\, b_i$, $\forall i \in [1, n]$ y diferenciemos dos casos:

1.°) $\forall i \in [1, n]$, $a_i = b_i$.

Entonces $w(a_1, \ldots, a_n) = w(b_1, \ldots, b_n)$; lo que implica,

$$w(a_1, \ldots, a_n)\, S_T\, w(b_1, \ldots, b_n).$$

2.°) $\exists j \in [1, n]$, $a_j \neq b_j$.

Entonces $a_j, b_j \in T$; por tanto

$$w(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n) \in T, \quad w(b_1, \ldots, b_j, \ldots, b_n) \in T,$$

es decir

$$w(a_1, \ldots, a_n)\, S_T\, w(b_1, \ldots, b_n).$$

Como éstos son los dos únicos casos posibles, hemos demostrado que S_T es una congruencia.

Por el primer teorema de isomorfía para álgebras universales, respecto congruencias (ver P. M. Cohn, «Universal Algebra», Harper), sabemos que A/S_T es una W-álgebra y que la aplicación

$$f: A \longrightarrow A/S_T,$$
$$f: a \longrightarrow \bar{a},$$

(siendo $\bar{a}$ la clase de A que contiene a «a» módulo S_T), es un epimorfismo de W-álgebras. Simplificamos la notación de este modo:

$$A/T = A/S_T = (A - T) \cup \{b\}.$$

designando «—» complemento de T en A; y siendo «b» elemento permitido de A/T. Usamos esta nomenclatura porque todos los cocientes que trataremos en este artículo son cocientes respecto de troncos, que denominamos cocientes de Rees.

A continuación establecemos el 2.º y 3.^{er} teoremas de isomorfía de W-álgebras con respecto a congruencias de Rees engendradas por W-troncos.

Proposición 3 (2.º teorema de isomorfía).—*Sea K un W-tronco de la W-álgebra A y sea P una W-subálgebra de A, entonces:*

i) *$K \cup P$ $(= K + P)$ es subálgebra de A.*

ii) *K es tronco de $K \cup P$ y $K \cap P$ es tronco de P.*

iii) *Se verifica*

$$\frac{K \cup P}{K} \approx \frac{P}{K \cap P}$$

Demostración.—i) Sean $l_1, l_2, \ldots, l_n \in K \cup P$, entonces se ha de presentar necesariamente uno de estos dos casos (o los dos):

1) $l_1, l_2, \ldots, l_n \in P$, subálgebra, por tanto

$$w(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in P \subset P \cup K.$$

2) $\exists\, j \in |1, n|$ de modo que $l_j \in K$, tronco; por tanto

$$w(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in K \subset P \cup K.$$

En consecuencia $P \cup K$ es W-subálgebra de A y como es la mínima que contiene a las subálgebras K y P, es entonces $K \cup P = K + P$.

ii) K, tronco de A, es también tronco de cualquier subálgebra de A que contenga a K, en particular de $K \cup P$. Además como resulta evidente, se cumple

$$\forall\, n \in N, \quad \forall\, w \in W(n), \quad \forall\, i \in [1, n]$$
$$w(P, \ldots, P, K \cap P, P, \ldots, P) \subset K \cap P.$$

Esto es, $K \cap P$ es tronco de P.

iii) Inmediato, c. q. d.

PROPOSICIÓN 4 (3.^er^ teorema de isomorfía).—*Sea K un W-tronco de la álgebra A; sea* h: $A \longrightarrow A/K$ *el epimorfismo canónico o natural. Entonces* h *induce una biyección que preserva la inclusión y que denominamos también* h:

$$\mathrm{h}: P \longrightarrow \mathrm{h}\, P = P/K$$

del retículo dos los W-troncos de A que contienen a K sobre el retículo de los troncos no triviales de A/K.

Además, $(A/K) \,/\, (P/K) \approx A/P$.

DEMOSTRACIÓN.—La prueba detallada puede efectuarse en los siguentes pasos i), ii), iii), iv), v) y vi).

i) *Si P es tronco de A que contiene a K, entonces* $\mathrm{h}\,(P) = P/K$ *es tronco no trivial de* $\mathrm{h}\,(A) = A/K$.

