CONVERGENCIAS EN $\mathcal{G}(\mathcal{H})$

por

M.ª CARMEN DE LAS OBRAS-L.

S U M M A R Y

Given a real separable Hilbert space $\mathcal{H}$, we denote with $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ the geometry of closed lineal subspaces of $\mathcal{H}$.

The weak and strong convergence of sequences of subspaces defined in (8) are characterized.

If $\{ E^{(n)} \mid n \in N \}$ is a strong or weak convergent sequence there exists a finite dimensional sequence with the same limit.

The strong convergence is interpreted in terms of nbd-finite family, so that a sequence $\{ E^{(n)} \mid n \in N \}$ is a nbd-finite family if and only if $E^{(n)} \longrightarrow 0$.

Consideremos el espacio de Hilbert separable real y designemos con $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ la geometría de los subespacios lineales cerrados. Este trabajo es una generalización en la línea de [2], considerando sucesiones de subespacios sin restricciones dimensionales.

Recordemos las definiciones de convergencia fuerte y débil de sucesiones de subespacios dadas por A. Plans en [8]:

$$E^{(n)} \longrightarrow E \ (\equiv) \begin{cases} \text{i)} \ \text{si} \ \ x_{h_n} \in E^{(h_n)} \wedge \{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\} \wedge \ x_{h_n} \longrightarrow x \Longrightarrow x \in E \\ \text{ii)} \ \forall\, x \in E, \ \exists\, x_n \in E^{(n)} \ni x_n \longrightarrow x \end{cases}$$

$$E^{(n)} \dashrightarrow E \ (\equiv) \begin{cases} \text{i)} \ \text{si} \ \ x_{h_n} \in E^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \rightharpoonup x \Longrightarrow x \in E \\ \text{ii)} \ \forall\, x \in E, \ \exists\, x_n \in E^{(n)} \ni x_n \rightharpoonup x. \end{cases}$$

Asimismo, diremos que $E^{(n)} \underset{e}{\rightharpoonup} E$, convergencia débil estricta si y sólo si

$$\nexists \{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}, \ x_{h_n} \in E^{(h_n)} \ni x_{h_n} \longrightarrow x \wedge \ x \neq 0.$$

TEOREMA 1.—$E^{(n)} \rightharpoonup E$ si y sólo si:

1) Para todo $E_p \subset E$, existe

$$E_p^{(n)} \subset E^{(n)} \ni E_p^{(n)} \rightharpoonup E_p.$$

2) $\alpha(E^{(n)}, r) \longrightarrow \pi/2, \ \forall\, r \subset E^{\perp}.$

TEOREMA 2.—$E^{(n)} \longrightarrow E$ si y sólo si:

1) Para todo $E_p \subset E$, existe

$$E_p^{(n)} \subset E^{(n)} \ni E_p^{(n)} \longrightarrow E_p.$$

2) $\overline{\text{Lim}}\ \alpha(E^{(n)}, r) > \theta > 0, \ \forall\, r \subset E^{\perp}.$

Si $E^{(n)} \longrightarrow E$ y no existe

$$\{x_{h_n}\} \ni x_{h_n} \in E^{(h_n)} \quad \text{y} \quad x_{h_n} \underset{e}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow E^{(n)} \rightharpoonup E.$$

TEOREMA 3. — Sea $E^{(n)} \longrightarrow E$ dim $E = \infty$. Entonces existe una sucesión

$$\{E_{p_n}^{(n)}\}, \quad E_{p_n}^{(n)} \subset E^{(n)},$$

de dimensión finita creciente tal que $E_{p_n}^{(n)} \longrightarrow E$.

DEMOSTRACIÓN.—Tomemos en E una base ortonormal $\{e_i \mid i \in N\}$.

Existen sucesiones

$$\{e_i^{(n)} \mid i \in N\}, \ e^{(n)} \in E^{(n)}, \ e_i^{(n)} \longrightarrow e_i \ \forall\, i,$$

tales que fijado i, a partir de un cierto ν_i los vectores $e_1^{(n)}, \ldots, e_i^{(n)}$ son linealmente independientes. Sea

$$E_i^{(n)} = [e_1^{(n)}, \ldots, e_i^{(n)}]\ n \geqslant \nu_i \Longrightarrow E_i^{(n)} \longrightarrow E_i,\ E_i = [e_1, \ldots, e_i].$$

