ESPACIOS AUTODUALES SOBRE CUERPOS CON VALORACION TRIVIAL

por

JOSE MANUEL BAYOD

En la teoría de espacios normados sobre un cuerpo con valoración no arquimediana distinta de la trivial, han sido abordados los espacios dotados de un producto interno desde distintos puntos de vista en [4], [7], [8] y [9]; y en [1] se inicia su estudio axiomático a través de la comparación de los casos anteriores.

Pero el caso de que la valoración del cuerpo sea la trivial (que asocia a cada elemento no nulo el valor 1), sólo ha sido tratado en [6]. El objeto de este trabajo es encuadrar el estudio llevado a cabo en [6] en el marco de la teoría desarrollada en [1], relacionándolo con los estudios análogos para el caso no trivial y deduciendo algunas propiedades para los subespacios bien complementados.

Al final del trabajo se discute la conjetura de Gross y Keller (ver [2]) sobre los espacios «de Hilbert» distintos de los reales y complejos, y se prueba que, aunque en principio los espacios que aquí se estudian aparecen como probables contraejemplos, al menos en la mayor parte de los casos la verifican, reforzando considerablemente de esta manera su credibilidad.

En lo que sigue, K será un cuerpo conmutativo, dotado de la valoración trivial (salvo en el teorema 6), y E un espacio normado sobre K.

1. Distintas formas de relacionar una norma no arquimediana con un producto interno

D. Treiber [8] estudia espacios dotados de una base ortonormal $\{a_i\}_{i \in I}$ (ortogonal en el sentido de la norma), definiendo a través de ella un producto interno mediante la igualdad

$$\langle \sum_{i \in I} \alpha_i a_i, \sum_{i \in I} \beta_i a_i \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i \beta_i,$$

y en [1] se prolonga en parte dicho estudio a los espacios dotados de una base ortogonal.

Es conocido [6] que de entre los espacios sobre un cuerpo trivial, al menos los V-espacios (que son los más interesantes desde el punto de vista de las aplicaciones a los desarrollos asintóticos), es decir, los espacios cuyo conjunto de valores de la norma es de la forma

$$\{0\} \cup \{\rho^n \mid n \in Z_1\},$$

donde Z_1 es una parte del conjunto de números enteros Z, tienen una base ortogonal.

Pero no puede definirse en general una forma bilineal mediante la igualdad anterior, ya que por ser K trivial la topología es la discreta, luego el segundo miembro converge si y sólo si la suma es en realidad finita.

P. Robert [6] utiliza esta definición para hablar de un «análogo al espacio de Hilbert», pero tiene que reducirla al subespacio vectorial engendrado por la base ortogonal, obteniendo así algunos resultados parciales.

T. A. Springer [7] considera espacios de dimensión finita sobre un cuerpo con valoración discreta y dotados de una forma bilineal anisótropa, probando que la fórmula

$$\forall x \in E, \quad \| x \| = | \langle x, x \rangle |^{1/2}$$

define una norma no arquimediana sobre el espacio. En [1] se extiende la demostración a espacios de dimensión arbitraria sobre cuerpos con valoración discreta o densa.

Pues bien, si la valoración de K es la trivial, la norma no arquimediana anterior es también la trivial:

$$\| 0 \| = 0 \quad \text{y} \quad \| x \| = 1 \quad \text{si} \quad x \neq 0,$$

y la topología es la discreta tanto en K como en E, siendo la estructura y el estudio de estos espacios exclusivamente algebraicos.

Los espacios linealmente isométricos con su dual son, según todo lo anterior, los que mejor se adaptan al caso de valoración trivial.

Siguiendo la terminología utilizada en [1], diremos que E es *autodual* si existe una aplicación h: $E \longrightarrow E'$ que sea isomorfismo isométrico y tal que $h' \cdot j = h$, donde h' es la aplicación conjugada de h y j es la aplicación canónica de E en su bidual E″. Para las demás notaciones, ver también [1].

2. Propiedades de los espacios autoduales

Se comprueba inmediatamente con las mismas técnicas utilizadas en [1] que si E es autodual:

(a) E es reflexivo.

(b) Sobre E puede definirse una forma bilineal simétrica de la siguiente manera:

$$\forall\, x\, y, \in \mathrm{E}, \quad \langle x, y \rangle = h(x)(y).$$

(c) Se verifica la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$| \langle x, y \rangle | \leq \| x \| \; \| y \| ,$$

y la forma bilineal (que llamaremos producto interno) es continua.