$\forall\, n \in \mathrm{N}$, $\forall\, w \in \mathrm{W}\,(n)$, $\forall\, i \in [1, n]$ ha de cumplirse

$$w\,(\mathrm{A/K}, \ldots, \mathrm{A/K}, \overset{i}{\mathrm{P/K}}, \mathrm{A/K}, \ldots, \mathrm{A/K}) \subset \mathrm{P/K}.$$

Mostrémoslo. Sea t elemento del primer conjunto; tenemos

$$t = w\,(h\, a_1, \ldots, h\, a_{i-1}, h\, p, h\, a_{i+1}, \ldots, h\, a_n) = \\ = h\, w\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, p, a_{i+1}, \ldots, a_n);$$

siendo $p \in \mathrm{P}$, tronco de A. Por ello se verifica

$$w\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, p, a_{i+1}, \ldots, a_n) = f \in \mathrm{P}.$$

Por tanto,

$$t = h\, f \in h\, \mathrm{P} = \mathrm{P/K}, \quad \text{c. q. d.}$$

ii) *Si Q es un W-tronco no trivial de A/K, entonces* $\mathrm{h}^{-1}\, Q$ *es un tronco de A que contiene a K.*

Tenemos que probar que

$$\forall\, n \in \mathrm{N}, \quad \forall\, w \in \mathrm{W}\,(n), \quad \forall\, i \in [1, n], \quad \forall\, t \in h^{-1}\,\mathrm{Q}, \\ \forall\, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \mathrm{A} \\ s = w\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, \underset{\smile}{\overset{i}{t}}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in h^{-1}\,\mathrm{Q}.$$

Como sabemos que $h\,t \in \underset{\sim}{Q}$, tronco de A/K, entonces

$$\begin{aligned} h\,s &= h\,w\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \\ &= w\,(h\,a_1, \ldots, h\,a_{i-1}, h\,t, h\,a_{i+1}, \ldots, h\,a_n) \in \underset{\sim}{Q}\,; \end{aligned}$$

por tanto,

$$s \in h^{-1}\,\underset{\sim}{Q}, \quad \text{c. q. d.}$$

iii) h *induce una aplicación sobreyectiva del conjunto de los W-troncos de A que contienen a K sobre el conjunto de los troncos no triviales (no vacíos) de A/K.*

En efecto, sea $\underset{\sim}{Q}$ un tronco no trivial arbitrario de A/K; por lo demostrado en ii): $P = h^{-1}\,\underset{\sim}{Q}$ es un W-tronco de A que contiene a K tal que

$$h\,P = h\,h^{-1}\,\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}.$$

iv) h *induce una aplicación inyectiva entre los mismos conjuntos señalados en iii).*

Efectivamente, si M, N son dos troncos de A que contienen a K, tales que $h\,M = h\,N$, entonces $M - K = N - K$, por lo que $M = N$.

v) *Que* h *preserva la inclusión*, es decir, que si $M \subset N$ entonces $h\,(M) \subset h\,(N)$, se demuestra de manera análoga a iv)

vi) $$(A/K)\,/\,(P/K) = (A/K - P/K) \cup \{b\} = (A - P) \cup \{b\}\,;$$
$$A/P = (A - P) \cup \{b\}.$$

De este modo acabamos la prueba completa de la proposición 4, c. q. d.

Definiciones.—Dados K y N, troncos de la W-álgebra A, se dice que K es *maximal* en N si y sólo si $K \underset{\neq}{\subset} N$ y no hay ningún W-tronco de A comprendido estrictamente entre ambos.

$J\,(x)$ será por definición, el W-tronco *engendrado* por $x \in A$; esto es, el mínimo tronco de A que contiene a x como elemento; o, lo que es lo mismo, la intersección de todos los W-troncos de A a los que pertenece el elemento x.

Establecemos la relación de equivalencia en A:

$$x\,J\,y \Longleftrightarrow J\,(x) = J\,(y).$$

Sea $p \in A$; definimos

$$J_p = \{x \in A\,/\,J\,(x) = J\,(p)\}\,;$$

es decir, la clase de A módulo J a la que pertenece p. Evidentemente, para todo m de A se cumple $J_m \subset J(m)$. Por tanto, se puede definir el conjunto

$$I(m) = J(m) - J_m.$$

PROPOSICIÓN 5.—i) *Se verifica:*

$$I(m) = \{x \in A \,/\, J(x) \underset{\neq}{\subset} J(m)\}.$$

ii) $\forall\, m \in A$, *$I(m)$ es W-tronco de A, maximal en $J(m)$.*

DEMOSTRACIÓN i) ($\Longrightarrow$).—Si $p \in I(m)$, entonces $p \in J(m)$, $p \notin J_m$ (por la definición de $I(m)$). Esto implica $J(p) \underset{\neq}{\subset} J(m)$ (contenido estrictamente), c. q. d.

i) ($\Longleftarrow$). Sea $p \in A$, $p \in J(p) \underset{\neq}{\subset} J(m)$. De aquí, se deduce: $p \in J(m)$, $p \notin J_m$; es decir, $p \in I(m)$, c. q. d.

