

Bourbaki

FERNANDO BOMBAL*

Pocos nombres han tenido una mayor influencia en el desarrollo de la Matemática del siglo XX que el de Nicolás Bourbaki. No cabe duda de que su obra *Eléments de Mathématique* que, junto a fervientes partidarios, tiene también acérrimos detractores, ha influido decisivamente en el desarrollo y la evolución de la matemática contemporánea. Lo curioso es que Nicolás Bourbaki no existe. En efecto, como es bien conocido, Nicolás Bourbaki es el seudónimo colectivo de un grupo de matemáticos, la mayoría franceses, que nació en la década de los 30 y se ha ido renovando con el tiempo, responsable de la publicación de un monumental y aún inconcluso tratado que tiene como objetivo la exposición, de forma sistemática y rigurosa, de las herramientas básicas para el desarrollo de toda la Matemática. El título mismo de la obra muestra claramente el intento de emular el papel que tuvieron los *Elementos* de Euclides en la Geometría griega.

Como hemos dicho, el grupo fue fundado a mediados de los años 30 por algunos jóvenes y brillantes matemáticos (de edades comprendidas entre los 24 y 30 años), todos ellos antiguos alumnos de L'École Normale Supérieure de Paris y pertenecientes a promociones cercanas. Aunque, como veremos, el objetivo original de los fundadores del grupo era muy modesto, no hay duda de que su actitud respondía a un sentimiento de frustración y protesta por la situación de las Matemáticas en Francia. En efecto, después de la sangría que supuso la I Guerra Mundial, la Matemática francesa, otrora líder de la Matemática universal, había ido cayendo en el adocenamiento y el provincialismo. Así, Jean Dieudonné (uno de los fundadores) narra que en esa época no había nadie en Francia que supiera algo de temas como la teoría espectral de Hilbert-Riesz, o la representación de grupos o la teoría de Lie (con la excepción de Elie Cartan, que por entonces se encontraba totalmente aislado). La vida científica francesa estaba dominada por dos o tres camarillas de académicos, más preocupados por conservar sus parcelas de poder que por el desarrollo de la investigación. Los jóvenes fundadores del grupo Bourbaki querían acabar con esta situación y recuperar el nivel y calidad de la investigación matemática francesa.

El origen de Bourbaki

Según cuenta André Weil en su autobiografía [10], al regreso de sus vacaciones de verano de 1934 coincidió en Estrasburgo con su colega y amigo Henri Cartan, ambos

* Académico Correspondiente

encargados conjuntamente del curso sobre Cálculo Diferencial e Integral. Tradicionalmente se usaba como texto en las Universidades francesas el libro de Goursat, que ninguno de los dos jóvenes amigos encontraba especialmente satisfactorio, lo que motivaba continuas consultas mutuas sobre cómo desarrollar tal o cual tema. A fines de 1934, Weil creyó tener una idea luminosa: “Somos cinco o seis amigos, encargados del mismo curso en distintas Universidades”, -le dijo a Cartan- “Reunámonos y arreglemos esto de una vez por todas.” En este momento, aunque ninguno de los dos lo sabía, nació Bourbaki.

Dicho y hecho. Cartan y Weil se pusieron en contacto con algunos de sus compañeros *normalianos* (Jean Dieudonné, Jean Delsarte y Claude Chevalley, entre otros) y se reunieron varias veces en un restaurante del bulevar Saint Michel de París. El objetivo era redactar un curso o tratado de análisis que reemplazara al de Goursat y sirviera de base para la enseñanza del análisis a nivel de Licenciatura. En las reuniones parisinas se fijaron los títulos de los Capítulos y se distribuyó el trabajo entre los asistentes. Se encargaron informes sobre gran número de temas, desde la teoría de conjuntos a las funciones analíticas y las ecuaciones en derivadas parciales. Pronto se hizo evidente que estas reuniones no eran suficiente para discutir los informes previos con la amplitud que convenía, por lo que acordaron dedicar dos semanas de las vacaciones de verano para reunirse en un lugar apropiado. Así, en Julio de 1935, Bourbaki tuvo su primer Congreso en unos confortables locales que la Universidad de Clermont poseía en Besse-en-Chandesse. Estos fueron, según cita Chevalley en una entrevista [7], los asistentes: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Dieudonné, Jean Delsarte, Szolem Mandelbrojt, Rene de Possel y André Weil, aunque alguna vez se ha mencionado también a Ch. Ehresmann como integrante del grupo.