(d) La forma bilineal es no degenerada.

A lo largo de este apartado, E será un espacio autodual sobre K (salvo en el teorema 6).

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que cada vector no nulo de E es ortogonal-escalar (es decir, ortogonal en el sentido del producto interno) a toda una bola de centro el origen.

Sea ahora L un subespacio lineal cerrado de E. Considérese el siguiente diagrama, donde r es la aplicación que a cada forma sobre E asocia su restricción a L, i es la inclusión canónica, y h_{L} es la composición de las otras tres:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "h_{\mathrm{L}}"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{L}' & \mathrm{E}' \arrow[l, "r"] \end{tikzcd}$$

Vamos a probar que las propiedades de complementación de L se caracterizan como propiedades de h_{L}. Nótese que h_{L} es una contracción, ya que lo es r, y h, i son isometrías.

En primer lugar, un resultado análogo al de los casos real o complejo, aunque diferente en general de los casos de valoración no arquimediana no trivial:

TEOREMA 1.—*Si L es un subespacio lineal de E,* $\bar{L} = L^{\perp\perp}$.

DEMOSTRACIÓN.—Uno de los contenidos se sigue del hecho de que el producto interno es continuo, y el otro de una aplicación standard del teorema de Hahn-Banach, válido en este caso (véase la demostración contenida en [3]).

COROLARIO.

(a) *Si L es una parte de E, L es un subespacio lineal cerrado si y sólo si* $L = L^{\perp\perp}$.

(b) *Si L es un subespacio lineal de E,* $L^{\perp} = 0$ *si y sólo si L es denso.*

(c) *Si L es un subespacio lineal de E,* $L + L^{\perp}$ *es denso si y sólo si L es regular.*

TEOREMA 2.—*La aplicación* h_L *es inyectiva si y sólo si* $L + L^{\perp}$ *es* denso.

DEMOSTRACIÓN.—Basta observar que L regular significa que la restricción del producto interno a L es no degenerada, es decir, que $L \cap L^{\perp} = \{0\}$, y tener en cuenta el corolario (c).

TEOREMA 3.—*La aplicación* h_L *es suprayectiva si y sólo si* $L + L^{\perp} = E$ *(es decir, L es ortocomplementado).*

DEMOSTRACIÓN.—Supongamos que L es ortocomplementado. Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach, r es suprayectiva, luego si $f \in L'$, existe $z \in E$ tal que

$$\forall x \in L, \quad f(x) = \langle z, x \rangle.$$

Sea $z = y + y' \in L + L^{\perp}$. Entonces, para cada vector x del subespacio L,

$$f(x) = \langle y, x \rangle = h_L(y)(x),$$

lo que demuestra que h_L es suprayectiva.

Recíprocamente, supongamos que la imagen de h_L es todo L', y sea x un vector arbitrario de E. Entonces existe un x' perteneciente a L' de manera que

$$h_L(x') = r \,.\, h_E(x),$$

pero el vector diferencia $x - x'$ está en $L^\perp$, ya que para todo $y \in L$,

$$\langle x - x', y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x', y\rangle = \langle x, y\rangle - r \,.\, h_E(x)(y) =$$
$$= \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

COROLARIO.—*Si la aplicación* h_L *es suprayectiva, es también inyectiva.*

TEOREMA 4.—*La aplicación* h_L *es una isometría si y sólo si los subespacios* L *y* $L^\perp$ *son ortogonales en el sentido de la norma (en símbolos,* $L \perp\!\!\!\perp L^\perp$*).*

DEMOSTRACIÓN.—Si $L \perp\!\!\!\perp L^\perp$, L es regular, evidentemente, luego por el teorema 2, cualquier vector z no nulo de E es el límite de una sucesión de vectores (z_n) cada uno de los cuales es suma de uno de L y otro de $L^\perp$, $z_n = y_n + y'_n$, y por la condición de ortogonalidad,

$$\| z_n \| = \max \{ \| y_n \|, \| y'_n \| \} \geq \| y \|_n$$

Entonces, para cada $x \in L$,

$$\frac{|\langle x, z\rangle|}{\| z \|} = \lim \frac{|\langle x, z_n\rangle|}{\| z_n \|},$$

