CARACTERIZACION DEL ANILLO DE FUNCIONES DIFERENCIABLES DE UNA VARIEDAD

por

JAIME MUÑOZ MASQUE

En el presente artículo se expone de modo resumido una caracterización de los anillos de funciones diferenciables de una variedad.

El profesor Juan B. Sancho Guimerá me propuso dicho tema (bajo cuya dirección se ha desarrollado) en la hipótesis de que tal caracterización era posible basándose, por una parte, en la teoría general de las álgebras localmente convexas, fundamentalmente en los teoremas de localización para tales álgebras (que permiten un tratamiento sistemático de reducción a la localidad) y en su cálculo diferencial, y por otra, en la posibilidad de definir intrínsecamente la frontera de un espacio topológico sin necesidad de sumergirlo en un espacio ambiente.

Para una exposición de esta última cuestión fundada en la teoría aritmética de la dimensión de espacios topológicos, puede consultarse [5].

Las referencias generales para la teoría de las álgebras localmente convexas son [1] y [2] exclusivamente.

Para no interrumpir la exposición, se exponen a continuación los convenios utilizados.

Se consideran únicamente álgebras localmente convexas, conmutativas y unitarias sobre el cuerpo de los números complejos, y se designa por X el espectro topológico de una de tales álgebras.

Dados dos espacios de Fréchet E, F, se designa por $E \otimes F$ su producto tensorial provisto de la topología π, y por $E \widehat{\otimes} F$ su completado.

El término «diferenciable» está siempre entendido en el sentido C^∞, y se supone que la topología de una variedad posee una base numerable de abiertos.

DEFINICION 1.—Se dice que un álgebra de Fréchet simétrica esta *topológicamente finito generada* si posee un número finito de elementos autoconjugados cuyo anillo de polinomios es denso en el álgebra.

PROPOSICIÓN 1.—El espectro de un álgebra de Fréchet simétrica, regular, semisimple, de espectro localmente compacto y topológicamente finito generada es un espacio topológico de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN.—Si $(a_1, \ldots, a_n)$ es un sistema de generadores del álgebra, la aplicación $\phi \colon X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$ es una inyección continua. Si X es compacto, se concluye. En caso contrario, fácilmente se obtiene un elemento a_0 del álgebra, tal que:

$$\lim_{x \to \infty} a_0(x) = \infty,$$

en el sentido de la compactificación de Alexandroff.

Así pues, $\phi' = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ es una inyección cerrada.

PROPOSICIÓN 2.—Sea X un espacio localmente compacto de dimensión topológica n. El functor

$$F \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^n_c(X; F), \mathbb{Z}),$$

definido en la categoría de haces abelianos sobre X, es representable por un haz $\mathbb{T}_X$, llamado *haz de orientación* del espacio X.

DEMOSTRACIÓN.—Dicho functor es exacto por la izquierda en virtud de la acotación cohomológica (es decir: $H^i_c(X; F) = 0$, para $i > n$) y conmuta con límites inductivos. El enunciado es consecuencia, pues, del teorema general de representatividad de Grothendieck.

NOTA.—Para la utilización del teorema de representatividad en la teoría general de dualidad con aplicaciones a la dualidad de Poincaré y a la Geometría algebraica, puede consultarse la exposición resumida de [3].

DEFINICIÓN 2.—Un espacio topológico se llama *orientable* si su haz de orientación es el haz constante de los números enteros.

TEOREMA 1.—Sea X un subespacio compacto de dimensión n del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. El haz de orientación $\mathbb{T}_X$ es un haz constante de fibra $\mathbb{Z}$ en el interior de X, y se anula en los puntos de la frontera.

DEMOSTRACIÓN.—Para calcular las secciones de $\mathbb{T}_X$ sobre un abierto U de X, basta sustituir F por $\mathbb{Z}_U$ en la definición de $\mathbb{T}_X$, y se obtiene:

$$\Gamma (U, \mathbb{T}_X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}} (H^n_c (U ; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}).$$

Por tanto, la restricción de $\mathbb{T}_X$ al interior de X coincide con el haz de orientación de $\mathring{X}$.

Por otra parte, en virtud de una caracterización clásica de los puntos frontera ([4], pág. 96, A), la condición necesaria y suficiente para que un punto x pertenezca a la frontera de X es que posea un sistema fundamental de entornos abiertos $\{U_i\}$ en X para los cuales toda aplicación continua de $X - U_i$ en la esfera unidad S_{n-1} puede extenderse hasta X.

Ahora bien, por el teorema de extensión de Hopf ([4], pág. 149, corolario 2), a fin de que la condición anterior se verifique es necesario y suficiente que el homomorfismo natural de restricción

$$H^{n-1} (X ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n-1} (X - U_i ; \mathbb{Z})$$

sea epiyectivo.

Así pues, tomando cohomología en la sucesión exacta del subespacio cerrado $X - U_i$, se obtiene una inyección

$$0 \longrightarrow H^n_c (U_i ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n (X ; \mathbb{Z}).$$

Pero $H^n (X ; \mathbb{Z}) = 0$, por la acotación cohomológica. En consecuencia la fibra de $\mathbb{T}_X$ es nula en los puntos frontera.