En cuanto el proyecto tomó cuerpo como obra colectiva, y aparecieron los primeros indicios de que la misma podría convertirse en un proyecto mucho más amplio, con posibilidad de nuevas incorporaciones y variaciones en el grupo, los jóvenes integrantes del Congreso fundacional decidieron adoptar un nombre común que amparara los resultados que se fueran originando a lo largo del trabajo.

Mucho se ha escrito sobre las razones por las que los *fundadores* (como se les conoce en el grupo) eligieron el nombre de Bourbaki y, como el propio Weil reconoce, los propios integrantes del grupo han contribuido no poco a aumentar el misterio. De hecho, la mayor parte de ellos encuentra su propia broma tan divertida, que difunde con frecuencia historias sobre sí mismos, muchas veces falsas y a menudo contradictorias.

En el artículo sobre Bourbaki de la Enciclopedia Británica, se atribuye la elección del nombre a la memoria de un general francés de origen griego, Charles Denis Sautier Bourbaki, que participó en la guerra franco-prusiana y en 1871 sufrió una humillante derrota y fue hecho prisionero. Parece ser que intentó suicidarse, pero obviamente fracasó, ya que llegó a vivir hasta los 83 años. Esta es también la versión recogida en el artículo de Halmos [5]. Sin embargo, según cuenta André Weil en su autobiografía, la elección del nombre de Bourbaki tiene un origen más próximo y jocos, propio del grupo de jóvenes recién licenciados que lo adoptaron.

Al parecer, cuando Delsarte, Cartan y Weil eran estudiantes de primer año en la Escuela Normal Superior se les notificó, en impreso oficial, que un profesor de nombre vagamente escandinavo iba a dar tal día, a tal hora, una conferencia a la que se les

recomendaba vivamente asistir. El tal Profesor era en realidad Raoul Husson, estudiante de los últimos cursos, disfrazado con una gran barba patriarcal, quien, con extraño acento, desarrolló una pieza maestra de trabalenguas matemático, que terminó con un *teorema de Bourbaki* que dejó atónito al auditorio. (Al parecer, el bromista sí que tuvo en cuenta al general de Napoleón para atribuirle el nombre de su teorema). En el transcurso de los dos años que Weil pasó en la India había contado esta historia a uno de sus amigos, quien utilizó este nombre en una nota de contenido burlesco, pero de apariencia seria, que apareció en los *comptes rendus* de una academia provinciana. Al revivir esta anécdota en una de las reuniones, se acordó adoptar el nombre de Bourbaki como autor de la futura obra. La responsable de la elección del nombre de pila parece haber sido Eveline, la futura esposa de André Weil.

El problema de elegir un nombre se había hecho urgente a finales de 1935, cuando se decidió establecer de manera irrefutable la existencia de Bourbaki con la inmediata publicación de una nota en los *Comptes Rendus* de la Academia de Ciencias. Para ello, además de un nombre completo, hacía falta que un miembro de la Academia presentara el trabajo, avalando la seriedad de su contenido científico, junto con algunos detalles de la biografía de su autor. El propio Weil se encargó de escribir la nota y enviarla a Elie Cartan, quien estaba al corriente de las actividades y proyectos del grupo, junto con una carta explicativa y una pequeña “biografía” del autor, al que se atribuía un origen “poldavo”. Cartan aprovechó una agradable sobremesa con algunos colegas académicos para conseguir su aceptación.

Poldavia, patria de Bourbaki, también tiene su origen en una broma de los estudiantes de la Escuela Normal Superior: En 1910 los estudiantes se dedicaron a recoger diversos individuos en los bases de Montparnasse y, a cambio de algunos convites, les hicieron pasar por representantes de la “nación poldava”. Previamente se habían mandado cartas, dirigidas a personalidades de la política y la cultura, que comenzaban así: “Seguramente Vd. no ignora las desventuras de la nación poldava ...”. Se recibieron muchos testimonios de apoyo y simpatía y en el momento oportuno se convocó un acto público de solidaridad, que terminó con un emotivo discurso en el que el principal orador acabó con estas palabras: “... y yo, Presidente del Parlamento poldavo, vivo ahora, poble exilado, en una miseria tal que ni siquiera puedo comprarme pantalones.” Y, efectivamente, subiéndose a la mesa, mostró al público asistente lo cierto de sus palabras. (Cfr. [10], pág. 106-107).