con

$$\frac{|\langle x, z_n\rangle|}{\| z_n \|} \leq \frac{|\langle x, y_n\rangle + \langle x, y'_n\rangle|}{\| y_n \|},$$

luego

$$\frac{|\langle x, z\rangle|}{\| z \|} \leq \sup \frac{|\langle x, y_n\rangle|}{\| y_n \|} \leq \| h_L(x) \|,$$

y en consecuencia,

$$\| x \| = \| h(x) \| \leq \| h_L(x) \| \leq \| x \| .$$

Supongamos ahora que h_L es una isometría, y probaremos que un vector $x \in L$ es siempre ortogonal-nórmico a otro vector $y \in L^{\perp}$:

$$\| x + y \| = \| h(x + y) \| = \sup \left\{ \frac{| \langle x + y, z \rangle |}{\| z \|} : z \in E, \quad z \neq 0 \right\} =$$
$$= \sup \left\{ \frac{1}{\| z \|} : z \in E, \ \langle x + y, z \rangle \neq 0 \right\} = \sup E_{x+y}$$

De la misma manera, como h_L es isometría,

$$\| x \| = \| h_L(x) \| = \sup \left\{ \frac{1}{\| z \|} : z \in L, \ \langle x, z \rangle \neq 0 \right\} = \sup L_x.$$

Ahora bien, como L_x está contenido, evidentemente, en E_{x+y}, resulta que $\| x \| \leqslant \| x + y \|$. Utilizando esta desigualdad para el caso de que $\| x \| = \| y \|$, y aplicando la desigualdad triangular fuerte, se sigue que en todos los casos,

$$\| x + y \| = \max \{ \| x \| , \| y \| \}.$$

TEOREMA 5.—*L es un subespacio bien complementado si y sólo si la aplicación* h_L *es una simetría suprayectiva, es decir, L es también un espacio autodual para la aplicación inducida* h_L.

DEMOSTRACIÓN.—Basta recordar que un subespacio se dice bien complementado cuando su ortogonal-escalar es también complemento ortogonal-nórmico (ver [1]), y aplicar los teoremas 3 y 4. (Es de destacar aquí que, como se prueba en [1], el hecho de que se cumpla la igualdad $h' \circ j = h$ es equivalente a que la forma bilineal asociada sea simétrica.)

Obsérvese que en las domostraciones de los teoremas 3, 4 y 5 hay una parte que no utiliza el teorema de Hahn-Banach y es válida en un contexto más general. Como indicación, probaremos sólo aparte lo siguiente:

TEOREMA 6.—*Supongamos que K es un cuerpo completo para una cierta valoración no arquimediana (trivial o no), y E es un espacio vectorial sobre K dotado de un producto interno y de una norma mayorante minimal. Sea L un subespacio lineal (necesariamente cerrado) «autodual para la restricción», es decir, tal que* h_L *es isometría supra-*

yectiva. Entonces L es bien complementado, y la proyección correspondiente es $i \circ h_L^{-1} \circ r \circ h$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta aplicar los resultados del capítulo IV de [1], concretamente el teorema 3, válido también para el caso de valoración trivial.

La «propiedad de Kalisch» o «propiedad (K)» se introduce en [1] como medio para expresar en algunos casos la buena complementación de subespacios: un subespacio lineal L de E se dice que es un (K)-espacio o que verifica la propiedad (K) si para todo vector x de L existe un vector no nulo $\bar{x}$ también en L cumpliendo

$$| \langle x, \bar{x} \rangle | = \| x \| \, \| \bar{x} \|.$$

Para los espacios autoduales sobre un cuerpo con valoración trivial se obtiene el siguiente resultado (indicamos con $\perp$ la ortogonalidad escalar y con $\perp\!\!\!\perp$ la ortogonalidad nórmica):

TEOREMA 7.—*Sea L un subespacio lineal de E.*

(a) *Si E es un (K)-espacio,* $y, x \in E \wedge y \perp x \Longrightarrow y \perp\!\!\!\perp \bar{x}$.

(b) *Si L es (K)-espacio,* $L \perp\!\!\!\perp L^{\perp}$.

(c) *Si* $L \perp\!\!\!\perp L^{\perp}$ *y E es (K)-espacio, L es (K)-espacio.*

DEMOSTRACIÓN.