DEMOSTRACIÓN ii).—Probemos primero que $I(m)$ es W-tronco de A. Sea $t \in I(m)$ y

$$\forall\, n \in N, \quad \forall\, w \in W(n), \quad \forall\, i \in [1, n],$$
$$\forall\, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$$

tomamos

$$w(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) = z.$$

Como $t \in J(m)$ que es tronco, también $z \in J(m)$.

Supongamos por un momento que $z \in J_m$; entonces se verificaría $t \in J(m) = J(z)$. Como $t \in J(t)$, tronco, también

$$z = w(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in J(t).$$

Tendríamos, por consiguiente, $t \in J(z)$, $z \in J(t)$, que, con lo anterior, da:

$$J(z) = J(t) = J(m).$$

Esto es una contradicción, pues $J(t) \underset{\neq}{\subset} J(m)$ porque $t \in I(m)$ y por la parte i) de esta proposición 5. Por tanto

$$z \in J(m), \quad z \notin J_m,$$

es decir

$$z = w\,(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathrm{I}\,(m),$$

y de este modo probamos que I (m) es tronco de A, c. q. d.

Que I (m) es maximal en J (m) resulta de modo casi inmediato. Sea H W-tronco de A tal que

$$\mathrm{I}\,(m) \underset{\neq}{\subset} \mathrm{H} \subset \mathrm{J}\,(m).$$

Sea $u \in \mathrm{H} - \mathrm{I}\,(m)$, entonces $u \in \mathrm{J}\,(m) - \mathrm{I}\,(m) = \mathrm{J}_m$; de donde se deduce que $\mathrm{J}\,(u) \subset \mathrm{H}$, $\mathrm{J}\,(u) = \mathrm{J}\,(m)$, esto es, que

$$\mathrm{J}\,(m) \subset \mathrm{H}, \quad \text{es decir,} \quad \mathrm{H} = \mathrm{J}\,(m), \quad \text{c. q. d.}$$

DEFINICIONES.—Llamamos cociente principal de A, W-álgebra, a todo cociente de Rees (y, por tanto, W-álgebra), de la forma

$$\mathrm{J}\,(x) \,/\, \mathrm{J}\,(x), \quad x \in \mathrm{A}.$$

Denominamos *serie principal* a toda cadena estrictamente decreciente y finita de troncos de A:

$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{A} \supset \mathrm{S}_2 \supset \mathrm{S}_3 \supset \ldots \supset \mathrm{S}_{r-1} \supset \mathrm{S}_r = \varnothing, \tag{3}$$

que comienza en A, termina en $\varnothing$ y tal que S_i es maximal en S_{i-1}, $i \in |\, 2, r \,|$. Decimos que A *admite* una serie principal si y sólo si existe una sucesión decreciente que cumple lo expuesto en (3). Se llamarán cocientes de (3), a los cocientes de Rees:

$$\mathrm{S}_i/\mathrm{S}_{i+1}, \quad i \in [1, r - 1].$$

Dos series principales se dicen *isomorfas* si y sólo si se pueden poner los cocientes de una y los de la otra en correspondencia biunívoca (biyección) de manera que los cocientes correspondientes sean isomorfos.

TEOREMA 1 (generalizado de J. A. Green).—*Sea A, W-álgebra con $W \neq \varnothing$, $W\,(0) = \varnothing$. Si A admite una serie principal (3), entonces los cocientes de (3) son isomorfos (tomados en un cierto orden) a los cocientes principales:*

$$J\,(\mathrm{x}) \,/\, I\,(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in A.$$

En particular, dos series principales cualesquiera de A son isomorfas.

El penúltimo término de cualquier serie principal es el tronco nuclear de A.

DEMOSTRACIÓN.—Análoga a la de Clifford-Preston para semigrupos («Algebraic theory of semigroups», parte I, pág. 73). La desarrollamos aquí para completar la exposición.

Consideremos un cociente S_i/S_{i+1}, $i \in | 1, r-1 |$ de la serie principal (3). Sea $m \in S_i - S_{i+1}$, entonces $J(m) \cup S_{i+1}$ es un W-tronco de A (proposición 1) que por contener a m y a S_{i+1}, contiene estrictamente a S_{i+1}. Además está contenido en S_i.

