SOBRE COMPACTIFICACIONES DE WALLMAN-FRINK DE ESPACIOS DISCRETOS (1)

por

MARIA EMILIA ALONSO GARCIA, JOSE JAVIER ETAYO GORDEJUELA, JOSE MANUEL GAMBOA MUTUBERRIA y JESUS MARIA RUIZ SANCHO

Dado un espacio T_{3a}, (X, T), es posible obtener una compactificación T_2 del mismo, mediante ultrafiltros asociados a ciertas bases distinguidas de cerrados de (X, T) (Frink [4]). Se plantea así el problema siguiente: ¿Puede obtenerse toda compactificación T_2 de (X, T) por este método? Desde el año 1964 en que Frink lo planteó, este interrogante ha tenido respuestas afirmativas parciales. Sin embargo, la solución definitiva es negativa. Si denominamos de Wallman-Frink las compactificaciones de que nos ocupamos (pues el trabajo de Frink generaliza uno anterior de Wallman), podemos enunciar:

TEOREMA.—Sea c un cardinal tal que $2^c \geqslant \aleph_2$. Entonces existe un espacio T_{3a} de cardinal c, y una compactificación T_2 del mismo, con peso 2^c, que no es de Wallman-Frink.

Este resultado se debe a Ul'janov [8].

Por otro lado, A. K. Steiner y E. F. Steiner [6] probaron:

TEOREMA.—Sea (X, T) un espacio topológico y $((X', T'), f)$ una compactación T_2 de (X, T). Si la compactación T_2 cociente de la de Stone-Čech de (X, T_D) (T_D es la topología discreta en X), definida por la partición

$$\{\{e(x)\}: x \in X\} \cup \{\beta(f)^{-1}(x') \cap (\beta(X) - e(X)): x' \in X'\}$$

(1) Esta nota forma parte de la labor realizada por los autores disfrutando de una beca del Instituto Nacional de Ayuda y Promoción del Estudiante, y fue dirigida por el profesor Enrique Outerelo Domínguez, de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

es de Wallman-Frink se verifica que $((X', T'), f)$ es de Wallman-Frink.

L. B. Šapiro [5] fue el primero en reducir el problema a obtener compactificaciones de espacios discretos. Por los dos teoremas anteriores, se deduce que existen espacios discretos que admiten compactificaciones T_2 que no son de Wallman-Frink.

Como consecuencia del trabajo desarrollado durante el estudio de este problema, se han introducido los siguientes conceptos:

Definición 1.—Una colección $\mathcal{A}$ de cerrados de un espacio topológico se denomina base anillo de cerrados regulares si: (i) para cualesquiera $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$, se tiene

$$C_1 \cap C_2 \in \mathcal{A} \quad \text{y} \quad C_1 \cup C_2 \in \mathcal{A},$$

(ii) para cada cerrado F del espacio, y cada punto $x \notin F$, existe $C \in \mathcal{A}$ con

$$x \in C, \quad C \cap F = \emptyset,$$

(iii) para cada

$$C \in \mathcal{A}, \quad \overline{\mathring{C}} = C.$$

Definición 2.—Un espacio compacto y T_2 se denomina de Wallman-Frink si es una compactificación de Wallman-Frink de cada uno de sus subespacios densos.

Un espacio compacto y T_2 se denomina de Wallman regular si posee una base anillo de cerrados regulares.

Un espacio compacto y T_2 se denomina Δ-espacio si posee una base $\mathcal{C}$ de cerrados tal que

$$\overline{(C_1 - C_2)} \cap \overline{(C_2 - C_1)} = \emptyset$$

para todo $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$.

Se tiene:

Proposición 1.—a) Un Δ-espacio es un espacio de Wallman-Frink regular (Bandt [1]).

b) Un espacio de Wallman regular es un espacio de Wallman-Frink (Steiner [7]).

c) Todo espacio compacto, T_2 y de peso $\leqslant \aleph_1$, es un Δ-espacio (Bandt [1]).

d) Todo subespacio cerrado de un Δ-espacio es un Δ-espacio (Bandt [1]).

e) Si $\tau \geqslant \aleph_2$, el cubo $([0, 1], T\, u \mid_{[0,1]})^{\tau}$ no es un Δ-espacio (L. B. Šapiro, citado en Ul'janov [8]).

Lema 1.—Sea (X, T) un espacio topológico compacto y T_2, y D un subconjunto denso de (X, T). La condición necesaria y suficiente para que (X, T) sea una compactación de Wallman-Frink de $(D, T/_D)$ es que exista una base anillo $\mathcal{H}$ de cerrados de (X, T), tal que $\overline{A \cap D} = A$ para cada $A \in \mathcal{H}$ (Chandler [3]).

Proposición 2.—Toda compactificación de Wallman-Frink de un espacio discreto es un espacio de Wallman regular.

Demostración.—Por el lema 1, si ((X′, T′), f) es una compactificación de Wallman-Frink de un espacio discreto (X, T), existe $\mathcal{H}$ base anillo de cerrados de (X′, T′), tal que $\overline{A \cap f(X)} = A$ para todo $A \in \mathcal{H}$.