Podemos suponer

$$\nu_1 = 1,\ \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_i < \ldots$$

y formemos la sucesión de subespacios de dimensión finita creciente:

$$
\begin{array}{ll}
E^{(1)} & \subset E^{(1)} \\
\vdots & \vdots \\
E_1^{(\nu_2-1)} & \subset E^{(\nu_2-1)} \\
E_2^{(\nu_2)} & \subset E^{(\nu_2)} \\
\vdots & \vdots \\
E_i^{(\nu_i)} & \subset E^{(\nu_i)} \\
\vdots & \vdots \\
E_i^{(\nu_{i+1}-1)} & \subset E_{i+1}^{(\nu-1)} \\
E_{+1}^{(\nu_{i+1})} & \subset E^{(\nu_{i+1})}
\end{array}
$$

La sucesión

$$\{E_{p_n}^{(n)} \mid n \in N\}, \; E_{p_n}^{(n)} \subset E^{(n)}$$

así construida converge fuertemente a E:

i)

$$x_{h_n} \in E_{p_{h_n}}^{(h_n)} \subset E^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \rightharpoonup x \Longrightarrow x \in E.$$

ii) Sea $x \in E$, $x \neq 0$. Pueden suceder dos casos:

b$_1$)

$$x \in \bigcup_i E_i \Longrightarrow \exists\, j \in N \ni x \in E_j$$

y

$$\exists\, x_n \in E_j^{(n)} \ni x_n \longrightarrow x.$$

b$_2$)

$$x \notin \bigcup_i E_i \Longrightarrow x \in \overline{\bigcup_i E_i}.$$

Entonces existe una sucesión

$$\{x_i \mid i \in N\}, \quad x_i \in E_i \ni x_i \longrightarrow x.$$

Fijado i, $\forall\, i \in N$ existe

$$\{x_i^{(n)}\}, \quad x_i^{(n)} \in E \quad ,$$

tal que $x_i^{(n)} \longrightarrow x_i$.

Consideremos una sucesión

$$\{\varepsilon_i \mid i \in N\} \quad \varepsilon_i > \varepsilon_{i+1},\ \varepsilon_i \longrightarrow 0$$

y las bolas abiertas de centro x y radio ε_i.

Tomemos la primera $B(x, \varepsilon_1)$. Para todo

$$n > \nu_1,\ x_n \in B(x_1, \varepsilon_1).$$

Sea

$$i_1 = \nu_1 + 1 \Longrightarrow x_{i_1} \in B(x, \varepsilon_1)$$

y

$$\exists\ x_{\nu_1}^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_{i_1} \Longrightarrow \forall\ n \geqslant \mu_1,\ x_{i_1}^{(n)} \in B(x, \varepsilon_1) \wedge x_{i_1}^{(n)} \in E_{i_1}^{(n)}.$$

Pasemos a $B(x, \varepsilon_2)$ y sea $x_{i_2} \in B(x, \varepsilon_2)$ y $i_1 < i_2$,

$$x_{i_2}^{(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_{i_2} \Longrightarrow \forall\ n \geqslant \mu_2\ x_{i_2}^{(n)} \in B(x, \varepsilon_2) \wedge x_{i_2}^{(n)} \in E_{i_2}^{(n)}.$$

Reiterando el proceso indefinidamente, siempre podremos suponer

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_h < \ldots$$
$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_h < \ldots$$

La sucesión

$$x_{i_1}^{(\mu_1)}, \ldots, x_{i_1}^{(\mu_2 - 1)}, x_{i_2}^{(\mu_2)}, \ldots, x_{i_h}^{(\mu_h)}, \ldots,$$

donde

$$x_{i_h}^{(\mu_h)} \in E_{i_h}^{(\mu_h)} \subset E_{p_h}^{(\mu_h)},$$

pudiendo hacer coincidir μ_h con ν_p, $p_h \geqslant i_h$, completada con

$$x^{(k)} \wedge x^{(k)} \in E_{p_k}, \quad k = 1, \ldots, \mu_1 - 1,$$

tiene por límite fuerte x.

Observación.—Si la dimensión del subespacio límite es p trivialmente existe

$$\{E_p^{(n)} \mid n \in N\},\ E_p^{(n)} \subset E^{(n)} \ni E_p^{(n)} \longrightarrow E_p.$$

COROLARIO 3.1.

$$E^{(n)} \longrightarrow E \Longleftrightarrow \exists\, E^{(n)}_{p_n},\ F^{(n)} \subset E^{(n)} \ni E^{(n)} =$$
$$= E^{(n)}_{p_n} \oplus F^{(n)},\ E^{(n)}_{p_n} \longrightarrow E \wedge F^{(n)} \longrightarrow 0.$$

COROLARIO 3.2.—Si $E^{(n)} \rightharpoonup E$, existe una sucesión de subespacios de codimensión finita creciente

$$\{F^{(n)} \mid n \in N\}\ F^{(n)} \supset E^{(n)} \wedge F^{(n)} \rightharpoonup E.$$

DEMOSTRACIÓN.—Basta considerar la sucesión de subespacios ortogonales.