Por ser S_{i+1} maximal en S_i, se tiene

$$J(m) \cup S_{i+1} = S_i, \quad \forall\, m \in S_i - S_{i+1}. \tag{4}$$

Mostremos ahora:

$$I(m) \subset S_{i+1}. \tag{5}$$

Sea $p \in I(m)$; si estuviese $p \in S_i - S_{i+1}$, entonces razonando igual que antes, llegaríamos a

$$J(p) \cup S_{i+1} = S_i; \tag{6}$$

por tanto $m \in J(p)$, por lo que $J(m) \subset J(p)$; pero $p \in I(m) \subset J(m)$, con lo que obtendríamos $J(p) = J(m)$; es decir $p \notin J(m) - J_m = I(m)$, contradicción. Así pues, es verdad (5).

Comprobemos a continuación que

$$I(m) = J(m) \cap S_{i+1}, \quad \forall\, m \in S_i - S_{i+1}. \tag{7}$$

Que $I(m) \subset J(m) \cap S_{i+1}$ resulta de (5) y de definiciones. Sea $c \in J(m) \cap S_{i+1}$, entonces $J(c) \subset J(m)$, $J(c) \subset S_{i+1}$; por tanto

$$J(c) \underset{\neq}{\subset} J(m).$$

Por la proposición 5 i), $c \in I(m)$, de donde se deduce la igualdad (7).

Apliquemos ahora la proposición 3:

$$\frac{S_{i+1} \cup J(m)}{S_{i+1}} \approx \frac{J(m)}{S_{i+1} \cap J(m)}, \quad \forall\, m \in S_i - S_{i+1}. \tag{8}$$

Sustituyendo en (8) las expresiones $S_{i+1} \cup J(m)$, $S_{i+1} \cap J(m)$, por sus iguales según (4) y (7), se obtiene

$$\frac{S_i}{S_{i+1}} \approx \frac{J(m)}{I(m)}, \quad \forall\, m \in S_i - S_{i+1}. \tag{9}$$

Sean A, B, C subconjuntos de D tales que $B \subset A$. $A - B$ designa el complemento de B en A. Si $C \cap (A - B) = \emptyset$, entonces

$$A - B = (A \cup C) - (B \cup C),$$

Como $S_{i+1} \cap J_m = \emptyset$, ya que si suponemos lo contrario llegamos a contradicción, podemos escribir, siendo $m \in S_i - S_{i+1}$

$$J_m = J(m) - I(m) = (J(m) \cup S_{i+1}) - (I(m) \cup S_{i+1}).$$

Gracias a las fórmulas (4) y (5), tenemos

$$J_m = (J(m) \cup S_{i+1}) - (I(m) \cup S_{i+1}) = S_i - S_{i+1}. \tag{10}$$

Toda cadena estrictamente decreciente de subconjuntos de A, que comienza en A y termina en $\emptyset$, como la (3), establece una clasificación de A, que llamamos partición de A derivada de la cadena estrictamente decreciente (3), como sigue:

$$\{S_1 - S_2, S_2 - S_3, \ldots, S_{r-2} - S_{r-1}, S_{r-1} - S_r\}.$$

Pues bien, la fórmula (10) nos indica que la clasificación derivada de la serie (3) coincide con la partición de A módulo la equivalencia J. Como esto ocurre con toda serie principal, resulta que si tuviéramos otra

$$T_1 = A \supset T_2 \supset \ldots \supset T_{l-1} \supset T_l = \emptyset$$

entonces $l = r$ y además $\forall\, m_i \in S_i - S_{i+1}$, $i \in | 1, r-1 |$

$$m_i \in J_{m_i} = S_i - S_{i+1} = T_j - T_{j+1} = T_{\pi(i)} - T_{\pi(i)+1};$$

donde se comprueba fácilmente que π es una permutación de los subíndices $\{1, 2, \ldots, r-1\}$. Repitiendo el razonamiento antes efectuado, llegamos a

$$T_{\pi(i)} / T_{\pi(i)+1} \approx J(m_i) / I(m_i) \approx S_i / S_{i+1}$$

para todo $i \in | 1, 2, \ldots, r-1 |$, c. q. d.

DEFINICIONES.—Sea A un W-álgebra, sean R, P dos W-troncos de A tales que P está contenido en R; denominamos *serie principal de A desde R hasta P* a toda cadena estrictamente decreciente y finita de troncos de A:

$$R = S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_{k-1} \supset S_k = P \tag{11}$$

que comienza en R y termina en P y tal que S_i es maximal en S_{i-1}, $i \in | 2, k |$. Esta es una definición generalizada de serie principal de A, la cual viene a ser una serie principal de A desde A hasta Ø.