(a) Supongamos que x es no nulo, y sea λ un escalar cualquiera. Entonces,

$$\| \bar{x} + \lambda y \| \, \| x \| \geqslant | \langle \bar{x} + \lambda y, x \rangle | = | \langle \bar{x}, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle | = \\ = | \langle \bar{x}, x \rangle | = \| \bar{x} \| \, \| x \|,$$

luego

$$\| \bar{x} + \lambda y \| \geqslant \| \bar{x} \|$$

para todo $\lambda \in K$, es decir, $\bar{x} \perp\!\!\!\perp y$.

(b) Tomemos $a \in L$ y $b \in L^{\perp}$. Entonces, por hipótesis existe un vector $\bar{a}$ en L tal que

$$| \langle a, \bar{a} \rangle | = \| a \| \, \| \bar{a} \|.$$

Y del apartado (a), al ser $b \perp \bar{a}$, se sigue que $b \perp\!\!\!\perp a$.

(c) Sea a un vector no nulo de L; como E es (K)-espacio, existe $\bar{x} \in$ E tal que

$$1 = | \langle a, \bar{x} \rangle | = \| a \| \| \bar{x} \|.$$

Ahora bien, como L es regular, L + $L^{\perp}$ es denso en E (teorema 2), luego existen sucesiones

$$(x_n) \subset \mathrm{L}, \quad (y_n) \subset \mathrm{L}^{\perp}$$

tales que

$$0 \neq \bar{x} = \lim (x_n + y_n),$$

de donde para casi todo n,

$$\| \bar{x} \| = \| x_n + y_n \| = \max \{\| x_n \|, \| y_n \|\} \geqslant \| x_n \|.$$

Por tanto, para cualquiera de esos n,

$$\| a \| \| x_n \| \leqslant \| a \| \| \bar{x} \| = 1 = | \langle a, \bar{x} \rangle | = \lim | \langle a, x_n \rangle + \langle a, y_n \rangle | =$$
$$= \lim | \langle a, x_n \rangle |,$$

y en consecuencia (habida cuenta de la trivialidad de la valoración), $| \langle a, x_n \rangle | = 1$; es decir, para esos n,

$$\| a \| \ \| x_n \| \leq 1 = | \langle a, x_n \rangle | \leq \| a \| \ \| x_n \| .$$

3. V-espacios autoduales

Probaremos en primer lugar un teorema de representación de todos los V-espacios autoduales, y para ello, siguiendo las notaciones introducidas en [5], dada una sucesión $q = (q_n)$ de enteros no negativos subindicada sobre los números naturales positivos, llamaremos

$$\mathrm{P}(q) = \prod_{n \in \mathrm{N}} \mathrm{K}^{q_n}, \quad \mathrm{S}(q) = \bigoplus_{n \in \mathrm{N}} \mathrm{K}^{q_n} \quad (\text{con } \mathrm{K}^0 = \{0\}).$$

Fijado un número real mayor que 1, ρ, quedan definidas sendas normas no arquimedianas sobre P (q) y S (q) mediante:

$$\forall x \in \mathrm{P}(q), \quad x = (x_n), \quad \| x \| = \max \{\rho^{-n} \mid x_n \neq 0\}$$
$$\forall x \in \mathrm{S}(q), \quad x = (x_n), \quad \| x \| = \max \{\rho^{n} \mid x_n \neq 0\}.$$

TEOREMA 8.—*Un V-espacio es autodual si y sólo si es isométricamente isomorfo a un espacio de la forma*

$$S(q) \times P(q) \times K^r$$

(dotado de la norma del máximo), donde las normas de $S(q)$ *y* $P(q)$ *están referidas al mismo* ρ*, y la norma de un vector no nulo cualquiera de* K^r *es igual a uno.*

DEMOSTRACIÓN.—De acuerdo con el teorema fundamental de representación obtenido en [5], un V-espacio es reflexivo si y sólo si es isométricamente isomorfo de una única manera a un espacio de la forma

$$S(p) \times P(q) \times K^r$$

(p y q sucesiones en principio diferentes), y su dual es entonces (salvo isometrías lineales) igual a

$$S(q) \times P(p) \times K^r.$$

Por consiguiente, es claro que los espacios de la forma

$$S(q) \times P(q) \times K^r$$

y todos sus isomorfos mediante isometrías, son autoduales según nuestra definición.