DEFINICIÓN 3.—Dada un álgebra de Fréchet A, se llama *ideal de la diagonal* de A al núcleo del morfismo $A \,\widehat{\otimes}\, A \longrightarrow A$, obtenido completando el producto

$$A \otimes A \longrightarrow A, \qquad a \otimes b \longmapsto a\, b.$$

Si se designa por Δ y $\Delta_{\mathrm{alg.}}$, respectivamente, los núcleos de tales morfismos, por la conservación de la exactitud al completar, es claro que:

$$\Delta = \bar{\Delta}_{\text{alg.}}.$$

El *módulo de las diferenciales lineales* de A se define ahora como el A-módulo $\Omega_A = \Delta/\bar{\Delta}^2$. La diferencial de un elemento $a \in A$ es, por definición, la clase de restos módulo $\bar{\Delta}^2$ de $1 \otimes a - a \otimes 1$.

En lo sucesivo, el anillo producto $A \widehat{\otimes} A$ se considerará como A-módulo vía la sección $a \longmapsto a \otimes 1$.

DEFINICIÓN 4.—Sea A un álgebra de Fréchet simétrica, semisimple, de espectro localmente compacto y E un A-módulo topológico. Se llama *topología débil* sobre E a la topología menos fina para la cual permanecen continuas todas las formas lineales continuas $\omega \in \mathrm{Hom}_A(E, A)$, si se considera en A la topología de la convergencia uniforme sobre los subespacios compactos de su espectro.

Una base de entornos del cero para la topología débil la constituyen los conjuntos

$$\{e \in E\,;\ |\,\omega(e)\,|_K < \varepsilon\}.$$

TEOREMA 2.—Sea A un álgebra de Fréchet, simétrica, semisimple, regular y de espectro localmente compacto. Las condiciones necesarias y suficientes para que A sea el álgebra de las funciones diferenciables sobre un abierto euclídeo, son las siguientes:

1.ª A posee un sistema finito de generadores topológicos autoconjugados $(a_1, \ldots, a_n)$, cuyo número es igual a la dimensión de su espectro: $n = \dim X$.

2.ª El ideal de la diagonal de A es finito generado y todas sus potencias son cerradas.

3.ª Ω_A es un módulo libre de rango n.

4.ª La topología de A coincide con la de la convergencia uniforme definida sobre los desarrollos formales de sus elementos; es decir, si se considera en cada uno de los A-módulos $A \widehat{\otimes} A/\Delta^m$ la topología débil, la inyección

$$A \longrightarrow \varprojlim A \otimes A/\Delta^m,$$

deducida por paso al límite de la sección $a \longmapsto 1 \otimes a$ valorada en el m-ésimo cociente, induce en A la topología dada.

5.ª El espacio X es orientable.

Demostración.—La necesidad de las condiciones se establece por comprobación directa. La demostración de su suficiencia se divide en varios apartados:

1. Se probará en primer lugar que la inyección

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \phi(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x)),$$

es un homeomorfismo de X con un abierto U de $\mathbb{R}^n$.

En efecto, si K es un entorno compacto n-dimensional de un punto $x \in X$, es claro, en virtud de la hipótesis, que la fibra de $\mathbb{T}_K$ en x es $\mathbb{Z}$. Así pues, $\phi(x)$ es un punto interior a $\phi(K)$, por el teorema 1.

2. Las diferenciales de los generadores $d\,a_1, \ldots, d\,a_n$ son una base de Ω_A. Como el ideal algebraico de la diagonal es denso en Δ, el submódulo engendrado por las diferenciales exactas es denso en Ω_A. Pero el anillo de polinomios de $a_1, \ldots, a_n$ es denso en A. Se sigue pues, de la continuidad de la diferencial, que toda diferencial exacta de Ω_A es aproximable arbitrariamente por combinaciones lineales de las diferenciales de los generadores. En consecuencia, todo se reduce a probar el siguiente:

Lema.—Toda aplicación lineal de imagen densa $\pi : L \longrightarrow L'$ entre A-módulos libres de rango finito, es epiyectiva.

Para $L' = A$, el lema es consecuencia inmediata de no poseer A ideales densos finito generados. Si $(e_1, \ldots, e_r)$ es una base de L′, proyectando sobre el submódulo (e_1), se deduce la existencia en la imagen de π de un vector de la forma

$$e'_1 = e_1 + \lambda_2\, e_2 + \ldots + \lambda_r\, e_r.$$

Proyectando ahora sobre el segundo sumando de la descomposición

$$L' = (e'_1) \oplus (e_2, \ldots, e_r)$$

y procediendo por inducción sobre el rango de L′, se concluye fácilmente.

3. Sea $B = A \widehat{\otimes} A$ y Δ' el ideal engendrado por

$$1 \otimes a_1 - a_1 \otimes 1, \ldots, 1 \otimes a_n - a_n \otimes 1.$$

Existe un entorno abierto V de la diagonal en $X \times X$ sobre el cual Δ y Δ' coinciden.

