UN PROBLEMA DE IDENTIFICACION PARA PROCESOS CONTROLABLES NO AUTONOMOS

por

FERNANDO COSTAL (*)

RESUMEN

Se estudia para un proceso de control lineal no autónomo con salida, que es controlable y observable, la forma de identificarlo a un modelo prefijado por medio de un cambio de base en el espacio de estados y de controles feedback aditivos de tipo neutro no covariantes.

INTRODUCCIÓN

Dado el proceso de control lineal con salida

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)\,x + B(t)\,u \\ y &= C(t)\,x \end{aligned} \tag{1}$$

donde

$$x \in R^n; \quad u \in U \subset R^m; \quad y \in R^p;$$

A, B, C son funciones definidas en un intervalo $I = [0, T] \subset R$ valoradas en los espacios de matrices de dimensiones $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ respectivamente que es controlable y observable, se plantea la cuestión: ¿Cuándo el sistema (A, B, C) puede ser identificado a un sistema prefijado (A_p, B_p, C_p) en el sentido de que se puede pasar de de (A, B, C) a (A_p, B_p, C_p) por medio de transformaciones sencillas?

Esta cuestión ha sido abordada en [5] en el caso en que (A, B, C)

(*) Departamento de Ecuaciones Funcionales. Facultad de Matemáticas. Santiago de Compostela.

son constantes y para (A_p, B_p) se toma la forma canónica de Brunovsky [1]. Las transformaciones allí usadas son cambios de base en el espacio de estados, en el de controles y feedbacks aditivos.

En el presente artículo se estudia el caso en que A, B y C dependen de t, (A_p, B_p) es la forma canónica dada en [2]-[3] y las transformaciones usadas son solamente cambios de base en el espacio de estados y feedbacks aditivos de un tipo particular.

EL PROBLEMA DE LA IDENTIFICACIÓN

En lo sucesivo, haremos uso de las notaciones que siguen. Representaremos simplemente con f una función $f(t)$. C′ será la matriz adjunta de C. Con

$$\{n_i, \quad a_{ijk}(t)\}$$

indicaremos la colección de invariantes asociada al par

$$(A(t), \quad B(t)) \qquad \text{y con} \qquad (\hat{A}(t), \quad \hat{B}(t))$$

la correspondiente forma canónica (ver [2]-[3]). Por $D_A B(t)$ entenderemos

$$\frac{d}{dt} B(t) - A(t) B(t).$$

Se supondrá que (1) satisface las hipótesis:

1. Rango

$$[B(t), D_A B(t), \ldots, D_A^{n-1} B(t)] = n, \quad \forall t \in I$$

(condición de controlabilidad).

2. Rango

$$[B(t)] = m, \quad \forall t \in I$$

(condición de observabilidad).

3. Rango

$$[C'(t), D_{A'} C'(t), \ldots, D_{A'}^{n-1} C'(t)] = n, \quad \forall t \in I$$

(condición de observabilidad).

4. Los índices de Kronecker $n_i(t) = n_i$ asociados a (A, B) son constantes para todo t.

Si nos restringimos al par (A, B) (tomaríamos como salida el propio estado) sabemos (ver [2]-[3]) que (A, B) puede transformarse en (A_p, B_p) por medio de un cambio de base en el espacio de estados (R-transformaciones) si y solamente si ambos pares admiten la misma colección de invariantes $\{n_i, \alpha_{ijk}(t)\}$.