Poldavia se convirtió así en la patria de origen de muchos de los personajes inventados por los bromistas *normalianos*. Como ejemplo, podemos citar el descrito por Halmos en ([5], pág.91): “Aproximadamente al mismo tiempo que Bourbaki comenzaba, otro grupo de bromistas inventó la figura de E.S. Pondiczery, un supuesto miembro del Instituto Real de Poldavia ... Su contribución más importante fue el único uso conocido de un seudónimo de segundo orden. Al presentar para su publicación un artículo sobre la teoría matemática de la caza mayor a *The American Mathematical Monthly*, Pondiczery pedía en una carta que se le permitiese usar un seudónimo, a causa de la naturaleza obviamente jocosa del tema. El editor estuvo de acuerdo y el artículo apareció (en 1938) bajo el nombre de H. Pétard.”

Para cerrar esta digresión sobre el nombre y la patria de Bourbaki, recogemos ahora un episodio narrado por Weil en su ya citada autobiografía: Hacia 1948, Nicole

Cartan pasó el teléfono a su marido diciéndole: “Bourbaki quiere hablar contigo”. En el teléfono, Henri Cartan oyó una voz que le decía: “Mi nombre es Bourbaki, y deseo entrevistarme con Vd.” Pensando que se trataba de una broma de alguno de sus colegas, Cartan contestó a su vez: -“Sin duda tiene Vd. una gran barba blanca, ¿no?” (es así, en efecto, como los miembros del grupo se lo representaban)- “No, no tengo barba, y quiero encontrarme con Vd. cuanto antes”. Cartan, escamado, concertó una cita. A la hora prevista vio aparecer un caballero de porte distinguido, que puso sobre la mesa un pasaporte diplomático a nombre de Nicolaïdes Bourbaki, consejero del embajador de Grecia. Explicó que la familia Bourbaki era muy conocida. Había rastreado su origen hasta llegar a dos hermanos que se distinguieron en Creta en el siglo XVII, en la resistencia contra los turcos. En la expedición a Egipto, Napoleón tuvo por piloto un Bourbaki. Su hijo llegó a ser oficial francés y de él descendía el general de Napoleón III que cita la historia. Nicolaïdes Bourbaki creía tener el árbol genealógico completo de la familia, y en él no aparecía ningún matemático. ¿Cómo era posible que se hubieran publicado con su nombre obras de matemáticas? Cartan se lo explicó y, desde entonces, y durante bastantes años, se convirtió en miembro honorario del grupo y participó a menudo en las cenas con las que terminaba cada Congreso.

Desarrollo y organización

El segundo Congreso Bourbaki iba a tener lugar, a propuesta de Weil, en El Escorial, pero la guerra civil española frustró este proyecto. En el último momento, la madre de Chevalley ofreció al grupo la casa que poseía en Chancais en Touraine, cerca de Vouvrai, donde también se celebró el siguiente Congreso. Como recuerda Chevalley, cuando parte de los asistentes llegaron a la estación de Amboise, se encontraron con el resto de sus compañeros esperándoles y profiriendo gritos de ¡Bourbaki!, ¡Bourbaki!, ante la mirada atónita de cuantos se encontraban en aquel momento en la estación. Esto muestra claramente el espíritu festivo y fraternal que existía entre los miembros fundadores.

Para el momento del segundo congreso, el propósito original del grupo se había quedado pequeño. Los grandes textos de Análisis clásicos (Jordan, Goursat) a los que, en principio, trataba el grupo de reemplazar, pretendían en pocos volúmenes recoger todo lo que un matemático necesitaba conocer antes de especializarse. Esta pretensión, ya absurda a finales del siglo XIX, era completamente irrealizable en el presente. Ante esta evidencia, los primeros Bourbakistas abandonaron su idea original de escribir un libro de texto para la enseñanza universitaria y se propusieron, en cambio, un objetivo mucho más ambicioso: en palabras de A. Weil “se trataba de construir una base suficientemente amplia y sólida para sustentar lo esencial de las matemáticas modernas”. Como puntualiza J. Dieudonné [4], se decidió elaborar un tratado que contuviera, de forma clara, precisa y sistemática, los teoremas y resultados básicos para *todas* las teorías existentes en matemática pura. Aparentemente, no se trató nunca la posibilidad de incluir la matemática aplicada (según Dieudonné, por la falta de interés y competencia en el tema de los colaboradores, aunque en algún momento se consideró la idea de incluir teoría de probabilidad y análisis numérico, pero pronto se desechó).