TEOREMA 4.—Si $E^{(n)} \rightharpoonup E$, $\dim E = \infty$, existe una sucesión de subespacios de dimensión finita creciente

$$\{F^{(n)}_{p_n} \mid n \in N\} \ni E^{(n)}_{p_n} \subset E^{(n)} \wedge E^{(n)}_{p_n} \rightharpoonup E.$$

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\{e_i \mid i \in N\}$ una base ortonormal de E. Entonces existe

$$\{e^{(n)} \mid n \in N,\ e^{(n)}_i \in E^{(n)}\}\ e^{(n)}_i \rightharpoonup e_i, \quad \forall\, i \in N.$$

Fijado i, como en el Teorema 3, son $e_1{}^n, \ldots, e_i{}^{(n)}$ linealmente independientes y

$$E^{(n)}_i = [e^n_1, \ldots, e^{(n)}_i\ ] \rightharpoonup E_i = [e_1, \ldots, e_i], \quad \forall\, n > \nu_1.$$

Siempre se puede suponer

$$\nu_1 = 1,\ \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_i < \ldots$$

y consideremos la sucesión de subespacios

$$\begin{aligned}
&E^{(1)}_1 = [e^1_1] \subset E^{(1)}\\
&\vdots\\
&E^{(\nu_2-1)}_1 = [e^{(\nu_2-1)}_1] \subset E^{(\nu_2-1)}\\
&E^{(\nu_2)}_2 = [\,e_1^{\nu_2)}, e^{(\nu_2)}_2] \subset E^{(\nu_2)}\\
&\vdots\\
&E^{(\nu_i-1)}_{i-1} = [e^{(\nu_i-1)}_1, \ldots, e^{(\nu_i-1)}_{-1}] \subset E^{(\nu_i-1)}\\
&E^{(\nu_i)}_i = [e_1\ \ ), \ldots, e^{(\nu_i)}_i\,] \subset E^{(\nu_i)}
\end{aligned}$$

La sucesión $\{E^{(n)}_{p_n} \subset E^{(n)} \mid n \leqslant N\}$ converge débilmente a E:

i)

$$x_{h_n} \in E^{(h_n)}_{p_{h_n}} \wedge x_{h_n} \rightharpoonup x \Longrightarrow x \in E$$

trivialmente.

ii) $x \in E$, pueden ocurrir dos casos:

b₁)

$$x \in \bigcup_i E_i \Longrightarrow \exists\, j \ni x \in E_j \Longrightarrow \exists\, x_n \in E^{(n)}_j \ni x_n \rightharpoonup x \wedge x_n \in E^{(n)}_{p_n}.$$

b₂)

$$x \notin \bigcup_i E_i \Longrightarrow x \in \overline{\bigcup_i E_i},$$

luego existe

$$x_i \in E_i \ni x_i \longrightarrow x \quad \text{y} \quad \forall\, x_i \quad \exists\, x_i^{(n)} \in E_i^{(n)} \ni x_i^{(n)} \rightharpoonup x_i.$$

La sucesión

$$x_1^1, \ldots, x_1^{(\nu_2-1)}, x_2^{(\nu_2)}, \ldots, x_2^{(\nu_3-1)}, x_3^{(\nu_3)}, \ldots, x_{i-1}^{(\nu_i-1)}, \ldots, x_{i-1}^{(\nu_i-1)}, x^{(\nu_i)}, \ldots$$

verifica

$$\frac{\mid (x_i^{(\nu_i)} \mid z) - (x \mid z) \mid \leqslant \mid (x_i'^{\nu_i} - x_i \mid z) \mid + \mid (x_i - x \mid z) \mid < 2\,\varepsilon_i}{\mid (x^{(\nu_{i+1}-1} \mid z) - (x \mid z) \mid \leqslant \mid (x_i'^{\,i+1^{-1}} - x_i \mid z) \mid + \mid (x_i - x \mid z) \mid < 2\,\varepsilon_i}$$

para todo $z \in \mathcal{H}$. Por tanto converge débilmente a x.

Observación.—Si

$$E^{(n)} \rightharpoonup E_p,\ \exists\, E_p^{(n)} \subset E^{(n)} \ni E_p^{(n)} \rightharpoonup E_p.$$

Corolario 4.1.

$$E^{(n)} \rightharpoonup E \Longleftrightarrow E^{(n)} = E^{(n)}_{p_n} \underset{\perp}{\oplus} F^{(n)} \ni E^{(n)}_{p_n} \rightharpoonup E \wedge F^{(n)} \rightharpoonup 0.$$

Teorema 5.—Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $E^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H}$.

b) $\mathcal{H} = \overline{\bigcup E^{(h_n)}}$, para toda subsucesión $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$.
c) $\alpha(E^{(n)}, r) \longrightarrow 0, \quad \forall\, r \subset \mathcal{H}$.