Si en (1) efectuamos una R-transformación, (A, B, C) se convierte en $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ donde:

$$\tilde{A} = RAR^{-1} + \dot{R}R^{-1} \tag{2}$$

$$\tilde{B} = RB \tag{3}$$

$$\tilde{C} = CR^{-1} \tag{4}$$

En este caso diremos que los sistemas son R-equivalentes y escribiremos

$$(A, B, C) \overset{R}{\simeq} (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}).$$

Si como matriz de cambio de base elegimos

$$R_1^{-1} = (b_1, D_A b_1, \ldots, D_A^{n_1-1} b_1, \ldots, b_m, \ldots, D_A^{n_m-1} b_m)$$

donde b_i representa la columna i-ésima de la matriz B, el sistema (A, B, C) se transforma en $(\hat{A}, \hat{B}, \tilde{C})$ donde

$$\tilde{C} = C\,R_1 \tag{5}$$

Análogamente si R_2^{-1} es una matriz de forma similar a R_1 para (A_p, B_p);

$$(A_p, B_p, C_p) \xrightarrow{R_2^{-1}} (\hat{A}_p, \hat{B}_p, \tilde{C}_p)$$

con

$$\tilde{C}_p = C_p\,R_2$$

¿Cuándo es posible encontrar una matriz R tal que por medio de una R-transformación el sistema (A, B, C) puede ser llevado al (A_p, B_p, C_p)? La respuesta viene dada por el siguiente:

TEOREMA 1.—(De existencia).

$$(A, B, C) \overset{R}{\simeq} (A_p, B_p, C_p)$$

si y sólo si:

i)

$$\tilde{A}_p = \tilde{A}, \quad \tilde{B}_p = \hat{B}$$

ii)

$$\tilde{C}_p = \tilde{C}\,\tilde{R} \quad \text{para} \quad \tilde{R} = R_1^{-1}\,R^{-1}\,R_2$$

siendo R tal que

$$(A, B) \overset{R}{\simeq} (A_p, B_p)$$

DEMOSTRACIÓN.—«$\Longrightarrow$» Puesto que los sistemas son equivalentes, (2) y (3) garantizan que

$$(A, B) \overset{R}{\simeq} (A_p, B_p)$$

por tanto tienen los mismos invariantes $\{n_i, \alpha_{ijk}(t)\}$ y en consecuencia las mismas formas canónicas. Para probar ii) teniendo en cuenta (4)-(6) podemos escribir

$$\tilde{C}_p = C_p\,R_2 = C\,R^{-1}\,R_2 = C\,R_1\,R_1^{-1}\,R^{-1}\,R_2 = \tilde{C}\,\tilde{R}$$

«$\Longleftarrow$» De i) se sigue que

$$\exists\, R/(A, B) \overset{R}{\simeq} (A_p, B_p).$$

Bastará probar entonces que $C_p = C\,R^{-1}$. Partiendo de ii), (5) y (6),

$$C_p = \tilde{C}_p\,R_2^{-1} = C\,\tilde{R}\,\tilde{R}_2^{-1} = \tilde{C}\,R_1^{-1}\,R^{-1}\,R_2\,R_2^{-1} = C\,R^{-1}$$

El teorema anterior puede formularse también del modo siguiente:

TEOREMA 2.

$$(A, B, C) \overset{R}{\simeq} (A_p, B_p, C_p)$$

si y sólo si:

i) (A, B) y (A_p, B_p) tienen los mismos invariantes $\{n_i, \alpha_{ijk}(t)\}$.

ii) $C_p = C R^{-1}$.

Desde el punto de vista práctico, nos interesa que el sistema sea «fácilmente» realizable. Esto unido a lo precedente nos lleva a suponer ya en todo lo que sigue que

$$A = A_p = \hat{A}, \quad B = B_p = \hat{B}$$

ya que en otro caso nos bastaría efectuar una R-transformación.

El problema puede ser reformulado ahora en los siguientes términos:

Encontrar una transformación que lleve el sistema

$$(A_p, B_p, C) \quad \text{en} \quad (A_p, B_p, C_p) \quad \text{donde} \quad A_p = \hat{A}, B_p = \hat{B}, C \neq C_p.$$

Se hará uso de las siguientes:

Definición 1.—Diremos que un feedback aditivo

$$(u = Q(t)\, x + v)$$

es de tipo neutro si conserva los invariantes $\{\alpha_{ijk}(t)\}$.

Definición 2.—Diremos que un feedback Q es no covariante si $(A + B Q, B)$ no está en forma canónica.