Así,

$$\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{A \cap f(X)}}} = \overline{\mathring{\overline{A \cap \mathring{f}(X)}}} = \overline{A \cap \mathring{f}(X)} = \overline{A \cap f(X)} = A,$$

y los miembros de $\mathcal{H}$ son cerrados regulares.

En orden a estudiar el resultado anterior para Δ-espacios, se enuncia un lema que se sigue trivialmente del teorema 9 de Bentley [2].

Lema 2.—Sean (X, T) un espacio topológico discreto, ((X′, T′), f) una compactificación T_2 de

$$(X, T), \quad \text{y} \quad K = X' - f(X).$$

Se supone que existe una aplicación continua

$$g: (X', T') \longrightarrow (K, T'/_K)$$

tal que:

a) g es la identidad sobre K.

b) Si $A \subset f(X)$ es finito, $g(f(X) - A) = K$.

Entonces $((X', T'), f)$ es una compactificación de Wallman-Frink de (X, T).

Este lema permite establecer:

PROPOSICIÓN 3.—Todo espacio compacto y T_2 sin puntos aislados es el residuo de una compactificación de Wallman-Frink de un espacio discreto.

DEMOSTRACIÓN.—Sea (K', T') compacto, T_2, sin puntos aislados. Entonces card $(K') \geqslant \aleph_0$.

Sea (X, T) un espacio discreto con card $(X) \geqslant$ card (K'). Así, existe una aplicación suprayectiva y continua

$$g: (X, T) \longrightarrow (K', T')$$

con $g^{-1}(x)$ infinito para cada $x \in K'$.

Sea $((X^*, T^*), i)$ la compactificación de Alexandroff de (X, T). Entonces,

$$e: (X, T) \longrightarrow (X^*, T^*) \times (K', T'),$$

dada por

$$e(x) = (x, g(x))$$

es una inmersión topológica, y

$$((X'', T'') = (\overline{e(X)}, Tp/_{\overline{e(X)}}), e)$$

es una compactificación T_2 de (X, T).

Sea ω el punto de X^* que no pertenece a X. Por la elección de g se sigue que

$$\{\omega\} \times K' \subset X'',$$

y por ser (X, T) discreto y K', T_2, se tiene que

$$X'' - e(X) \subset \{\omega\} \times K'.$$

Así,

$$\{\omega\} \times K' = X'' - e(X).$$

Resta probar que $((X'', T''), e)$ es una compactificación de Wallman-Frink de (X, T).

Se considera la aplicación continua

$$f\colon (X'', T'') \longrightarrow (\{\omega\} \times K', T p/_{\{\omega\}\times K'})$$

dada por

$$f(x, y) = (\omega, y)$$

que verifica la condición a) del lema 2. Sea $A \subset e(X)$ finito. Si $y \in K$, como $g^{-1}(y)$ es infinito, existe

$$x \in g^{-1}(y) - e^{-1}(A),$$

con lo que

$$(x, y) \in e(X) - A.$$

Así,

$$f(e(X) - A) = \{\omega\} \times K',$$

y, por el lema 2, queda probado que $((X'', T''), e)$ es una compatificación de Wallman-Frink de (X, T).

EJEMPLO 1.—Sea (K', T') un espacio topológico compacto, T_2 sin puntos aislados y que no sea Δ-espacio (prop. 1 e)). Según la proposición 3, existen un espacio discreto (X, T) y una compactificación $((X'', T''), f)$ de Wallman-Frink, de (X, T), tales que $X'' - f(X) = K$. Así, (X'', T'') no es Δ-espacio pues contiene a (K', T'), que no lo es, como subespacio cerrado. Esto prueba que no toda compactificación de Wallman-Frink de un espacio discreto es un Δ-espacio.

A continuación se demuestra que algunas compactificaciones de espacios discretos son Δ-espacios.

PROPOSICIÓN 4.—Sea (X, T) un espacio topológico discreto, y ((X', T'), f) una compactificación T_2 de (X, T) con $X' - f(X)$ numerable. Entonces (X', T') es un Δ-espacio.

(Este resultado incluye las compactificaciones por un número finito de puntos, y en particular, la compactificación de Alexandroff.)

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathcal{C}$ la colección de todos los cerrados de (X', T') con frontera vacía. Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, se verifica que

$$\overline{(C_1 - C_2)} \cap \overline{(C_2 - C_1)} \subset \overline{C_1} \cap \overline{X' - C_1} = \mathrm{Fr}\,(C_1) = \varnothing\,.$$

Por lo tanto basta probar que $\mathcal{C}$ es base de cerrados.