Decimos que el par de troncos de R y P de A, tales que P está incluido en R, admite series principales si y sólo si existe, al menos, una serie como la (11) desde R hasta P.

Puede suceder muy bien, que una W-álgebra no admita series principales y sin embargo existan en ella troncos R, P que admitan series principales desde R hasta P. Los cocientes de (11) son

$$S_i / S_{i+1}, \quad i \in [1, k-1].$$

La definición de isomorfismo de series principales de A desde R hasta P es análoga a lo de isomorfismo de series principales.

TEOREMA 2 (generalización del teorema 1).—*Sea A un W-álgebra con* $W \neq \emptyset$, $w(0) = \emptyset$, *sean* $R \supset P$ *dos troncos de A tales que admiten series principales de A desde R hasta P, sea una tal (11). Entonces los cocientes de (11) son isomorfos (tomados en cierto orden) a los cocientes principales.*

$$J(x) / I(x), \quad x \in R - P.$$

En particular, dos series principales cualesquiera de A desde R hasta P son isomorfas.

DEMOSTRACIÓN.—La misma del teorema 1. Obsérvese que en dicha prueba no se han usado las hipótesis, $S_1 = A$, $S_r = \emptyset$: Ahora hay que tener en cuenta que

$$\{S_1 - S_2, S_2 - S_3, \dots, S_{k-1} - S_k\}$$

es una clasificación de R — P que coincide con la partición de R — P módulo J, c. q. d.

PARTICULARIZACIONES

Consideremos ahora tipos especiales de W-álgebras y variedades de éstas y digamos cómo son los troncos en esas álgebras y, por tanto, qué forma toman para ellos los teoremas 1 y 2, antes expuestos.

Si A constituye una W-álgebra monaria, esto es, tal que W consta sólo de operaciones monarias, $W = \{\lambda_i\}_{i \in I}$, entonces los W-troncos de A coinciden con las W-subálgebras de A.

Caso de que A forme una W-álgebra binaria, esto es, tal que en $W = \{w_i\}_{i \in I}$ figuren sólo operaciones binarias (en número finito o infinito), para que $T \subseteq A$ sea tronco es necesario y suficiente que se cumpla

$$w_i(T, A) \subset T, \quad w_i(A, T) \subset T, \quad \forall i \in I,$$

es decir, que T sea lo que podemos llamar un W-ideal o multiideal de A. Si A es grupoide, los troncos de A coinciden con sus ideales. En el semigrupo, grupoide asociativo, es donde se descubrió la teoría original, por primera vez, por J. A. Green. Denominamos anilloide a una W-álgebra tal que en W sólo figuran dos operaciones binarias. Al tronco de un anilloide le hemos llamado bi-ideal y nosotros hemos establecido el teorema 1 directamente para diversos tipos de semianillos, variedades que son de anilloides, en «Series principales y series de composición de semianillos», 'Rev. Mat. Hisp.-Amer.', 4.ª serie, tomo XXXVI, núm. 2, 3 (1976); «The Jordar-Hölder Theorem for semirings», 'Rev. Mat. Hisp.-Amer.', 4.ª serie, tomo XL, núm. 1, 2 (1980), 49-65.

Un grupoide A con una operación binaria $*$ y con una familia (finita o infinita) de operadores (monarios) $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, viene a ser una W-álgebra tal que $W(1) = \{\lambda_i\}_{i \in I}$, $W(2) = \{*\}$, $W(p) = \varnothing$ para $p = 0$, 3, 4, etc. T es tronco de A si y sólo si se verifica

$$T * A \subset T, \quad A * T \subset T, \quad \lambda_i(T) \subset T, \quad \forall i \in I,$$

es decir si y sólo si T forma lo que hemos llamado subconjunto permitido de A, W (1)-invariante. En «El teorema de Jordan-Hölder para A-semimódulos», 'Rev. Mat. Hisp.-Amer», 4.ª serie, tomo XXXII, núm. 6 (1972), 251-260; tomo XXXII, núm. 1-2 (1973), 36-48, núm. 3 (1973), 122-132, hemos demostrado directamente el teorema de J. A.

Green, entre otros, para L-semimódulos A, siendo L semianillo de operadores monarios sobre el semigrupo conmutativo A (y donde la ley externa $L \times A \longrightarrow A$ y la ley interna $A \times A \longrightarrow A$ están relacionadas entre sí por los mismos axiomas que las de los L-módulos).

Madrid, 12 de febrero de 1980.

Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas
C. S. I. C.
Serrano, 123, Madrid-6