Demostración.—Probaremos que $a \Longleftrightarrow b$ y $a \Longleftrightarrow c$.
$a \Longrightarrow b$. Sabemos que $\overline{\bigcup E^{(h_n)}} \subset \mathcal{H}$, $\forall\, \{E^{(h_n)}\}$. Sea

$$x \in \mathcal{H} \Longrightarrow \exists\, x_n \in E^{(n)} \ni x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x \in \overline{\bigcup E^{(h_n)}}.$$

$b \Longrightarrow a$.
i) Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \longrightarrow x$, $x \in \mathcal{H}$.
ii) Sea $x \in \mathcal{H}$, veamos que toda bola $B(x, \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$, corta a casi todos los términos de la sucesión $\{E^{(n)} \mid n \in N\}$.
Admitamos la existencia de una subsucesión $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$ y un

$$\varepsilon_0 > 0 \ni B(x, \varepsilon_0) \cap E^{(h_n)} = \varnothing \Longrightarrow B(x, \varepsilon_0) \cap \bigcup E^{(h_n)} = \varnothing \Longrightarrow x \notin \overline{\bigcup E^{(h_n)}}$$

lo cual es imposible.
Por consiguiente, toda bola $B(x, \varepsilon)$ de centro x corta casi todos los $E^{(n)}$. Luego existe efectivamente $x_n \in E^{(n)}$ tal que $x_n \longrightarrow x$.
$a \Longleftrightarrow c$. $F^{(n)} \longrightarrow \mathcal{H} \Longrightarrow F^{(n)\perp} \rightharpoonup 0$ y a su vez

$$F^{(n)\perp} \rightharpoonup 0 \Longleftrightarrow \alpha(F^{(n)\perp}, r) \longrightarrow \pi/2 \quad \forall\, r \subset \mathcal{H} \Longleftrightarrow \alpha(F^{(n)}, r) \longrightarrow 0$$

para todo $r \subset \mathcal{H}$.

Corolario 5.1.—Dada una sucesión de subespacios lineales cerrados

$$\{F^{(n)} \mid n \in N\} \ni F^{(n)} \subset E \ \forall\, n$$

entonces $F^{(n)} \longrightarrow E$ si y sólo si

$$E = \overline{\bigcup F^{(h_n)}} \quad \forall\, \{F^{(h_n)}\} \subset \{F^{(n)}\}.$$

Este resultado en general no será cierto para la convergencia débil al no ser la unión de los subespacios convexa y por consiguiente no coincidir las clausuras fuerte y débil.

Observación.—Dado E y una sucesión de subespacios lineales $\{V^{(n)} \mid n \in N\}$ densos en E, se verifica

$$V^{(n)} \longrightarrow E \wedge V^{(n)} \rightharpoonup E.$$

PROPOSICIÓN 1.—Si $E^{(n)} \rightharpoonup E$ y $E_h \subset E$, $h \geqslant 1$ no contiene ningún límite estricto de ninguna sucesión

$$\{E_h^{(n)} \subset E^{(n)} \mid n \in N\},$$

entonces existe

$$F^{(n)} \subset E^{(n)} \ni F^{(n)} \rightharpoonup F,$$

donde $F = E \ominus E_h$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $E_h \subset E$ verificando la condición dada. Consideremos

$$F^{(n)} = E^{(n)} \ominus E^{(n)}$$

y veamos que $F^{(n)} \rightharpoonup F$:

i)

$$x_{h_n} \in F^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \rightharpoonup x, \quad \forall\, y \in E_h, \quad \exists\, y_n \in E_h^{(n)} \ni$$
$$\in y_n \rightharpoonup y \Longrightarrow y_{k_n} \longrightarrow y \Longrightarrow (x_{k_n} \mid y_{k_n}) \longrightarrow (x \mid y) \Longrightarrow x \in F.$$

ii) Sea $x \in F$. Sabemos que existe $x_n \in E^{(n)} \ni x_n \rightharpoonup x$. Tenemos

$$x_n = x'_n + x''_n,\ x'_n \in E_h^{(n)},\ x'' \in F^{(n)} \wedge \{x'_n\},\ \{x''_n\} \text{ d. a.} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \exists\, \{x'_{k_n}\},\ \{x''_{k_n} \ni x'_{k_n} \rightharpoonup x' \in E_h \wedge x''_{k_n} \rightharpoonup x'' \in F \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x' = x - x'' \in F \cap E_h \Longrightarrow x' = 0$$

y

$$\{x''_{k_n}\} \sim \{x_{k_n}\}, \quad \forall\, (k_n) \subset (n) \Longrightarrow \{x''_n\} \sim \{x_n\}$$

y

$$\forall\, x \in F \quad \exists\, x''_n \in F^{(n)} \ni x''_n \rightharpoonup x.$$