Sean F cerrado en

$$(X'\ T')\,, \quad \text{y} \quad x \notin F.$$

Se considera una aplicación continua

$$g : (X', T') \longrightarrow ([0, 1]\,, \mathrm{Tu}/_{[0,1]})$$

con

$$g(F) = \{0\}, \quad \text{y} \quad g(x) = 1.$$

Como $g(X' - f(X))$ es numerable, existe

$$t \in (0, 1) - g(X' - f(X)).$$

Se considera el cerrado de (X', T'),

$$C = g^{-1}([0, t]).$$

Como

$$g(x) \notin [0, t],$$

se tiene $x \notin C$, y es claro que $F \subset C$. Veamos que $\mathrm{Fr}\,(C) = \varnothing$. En efecto, de

$$g^{-1}([0, t]) \subset C$$

se sigue que

$$\operatorname{Fr}(C) \subset g^{-1}(t)$$

y por la elección de t se tiene que $\operatorname{Fr}(C) \subset f(X)$. Pero los puntos de $f(X)$ son abiertos en (X', T'), ((X, T) es localmente compacto), y la frontera de un conjunto no puede contener tales puntos. Así $\operatorname{Fr}(C) = \varnothing$.

Por lo tanto, todo cerrado de (X', T') se puede obtener como intersección de elementos de $\mathcal{C}$.

LEMA 3.—Sea (X, T) un espacio topológico discreto, y $((\beta X, \beta T), e)$ su compactificación de Stone-Čech. Si G es un abierto de $(\beta X, \beta T)$, también lo es $\overline{G}$.

DEMOSTRACIÓN.—Sea $Y = G \cup (\beta X - \overline{G})$. La aplicación

$$f\colon (Y, \beta T_{/Y}) \longrightarrow ([0, 1], \mathrm{Tu}_{/[0,1]})$$

que vale 1 sobre G y 0 sobre $\beta X - \overline{G}$ es continua. Como Y es denso en $(\beta X, \beta T)$, se tiene que $Y \supset e(X)$. Luego existe una aplicación continua

$$g\colon (\beta X, \beta T) \longrightarrow ([0, 1], \mathrm{Tu}_{/[0,1]}),$$

tal que

$$g \cdot e = f_{/e(X)} \cdot e .$$

Pero al ser $e(X)$ denso en

$$(Y, \beta T_{/Y}), \quad g_{/Y} = f,$$

Así,

$$G \subset g^{-1}(1), \quad \beta X - \overline{G} \subset g^{-1}(0),$$

y por lo tanto

$$\overline{G} \cap \overline{(\beta X - \overline{G})} = \varnothing .$$

De esta forma,

$$\overline{G} \subset \beta X - \overline{(\beta X - \overline{G})} = \mathring{G},$$

lo que prueba la tesis.

PROPOSICIÓN 5.—La compactificación de Stone-Čech de un espacio discreto es un Δ-espacio.

DEMOSTRACIÓN.—Sea (X, T) discreto y $((\beta X, \beta T), e)$ su compactificación de Stone-Čech. Sea

$$\mathcal{C} = \{ \overline{e(A)} \mid A \subset X \}.$$

Como $\mathcal{P}(X)$ es familia normal de cerrados de X, que proporciona mediante el método de Wallman-Frink la compactificación de Stone-Čech, se sigue que $\mathcal{C}$ es base de cerrados de $(\beta X, \beta T)$.

Además, por el lema 3, si $A, B \in \mathcal{P}(X)$, los conjuntos

$$\overline{e(A)} - \overline{e(B)} \quad y \quad \overline{e(B)} - \overline{e(A)}$$

son cerrados en $(\beta X, \beta T)$, de donde $(\beta X, \beta T)$ es Δ-espacio.

Esta proposición nos proporciona el siguiente:

EJEMPLO 2.—Sea (X, T) un espacio topológico discreto y (X', T') una compactificación T_2 de (X, T) que no es de Wallman-Frink. Entonces $(\beta X, \beta T)$ es un Δ-espacio y (X', T') es un espacio cociente de $(\beta X, \beta T)$. Se tiene así que, en general, un cociente de un Δ-espacio no es de Wallman-Frink.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BANDT, C.: *On Wallman-Shamin compactifications.* «Math. Nachr.», V. 77, 1977, 333-351.
[2] BENTLEY, H. L.: *Some Wallman compactifications of locally compact spaces.* «Fundamenta Math.», V. LXXV, 1972, 13-24.
[3] CHANDLER, R. E.: *Hausdorff compactifications.* Dekker, 1976.
[4] FRINK, O.: *Compactifications and semi-normal spaces.* «Amer. J. Math.», V. 86, 1964, 602-607.

[5] ŠAPIRO, L. B.: *Reduction of the main problem on compactifications of Wallman type.* «Soviet Mathe. Dokl.», V. 15, 1974, 1020-1023.

[6] STEINER, A. K. y STEINER, E. F.: *On the reduction of the Wallman compactification problem to discret spaces.* «General Topology and its Applications», V. 7, 1977, 35-37.

[7] STEINER, E. F.: *Wallman spaces and compactifications.* «Fundamenta Math.», V. LXI, 1968, 295-304.

[8] UL'JANOV, V. M.: *Solution of a basic problem on compactifications of Wallman type.* «Soviet Math. Dokl.», V. 18, 1977, 567-571.