En efecto, sea $E = \Delta/\Delta'$ y S el sistema multiplicativo de las funciones de B que no se anulan en ningún punto de la diagonal. En virtud de lo anterior:

$$E \otimes_B (B/\Delta) = 0;$$

o sea:

$$\Delta \cdot E = E,$$

y localizando:

$$\Delta_S \cdot E_S = E_S.$$

Aplicando el lema de Nakayama, que es válido para Δ_S en B_S, se tiene: $E_S = 0$, y como Δ es finito generado, de la igualdad en germen se deduce la igualdad en un entorno.

4. Los elementos de A se expresan como función diferenciable de los generadores. Dado $a \in A$, se puede escribir:

$$d\,a = b_1\,d\,a_1 + \ldots + b_n\,d\,a_n.$$

Pasando a V, existirán elementos $b_{ij} \in B_V$, tales que, para cada $(x, y) \in V$, se verifique:

$$a(y) - a(x) = \sum_i b_i(x)(y_i - x_i) + \sum_{i,j} b_{ij}(x, y)(y_i - x_i)(y_j - x_j).$$

Por inducción sobre el orden de derivación, se concluye.

5. $A = C^\infty(U)$.

Sea P_i una sucesión de polinomios que converge en $C^\infty(U)$ a una función diferenciable. Bastará demostrar que la sucesión de polinomios $\phi^* P_i$ es fundamental en A. Para ello y en virtud de la 4.ª condición del enunciado, considérese una forma lineal ω sobre B/Δ^{m+1}.

Fijado un compacto K, las derivadas parciales de $P_i - P_j$ hasta el orden m estarán mayoradas en valor absoluto sobre K por ε, a partir de un cierto término de la sucesión.

Desarrollando formalmente P_i por la fórmula de Taylor y despreciando los términos de orden superior a m, se obtiene una acotación de la forma:

$$| \omega (\phi^* P_i - \phi^* P_j) |_K < C \varepsilon,$$

donde C es una constante que sólo depende de m y de los valores que en K toma ω sobre los productos

$$(a_1 (y) - a_1 (x))^{\alpha_1} \dots (a_n (y) - a_m))^{\alpha_n},$$

para $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < m + 1$.

Corolario.—En las hipótesis del teorema precedente, si el sistema de generadores $(a_1, \dots, a_n)$ es propio (es decir:

$$\lim_{x \to \infty} (a_1 (x), \dots, a_m (x)) = \infty,$$

en el sentido de la compactificación de Alexandroff), el álgebra A coincide con el álgebra de las funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}^n$, y recíprocamente.

En este caso, la 5.ª condición del enunciado anterior es superflua.

Definición 5.—Sea A un álgebra de Fréchet simétrica, semisimple, regular, de espectro localmente compacto y topológicamente finito generada. Se llama *dimensión analítica* de A al menor número natural n para el cual cada punto del espectro posee un entorno abierto U tal que el álgebra A_U está topológicamente generada por n elementos autoconjugados.

Se sigue de la definición que la dimensión analítica de un anillo es mayor o igual que la dimensión de su espectro. Así pues, la dimensión analítica del anillo de funciones diferenciables de una variedad es igual a la dimensión de la variedad.

Con tal concepto el teorema de caracterización puede establecerse finalmente en los siguientes términos:

TEOREMA 3.—Sea A un álgebra de Fréchet simétrica, semisimple, regular, de espectro localmente compacto y topológicamente finito generada. Las condiciones necesarias y suficientes para que A sea el álgebra de las funciones diferenciables de una variedad, son las siguientes:

1.ª La dimensión analítica de A es igual a la dimensión topológica de su espectro.

2.ª El ideal de la diagonal es finito generado y todas sus potencias son cerradas.

3.ª Ω_A es un módulo proyectivo finito generado de rango igual a la dimensión analítica de A.

4.ª La topología de A coincide con la de la convergencia uniforme definida sobre los desarrollos formales de sus elementos.

5.ª El espacio X es localmente orientable.

REFERENCIAS

[1] MUÑOZ DÍAZ, J.: *Caracterización de las álgebras diferenciables y síntesis espectral para módulos sobre tales álgebras.* Tesis.

[2] MUÑOZ, J. y ORTEGA, J. M.: *Sobre las álgebras localmente convexas.* «Collectanea Mathematica», vol. XX, 1969.

[3] HERNÁNDEZ RUIPÉREZ, D.: *Teoremas de representación y dualidad.* «IV Reunión de la Agrupación de Matemáticos de expresión latina». Palma de Mallorca, 1977.

[4] HUREWICZ, W. y WALLMAN, H.: *Dimension Theory.* Princeton University Press.

[5] GALIÁN JIMÉNEZ, G.: *Dimensión aritmética de un espacio topológico.* «IV Reunión de la Agrupación de Matemáticos de expre sión latina», Palma de Mallorca, 1977.

[6] GODEMENT, R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, Salamanca