PROPOSICIÓN 2.—Si $E^{(n)} \longrightarrow E$, entonces para $F \subset E \ni \dim F = p$ o $\operatorname{codim}_E F = p$, existe

$$F^{(n)} \subset E^{(n)} \ni F^{(n)} \longrightarrow F.$$

DEMOSTRACIÓN.—Se sigue un camino análogo al de la proposición 1.

PROPOSICIÓN 3.—Sea

$$E = [a_1, \ldots, a_i, \ldots] \quad \text{y} \quad a_i^{(n)} \rightharpoonup a_i \quad a_i^{(n)} \in E, \quad \forall\, i \in N.$$

Entonces

$$E^{(n)} = [a^{(n)}, \ldots, a_i^{(n)}, \ldots] \rightharpoonup E.$$

DEMOSTRACIÓN.—i)

$$x_{h_n} \in E^{(h_n} \wedge x_{h_n} \rightharpoonup x \Longrightarrow x \in E.$$

ii) Si $x \in E$, existe

$$x_i \in [a_1, \ldots, a_i] \ni x_i \longrightarrow x.$$

Entonces para todo x_i, existe

$$x_i^{(n)} \in [a_1^{(n)}, \ldots, a_i^{(n)}]$$

tal que $x_i^{(n)} \rightharpoonup x_i$. Siguiendo un proceso análogo al del teorema 4, existe

$$\{x_i^{(\nu_i)} = x_n \mid x_n \in E^{(n)}\} \ni x_n \rightharpoonup x.$$

OBSERVACIÓN.—La misma propiedad es válida para la convergencia fuerte.

DEFINICIÓN.—Sea $\mathcal{X}$ un espacio topológico. Una familia $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{H}\}$ de conjuntos de $\mathcal{X}$ se llama localmente finita, si todo punto de $\mathcal{X}$ tiene un entorno V, tal que $V \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para un número finito de índices α [1].

TEOREMA 6.—Consideremos $\mathcal{P}$ ($\mathcal{H}$) con la topología dada por la métrica angular. Entonces $E^{(n)} \longrightarrow E$ si y sólo si todo rayo de E no da finitud local y para todo rayo no contenido en E hay finitud local.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $E^{(n)} \longrightarrow E$ y supongamos que existe un rayo $r_0 \subset E^\perp$ tal que

$$\forall\, C(r_\alpha, \varepsilon) \cap E^{(h_n)} \neq 0.$$

Podemos admitir que $r_0 \not\subset E^{(n)}$ ya que a lo sumo sólo puede estar en un número finito de ellos.

Tenemos

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_i > \ldots \varepsilon_i > 0, \quad \varepsilon_i \longrightarrow 0$$

y consideremos el cono

$$C(r_0, \varepsilon_1) \quad \text{y} \quad E^{(h_1)} \ni E^{(h_1)} \cap C(r_0, \varepsilon_1) \neq 0.$$

Sea

$$s_1 \subset E^{(h_1)} \cap C(r_0, \varepsilon_1), \ \varepsilon_2 \ni \alpha(r_0, s) > \varepsilon_2 \quad \text{y} \quad E^{(h_2)}$$

tal que

$$E^{(h_2)} \cap C(r_0, \varepsilon_2) \neq 0.$$

Si

$$s_2 \subset E^{(h_2)} \cap C(r_0, \varepsilon_2)$$

pasemos a

$$\varepsilon_3 \ni \alpha(r_0, s_2) > \varepsilon_3.$$

Reiterando el proceso encontramos una sucesión

$$s_i \subset E^{(h_i)} \ni s_i \longrightarrow r_0 \Longrightarrow r_0 \subset E,$$

absurdo.

Si $s \subset E$, $\exists\, s_n \subset E^{(n)} \ni s_n \longrightarrow s$ y evidentemente no hay finitud local.