A lo largo de estos dos congresos se fijó el método de trabajo. Una vez elegido un tema, sobre la base de un informe preliminar y tras su discusión en el Congreso, se designaba a uno de los miembros para realizar una primera redacción, que se enviaría a los demás miembros. En el próximo Congreso, esta redacción sería discutida y criticada sin piedad y sufriría profundas modificaciones o incluso, en algunos casos, sería rechazada en su totalidad. Con las conclusiones obtenidas, se encargaba una segunda redacción, posiblemente a un miembro diferente, y el proceso se repetía hasta alcanzar la unanimidad (otra de las reglas del grupo). El método pone de manifiesto la imposibilidad de atribuir un texto cualquiera de Bourbaki a uno o varios de sus miembros. Como dice Weil “Sin duda se precisaba un gran acto de fe para pensar que este proceso iba a converger; pero nosotros teníamos fe en Bourbaki. No obstante, quedamos muy sorprendidos la primera vez que logramos aprobar un texto para su impresión; se trataba del *fascicule de résultats* de la teoría de conjuntos, aceptado definitivamente poco antes de la Guerra Mundial ...” El texto correspondiente, encargado a Cartan para la conferencia “de El Escorial”, había sido rechazado, por lo que el grupo decidió publicar un fascículo que fijara las notaciones y recogiera los principales resultados que se iban a usar en los capítulos venideros.

También en el segundo Congreso se fijaron a grandes rasgos las normas de redacción (incluyendo la presentación tipográfica): las demostraciones se incluirían en su totalidad y con la mayor precisión. La terminología y las notaciones serían uniformes a lo largo de toda la obra. Cada capítulo finalizaría con una serie de ejercicios y también (a propuesta de Weil) con una “discusión” histórica. Por último, se decidió incluir en cada volumen un folleto suelto de *instrucciones de uso*, que son un conjunto de indicaciones para la utilización adecuada del tratado. Incluye los prerequisites necesarios, la organización de los libros en capítulos y su mutua dependencia.

Respecto a la evolución futura del grupo, se fijó una edad límite de permanencia, a partir de la cual se dejaría de pertenecer al mismo: los 50 años. En cuanto a la elección de nuevos miembros, se realizaría entre los matemáticos invitados a los congresos (“cobayas”), en función de sus cualidades personales y matemáticas.

Desde entonces, la lista de miembros del grupo en cada momento ha sido siempre un secreto. Se sabe que los “Fundadores” fueron abandonando el grupo al llegar a la edad límite, que el número de miembros parece variar entre 10 y 20 y que, según mis noticias, ninguna mujer ha pertenecido al grupo. Casi todos los miembros han sido siempre franceses. Como excepción notable, podemos citar a Samuel Eilenberg, polaco de origen, experto en topología algebraica y conocido por sus amigos de juventud en USA como S²P² (por *Smart Sammy, the Polish Prodigy*). Se sabe que son o han sido miembros del grupo Atiyah, Boutet de Monvel, Demazure, Douday, Malgrange, Verdier, etc.

La obra de Bourbaki

Aparte de algunas notas, publicadas casi todas en las *Comptes Rendus* de la Academia de Ciencias de Paris, no cabe duda que la obra fundamental de Bourbaki, que motivó su propia existencia como grupo, es su monumental y aún inconcluso tratado *Éléments de Mathématique*. Las ideas de Bourbaki sobre las matemáticas y las

directrices que iba a seguir en sus *Eléments*, quedaron claramente plasmadas en los dos artículos publicados con su nombre [1] y [2]. Por cierto, en este último, en una nota al pie de la página dice: “El profesor N. Bourbaki, antiguo miembro de la Real Academia de Poldavia, reside actualmente en Nancy, Francia, y es autor de un extenso tratado sobre matemáticas modernas, en curso de publicación bajo el título *Eléments de Mathématique* (Hermann et Cie, Paris 1939-), del cual han aparecido ya diez volúmenes.”