Para nuestro propósito (puesto que hemos de conservar (A_p, B_p) y por tanto la colección $\{n_i, \alpha_{ijk}(t)\}$) solamente podremos disponer de R-transformaciones y de feedbacks de tipo neutro.

Es claro que una R-transformación no es suficiente para resolver nuestro problema ya que habría de verificarse:

$$A_p = R\, A_p\, R^{-1} + \dot{R}\, R^{-1} \tag{7}$$
$$B_p = R\, B_p \tag{8}$$
$$C_p = C\, R^{-1} \tag{9}$$

y dada la forma especial de A_p y B_p, se puede probar que para que (7) y (8) sea válido necesariamente ha de ser $R = I$ y por tanto (9) no se satisface.

En vista de ello, el camino a seguir será introducir un feedback de tipo neutro no covariante y luego por medio de una R-transformación llegar a la forma deseada; esto es, buscar R y Q tales que:

$$\mathrm{A}_p = \mathrm{R}\,(\mathrm{A}_p + \mathrm{B}_p\,\mathrm{Q})\,\mathrm{R}^{-1} + \dot{\mathrm{R}}\,\mathrm{R}^{-1} \tag{10}$$

$$\mathrm{B}_p = \mathrm{R}\,\mathrm{B}_p \tag{11}$$

$$\mathrm{C}_p = \mathrm{C}\,\mathrm{R}^{-1} \tag{12}$$

El teorema que damos a continuación y cuya demostración puede verse en [4], nos proporciona la estructura de las matrices R que satisfacen (10) y (11). Además puesto que el conjunto puede ser dotado de la estructura de grupo tenemos dada también la forma de R^{-1}.

TEOREMA 3.—Si $m = 2$ (para $m > 2$ sería análogo) las matrices R que satisfacen (10) y (11) vienen dadas de la siguiente forma: R podemos considerarla partida en bloques R_{ij} de dimensiones $n_i \times n_j$ donde los R_{ij} pueden expresarse por:

$$\mathrm{R}_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & + & \dots & + & * \\ 0 & 1 & \dots & + & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\mathrm{R}_{ij} = \\ i \neq j\end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & + & + & \dots & + & + & \dots & * \\ 0 & 0 & + & \dots & + & + & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & + & + & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x & \dots & x \end{pmatrix}$$

donde los elementos $*$ vienen dados para

$$\mathrm{R}_{11},\ \mathrm{R}_{21},\ \mathrm{R}_{12} \quad \text{y} \quad \mathrm{R}_{22}$$

por:

$$r_{i-1,\,n_1} = -\,\alpha_i'\,r_{nn_1} + \sum_{j=i+1}^{n_1} r_{ij}\,\alpha_j + \sum_{j=n_1+i+1}^{n} r_{ij}\,\alpha_j + \dot{r}_{in_1},\ 2 \leq i \leq n_1$$

$$r_{i-1,\,n_1} = -\,\alpha_i'\,r_{nn_1} + \sum_{j=i-1-n_1}^{n_1} r_{ij}\,\alpha_j + \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}\,\alpha_j + \dot{r}_{in_1}\quad n_1 + 2 \leq i \leq n$$

$$r_{i-1,\,n} = -\,\alpha_i\,r_{n_1n} + \sum_{j=i+1}^{n_1} r_{ij}\,\alpha_j' + \sum_{j=n_1+i+1}^{n} r_{ij}\,\alpha_j' + \dot{r}_{in},\ 2 \leq i \leq n_1$$

$$r_{i-1,\,n} = -\,\alpha_i\,r_{n_1n} + \sum_{j=i+1-n_1}^{n_1} r_{ij}\,\alpha_j' + \sum_{j=i+1}^{n} r_{ij}\,\alpha_j' + \dot{r}_{in}\quad n_1 + 2 \leq i \lessgtr n$$

respectivamente; los elementos $\times$ pueden ser elegidos arbitrariamente y los $+$ se obtienen para R_{11}, R_{21} por medio de:

$$r_{ij} = r_{i+1\ j+1} + \dot{r}_{i+1\ j} - \alpha'_{i+1}\, r_{nj}$$

y para R_{12}, R_{22} por:

$$r_{ij} = r_{i+1\ j+1} + \dot{r}_{i+1\ j} - \alpha_{i+1} r_{n_1 j}$$

(Con

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \quad \text{y} \quad (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)^T$$

se representaron respectivamente las columnas n_1 y n de la matriz A_p).