Recíprocamente veamos que sí se verifican las condiciones $E^{(n)} \longrightarrow E$.

i) Si

$$x_{h_n} \in E^{(h_n)}, \ x_{h_n} \longrightarrow x,$$

supongamos que $x \notin E$. Pasando a rayos

$$r_{h_n} = \omega(x_{h_n}), \ r\ \omega(x), \ r_{h_n} \longrightarrow r, \ r \not\subset E,$$

por lo tanto todo cono de eje r corta casi todos los términos de $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$ y no hay finitud local siendo $r \not\subset E$, lo que contradice la hipótesis.

ii) Sea $x \in E$ y consideremos la sucesión $\{x_n\} \ni x_n = P_{E^{(n)}}\, x$. Si

$$x_n \not\to x \Longrightarrow \exists\, \{x_{h_n}\} \subset \{x_n\} \ni \alpha(x_{h_n}, x) > \varepsilon > \varepsilon > 0.$$

Tomando rayos $r_{h_n} = \omega(x_{h_n})$ $r = \omega(x)$ y existe un cono de eje r, $r \subset E$ que da finitud local, absurdo.

En general si $E^{(n)} \rightharpoonup E \wedge E^{(n)} \longrightarrow F$, $F \subset E$. La coincidencia de ambos límites queda caracterizada por los teoremas siguientes cuyas demostraciones son semejantes a las vistas para la convergencia fuerte o débil.

TEOREMA 7.—$E^{(n)} \rightrightarrows E$ si y sólo si:

1) $\forall\, E_p \subset E, \ \exists\, E_p^{(n)} \subset E^{(n)} \ni E_p^{(n)} \longrightarrow E_p$.
2) $\underline{\lim}\, \alpha\,(E^{(n)}, r) \longrightarrow \pi/2, \ \forall\, r \subset E^{\perp}$.

TEOREMA 8.

$$E^{(n)} \rightrightarrows E \Longleftrightarrow E^{(n)} = E_{p_n}^{(n)} \underset{\perp}{\oplus} F^{(n)} \ni E_{p_n}^{(n)} \rightrightarrows E \wedge F^{(n)} \rightharpoonup 0.$$

TEOREMA 9.

$$E^{(n)} \rightrightarrows E \Longleftrightarrow E^{(n)\perp} \rightrightarrows E^{\perp}.$$

Tenemos así una nueva $\mathcal{L}^*$-convergencia para cuya existencia basta considerar una sucesión monótona creciente o monótona decreciente. Además en $\mathcal{G}_p(\mathcal{H})$ coincide con la uerte y métrica y en $\mathcal{G}_{-p}(\mathcal{H})$ con la débil y métrica.

CONVERGENCIA AL SUBESPACIO NULO

Sabemos que

$$r_n \rightharpoonup 0 \Longleftrightarrow \alpha\,(r_n, s) \longrightarrow \pi/2 \quad \forall\, s \subset \mathcal{H}.$$

Además si $\{e_i \mid i \in N\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $x_n \rightharpoonup x$ si y sólo si $\| x_n \| < K$, $n \in N$ y

$$x_n^{(i)} \xrightarrow[n \to \infty]{} x^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

siendo $x_n^{(i)}$, $x^{(i)}$ componentes de x_n y x en la base $\{e_i\}$ respectivamente. Si nos referimos a rayos, tendremos que $r_n \rightharpoonup 0$ si y sólo si

$$\alpha\,(r_n, s_i) \longrightarrow \pi/2 \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

donde $\{s_i \mid i \in N\}$ es un sistema ortogonal completo de rayos. Más aún, esta equivalencia se verifica con sólo exigir a $\{s_i \mid i \in \mathrm{N}\}$ que sea sistema completo, $[s_1, s_2, \dots, s_i, \dots] = \mathcal{H}$.

Este resultado podemos generalizarlo a sucesiones de subespacios $\{\mathrm{E}^{(n)} \mid n \in \mathrm{N}\}$ en la siguiente proposición.

Proposición 4.—$\mathrm{E}^{(n)} \rightharpoonup 0$ si y sólo si

$$\alpha\,(\mathrm{E}^{(n)}, \mathrm{E}^{(i)}_{q_i}) \longrightarrow \pi/2, \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

donde los subespacios $\mathrm{E}^{(i)}_{q_i}$ de dimensión finita, verifican

$$[\mathrm{E}^{(1)}_{q_1}, \dots, \mathrm{E}^{(i)}_{q_i}, \dots] = \mathcal{H}.$$

Demostración.—Supongamos que $\mathrm{E}^{(n)} \rightharpoonup 0$. Fijado i, como $\mathrm{E}^{(i)}_{q_i}$ es de dimensión finita se tiene que

$$\alpha\,(\mathrm{E}^{(n)}, \mathrm{E}^{(i)}_{q_i}) \longrightarrow \pi/2.$$

Recíprocamente, supongamos cumplida la condición. Fácilmente se demuestra que

$$(\mathrm{E}^{(n)}, [\mathrm{E}^{(1)}_{q_1}, \dots, \mathrm{E}^{(i)}_{q_i}]) \longrightarrow \pi/2 \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