Y recíprocamente, si E es autodual, E es reflexivo, luego

$$E \simeq E', \quad E \simeq S(p) \times P(q) \times K^r, \quad E' \simeq S(q) \times P(p) \times K^r,$$

donde el símbolo $\simeq$ indica isomorfía isométrica. De donde se deduce que $p = q$, pues basta tener en cuenta que mediante una isometría lineal una base ortogonal se transforma en otra base ortogonal, y además el número de elementos de una base con norma dada se conserva.

Utilizando para las bases y los coeficientes las mismas notaciones que en [5], el producto interno se expresa de la siguiente manera:

$$\langle \sum_{i,n} x_i^n e_i^n, \sum_{i,n} y_i^n e^n{}_i \rangle = \sum_{i,n} x_i^n y_i^{-n}$$

donde el superíndice n recorre Z, y el subíndice i recorre el conjunto

$$\{0, 1, \ldots, p_n\} \quad \text{si} \quad n \neq 0,$$

y el conjunto

$$\{0, 1, \ldots, r\} \quad \text{si} \quad n = 0.$$

Como consecuencia de esta representación se obtiene:

TEOREMA 9.—*Todo V-espacio autodual es (K)-espacio.*

DEMOSTRACIÓN.—Si x es un vector no nulo, su norma es igual a la de algún elemento de la base e_i^n, de manera que el coeficiente correspondiente x_i^n no sea nulo.

Entonces, como $p = q$, hay algún otro elemento en la base de la forma e_i^{-n}. Este último puede tomarse como $\bar{x}$.

COROLARIO.—*Si L es un subespacio lineal de un V-espacio autodual, $L^\perp$ es ortogonal nórmico a L si y sólo si L es un (K)-espacio.*

DEMOSTRACIÓN.—Se sigue de los teoremas 7 y 9.

H. Gross y H. A. Kaller [2] demuestran que en varios casos de espacios no arquimedianos con producto interno (sobre un cuerpo no trivialmente valorado), existen siempre subespacios cerrados que no son ortocomplementados, probando para ello que hay subespacios cerrados con ortogonal-escalar nulo.

A la vista del corolario (b) al teorema 1, es claro que ese razonamiento no puede trasladarse a los espacios autoduales sobre un cuerpo con valoración trivial, y sin embargo la conjetura final sigue manteniéndose, ya que al menos para los V-espacios cuya norma no sea la trivial, es cierta:

TEOREMA 10.—*Todo V-espacio autodual con algún vector de norma distinta de la unidad, contiene necesariamente algún subespacio cerrado que no es ortocomplementado.*

DEMOSTRACIÓN.—Según el teorema 8, si hay algún vector de norma distinta de la unidad, existe un $n \in N$ tal que $p_n \neq 0$; entonces el vector básico $x = e^n_{p_n}$ es isótropo.

Y llamando $L = [x]$, L es cerrado, luego $L = L^{\perp\perp}$. En cambio, $x \in L \cap L^\perp$, luego $L + L^\perp$ no es ni siquiera denso en el total (teorema 2).

Bibliografía

[1] Bayod, J. M.: *Productos internos en espacios normados no arquimedianos*. Tesis. Universidad de Bilbao, 1976.

[2] Gross, H.-Keller, H. A.: *On the definition of Hilbert space*. «Manuscripta Math.», 23 (1977), 67-90.

[3] Ingleton, A. W.: *The Hahn-Banach theorem for non-archimedean valued fields*. «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 48 (1952), 41-45.

[4] Kalisch, G. K.: *On* p-*adic Hilbert spaces*. «Ann. of Math.», 48 (1947), 180-192.

[5] Martínez Maurica, J. J.: *Diagramas de estados de operadores entre espacios normados no arquimedianos*. Tesis. Universidad de Bilbao, 1977.

[6] Robert, P.: *On some non-archimedean normed linear spaces*. «Comp. Math.», 19 (1968), 1-77.

[7] Springer, T. A.: *Quadratic forms over fields with a discrete valuation, I*. «Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.», 58 (1955), 352-362.

[8] Treiber, D.: *Beitrage zur nicht-archimedischen Funktionalanalysis*. Dissertation. Universitat Köln, 1971.

[9] Van der Put, M.: *Espaces de Banach non-archimediennes*. «Bull. Soc. Math. France», 97 (1969), 309-320.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias, Santander