NOTA.—El método práctico para la determinación de R_{ij} consiste en calcular los elementos de la penúltima fila (la última se conoce) comenzando de derecha a izquierda; a continuación la antepenúltima y así sucesivamente.

Conocida la estructura de R, es fácil obtener los posibles feedbacks de tipo neutro no covariantes, pues bastaría elegir como matriz $\underset{\sim}{Q}$ la formada por las filas no nulas de $A_p R - R A_p - \dot{R}$. (Para más detalles ver [4].) Estamos pues en condiciones de enunciar el algoritmo de resolución para nuestro problema, supuesto que admita solución.

ALGORITMO DE RESOLUCIÓN

1. Dado (A, B, C) se pasa a $(A_p, B_p, \tilde{C})$ por el método ya indicado.
2. Partiendo de (12) con $\tilde{C}$ en lugar de C y teniendo en cuenta la forma de R^{-1}, se calcula R.
3. Se obtiene $\underset{\sim}{Q}$, eligiendo la matriz formada por las filas no nulas de $A_p R - R A_p - R$. Una vez determinadas R y $\underset{\sim}{Q}$ se procede como sigue:

$$(A, B, C) \xrightarrow{R_1^{-1}} (A_p, B_p, \tilde{C}) \xrightarrow{Q} (A_p + B_p Q, B_p, \tilde{C}) \xrightarrow{R} (A_p, B_p, C_p)$$

NOTA 1.—La condición ii) del teorema 2 resulta bastante restrictiva.

En la práctica esta dificultad puede en cierto modo salvarse buscando una matriz R tal que en lugar de hacer

$$\| C_p - C R^{-1} \| = 0,$$

haga mínimo

$$\| C_p - C R^{-1} \| .$$

En este caso se podría hacer una construcción análoga a la presentada más arriba y puesto que los pares (A, B) (A_p, B_p) son idénticos la evolución del sistema de estados es la misma y por tanto mantienen el error de salida que vendría acotado por:

$$\| C_p - C R^{-1} \| \cdot \| x \| .$$

NOTA 2.—La dificultad que se indica en la nota anterior, se presenta también aunque se hagan cambios de base en el espacio de controles o se utilice otro tipo de feedbacks aditivos.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BRUNOVSKY, P.: *A Clasification of Linear Controllable Systems.* «Kybernetica ciselo rocnik», 3 (1970).

[2] COSTAL, F.: *Estudio de invariantes y una clasificación de sistemas controlables no autónomos.* Publicaciones Departamento Análisis Mat. Serie B, núm. 13. Santiago de Compostela (1975). Tesis.

[3] COSTAL, F.: *Formes canoniques pour une classe de systèmes asservis.* «Ricerche di Automatica», vol. 7, núms. 2-3 (1976).

[4] COSTAL, F.: *Una determinación de feedbacks de tipo neutro*, de próxima aparición en la «Revista de la Real Academia de las Ciencias».

[5] GUERIN, P. J.: *Contribution a l'étude des structures de commande des systèmes lineaires. Application à la résolution du problème de la poursuite.* Thèse. Grenoble (1978).

[6] POPOV, V. M.: *Invariant description of linear, time-invariant controllable systems.* «SIAM J. Control», vol. 10, núm. 2 (1972).

[7] WANG, S. H. y DAVISON, E. J.: *Canonical forms of linear multivariable systems.* «SIAM J. Control», vol. 14, núm. 2 (1976).