Sea $x \neq 0$, $x \in \mathcal{H}$. Existe

$$x_i \in [\mathrm{E}^{(1)}_{q_1}, \dots, \mathrm{E}^{(i)}_{q_i}]$$

tal que $x_i \longrightarrow x$. Entonces

$$\alpha\,(\mathrm{E}^{(n)}, x_i) \longrightarrow \pi/2 \;\; (i = 1, 2, \dots) \Longrightarrow \alpha\,(\mathrm{E}^{(n)}, x) \longrightarrow \pi/2,$$

luego $\mathrm{E}^{(n)} \rightharpoonup 0$.

Observación.—Como caso particular, es válido el resultado anterior si

$$\mathrm{E}^{(i)}_{q_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \mathcal{H} \quad \text{ó} \quad \mathrm{E}^{(i)}_{q_i} \xrightarrow[i\to\infty]{} \mathcal{H}.$$

DEFINICIÓN.—Una sucesión de rayos $\{r_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ es un sistema heterogonal si

$$\alpha([r_{p_1}, \ldots, r_{p_n}, \ldots], [r_{q_1}, \ldots, r_{q_m}]) > 0 \quad \forall\, p_i \neq q_j.$$

Análogamente en [6] se define el sistema heterogonal de subespacios.

PROPOSICIÓN 5.—Una condición necesaria y suficiente para que $\mathrm{E}_{p_n}^{(n)} \rightharpoonup 0$ es que toda subsucesión

$$\{\mathrm{E}_{p_{h_n}}^{(h_n)}\} \subset \{\mathrm{E}_{p_n}^{(n)}\}$$

contenga otra $\{\mathrm{E}_{p_{k_n}}^{(k_n)}\}$ que sea un sistema heterogonal de subespacios.

DEMOSTRACIÓN.—La condición es necesaria [7].

Recíprocamente, procediendo por reducción al absurdo, sea

$$y_{k_n} \in \mathrm{E}_{p_{k_n}}^{(k_n)} \ni y_{k_n} \rightharpoonup y \quad y \neq 0.$$

Entonces existe

$$\{\mathrm{E}_{p_{k'_n}}^{(k'_n)}\} \subset \{\mathrm{E}_{p_{k_n}}^{(k_n)}\}$$

heterogonal

$$\Longrightarrow \mathrm{E}_{p_{k'_n}}^{(k'_n)} \rightharpoonup 0 \wedge y_{k'_n} \rightharpoonup y \wedge y_{k'_n} \in \mathrm{E}_{p_{k'_n}}^{(k'_n)},$$

absurdo.

Si $\mathrm{E}^{(n)} \rightharpoonup 0$, observamos que

$$x_n \in \mathrm{E}^{(n)} \wedge \| x_n \| < \mathrm{K} \Longrightarrow x_n \rightharpoonup 0.$$

PROPOSICIÓN 6.—Sea $\{\mathrm{E}^{(n)} \mid n \in \mathrm{N}\} \ni \dim \mathrm{E}^{(n)}$ infinita. Existe una sucesión

$$\{\mathrm{F}^{(n)} \mid n \in \mathrm{N}\},\ \mathrm{F}^{(n)} \subset \mathrm{E}^{(n)} \ni \mathrm{F}^{(n)} \rightharpoonup 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{codim}_{\mathrm{E}^{(n)}} \mathrm{F}^{(n)}$$

es finita $\forall\, n \in \mathrm{N}$.

DEMOSTRACIÓN.—Tomemos una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\{e_n \mid n \in N\}$. Sabemos que

$$[e_n, e_{n+1}, \ldots] \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} 0$$

y basta con considerar

$$F^{(n)} = [e_n, e_{n+1}, \ldots] \cap E^{(n)}, \quad n \in N.$$

Se pueden hacer consideraciones análogas si dim $E^{(n)}$ es finita creciente. Debido a este resultado podemos enunciar:

PROPOSICIÓN 7.—Sea
$\{E^{(n)} \mid n \in N\}$, dim $E^{(n)} = \infty$, $\forall n \in N$, $E^{(n)} = F^{(n)} \underset{\top}{\oplus} D^{(n)}$ dim $D^{(n)}$

finita y $F^{(n)} \rightharpoonup 0$. Entonces:

a) Si $E^{(n)} \longrightarrow E \Longrightarrow D^{(n)} \longrightarrow E$.

b) $E^{(n)} \rightharpoonup E \Longrightarrow D^{(n)} \rightharpoonup E$.

DEMOSTRACIÓN.—a)

i) $x_{h_n} \in D^{(h_n)} \wedge x_{h_n} \longrightarrow x$, $x \in E$ evidentemente.

ii) Sea $x \neq 0$, $x \in E$, $\exists\, x_n \in E^{(n)} \ni x_n \longrightarrow x$. Descomponiendo x_n según $F^{(n)}$ y $D^{(n)}$,

$$x_n = x'_n + x''_n, \quad x'_n \in F^{(n)}, x''_n \in D^{(n)}.$$

Existe

$$\{x'_{h_n}\} \subset \{x'_n\} \ni x'_{h_n} \rightharpoonup 0.$$

Más precisamente $x'_n \rightharpoonup 0$ [3], con lo que $x''_n \longrightarrow x$, $x''_n \in D^{(n)}$.

b) Es análogo.

OBSERVACIÓN.—Esta proposición demuestra de forma más sencilla lo que prueban constructivamente los teoremas 3 y 4.

Pasemos a continuación a estudiar la convergencia fuerte al subespacio nulo, teniendo en cuenta que en $\mathcal{P}$ ($\mathcal{H}$) éste se corresponde con la parte vacía. Así diremos que $\{r_n \mid n \in N\}$ $r_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow$ carece de rayo de adherencia fuerte.

Teorema 10.—Consideremos $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ con la topología dada por la métrica angular. Si

$$E^{(n)} \longrightarrow 0, \quad E^{(n)} \neq 0, \quad \forall\, n \in N$$

se tiene equivalentemente que $\{E^n \mid n \in N\}$ es una familia localmente finita.

Demostración.—Supongamos que $\{E^{(n)}\}$ no es localmente finita y $E^{(n)} \longrightarrow 0$. Procediendo como en el teorema 6, si r_0 no da finitud local, encontramos una sucesión

$$\{s_i\},\ s_i \subset E^{(i)} \ni s_i \longrightarrow r_0.$$

Recíprocamente, si $\{E^{(n)}\}$ es localmente finita y $E^{(n)} \not\rightarrow 0$, existe un rayo $r \subset \mathcal{P}(\mathcal{H})$ y una subsucesión

$$r_{h_n} \subset E^{(h_n)} \ni r_{h_n} \longrightarrow r.$$

En estas condiciones todo cono $C(r, \varepsilon)$ cortará infinitos términos de $\{E^{(n)}\}$ y no será localmente finita.

Corolario 10.1.—Si $E^{(n)} \rightharpoonup 0$, $\{E^{(n)} \mid n \in N\}$ es también una familia localmente finita. Más aún, se puede caracterizar del modo siguiente:

$$E^{(n)} \rightharpoonup 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \forall\, r \subset \mathcal{P}(\mathcal{H}) \quad \text{y} \quad \forall\, C(r, \varepsilon),$$

$0 < \varepsilon < \pi/2$, $C(r, \varepsilon)$ corta sólo un número finito de subespacios de $\{E^{(n)}\}$.

Observación.—Dada una sucesión $\{V^{(n)} \mid n \in N\}$ de variedades lineales sus límites fuerte y débil, si existen, son siempre un subespacio cerrado [4].

Este trabajo es una parte de mi tesis doctoral. Quiero expresar mi agradecimiento al profesor A. Plans por su incondicional ayuda personal y continua supervisión.

BIBLIOGRAFÍA

[1] DUGUNDJI: *Topology*. Allyn and Boston, Inc. Bostan, 1967.

[2] OBRAS, M. C.: *Sobre convergencia en el espacio de Hilbert de sucesiones de subespacios de dimensión y codimensión finita.* «Rev. Acad. Ciencias Zaragoza», serie 2.ª, tomo XXVII, número 3, 1972.

[3] OBRAS, M. C.: *Sobre convergencia... II.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer», 4.ª serie, tomo XXXIV, núm. 6, 1974.

[4] OBRAS, M. C.: *Sobre convergencia... III.* «Actas III Jornadas Hispano-Lusitana». Sevilla, 1974.

[5] OBRAS, M. C.: *Propiedades de los límites superior e inferior en* $\mathcal{G}(\mathcal{H})$. En prensa.

[6] ONIEVA, V. M.: *Sobre el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert.* «Publ. Sem. Mat. García Galdeano», núm. 13. Zaragoza, 1971.

[7] ONIEVA, V. M.: *Sobre convergencia débil de sucesiones de subespacios del espacio de Hilbert.*

[8] PLANS, A.: *Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert.* «Rev. Mat. Hisp.-Amer.», 4.ª serie, tomo XXI, núm. 3-4, 1961.