Como hemos dicho anteriormente, el objetivo de Bourbaki era la elaboración de un tratado que, partiendo desde el principio, contuviera los fundamentos y resultados básicos de toda la matemática pura.

Lo primero que hay que destacar de esta concepción, es que la obra va dirigida al *matemático profesional*, e.d., el que realiza investigación, para servir como obra de referencia y consulta. Como señala Dieudonné, nunca se pronunció Bourbaki a favor de que los conceptos descritos en su tratado pudieran introducirse a un nivel inferior al de graduado universitario, y mucho menos en la escuela primaria o secundaria. Esto contesta a una idea muy extendida en determinados círculos que achacan a la influencia de Bourbaki la introducción en la enseñanza elemental de nociones muy abstractas, generalmente inútiles a ese nivel (lo que se conoce peyorativamente en la enseñanza primaria como “nuevas matemáticas” o “matemática moderna”). En palabras de Dieudonné: “No se puede hacer responsable a un autor por el uso que algunas personas hayan hecho de su obra, para justificar teorías o acciones que él nunca defendió.” ([4], pág. 623).

Por otro lado, para entender mejor la posición de Bourbaki, quizá convenga analizar con un poco más de detalle la situación con la que se encontró el grupo alrededor de 1930. En efecto, la matemática había crecido desmesuradamente en el periodo 1870-1930, con la aparición de nuevas y potentes teorías en casi todas sus ramas (pensemos, por ejemplo, que en ese periodo aparecieron, entre otras: la teoría de conjuntos de Cantor-Zermelo, la teoría de representación de grupos, la integral de Lebesgue, la topología general, el álgebra no conmutativa, etc.). Aunque en muchas de esas teorías se habían escrito excelentes monografías, era evidente la falta de referencias adecuadas para los prerrequisitos comunes a muchas de ellas, o las nociones y técnicas necesarias, que se habían originado propiamente en otras teorías. Bourbaki, siguiendo la tradición universalista de la matemática francesa de los siglos XVIII y XIX, intentó remediar esa situación, tratando de proporcionar al matemático profesional, en palabras de J. Dieudonné, *un equipo de herramientas* adecuado.

Pero, ¿cómo abordar esta tarea? Ya hemos visto que en los primeros Congresos del grupo se decidió el método de trabajo e incluso el estilo de redacción. La declaración programática del grupo se encuentra claramente recogida en los ya citados artículos [1] y [2]: Tras una ferviente declaración de fe en la unidad de la matemática, Bourbaki se declara partidario del *método axiomático*, advirtiendo que no hay que confundirlo con el formalismo lógico, pues:

“Lo que el método axiomático se propone como objetivo esencial es precisamente lo que el formalismo lógico, por sí solo, es incapaz de dar, esto es, la profunda inteligibilidad de las matemáticas ... El método axiomático se basa en la convicción de que, no sólo la matemática no es una mera concatenación al azar de

silogismos, sino que tampoco es una colección de *trucos*, más o menos astutos, a los que se llega por una serie de afortunadas combinaciones ... El método axiomático enseña a buscar las razones profundas ... a encontrar las ideas comunes a varias teorías, sepultadas bajo la acumulación de detalles propios de cada una de ellas ..." ([2], pág. 223.)

El instrumento básico para llevar a cabo este programa, es la noción de *estructura*, que por supuesto no inventó Bourbaki, como reiteradamente ha señalado, pero que sin duda es uno de los mayores responsables del papel preeminente que ha tomado esta noción en la moderna organización de las Matemáticas.

A partir de Gauss, cada vez se hace más evidente que la clasificación tradicional de las Matemáticas resultaba inadecuada. En efecto, el punto de vista clásico distinguía las distintas ramas de las matemáticas según la naturaleza de los objetos que estudiaban: La aritmética era la ciencia de los números; la geometría estudiaba los objetos en el espacio; el análisis estudiaba las funciones, etc. Sin embargo, cada vez con mayor frecuencia técnicas y resultados de una de estas "parcelas" de las matemáticas, se mostraban útiles en otra "parcela". De esta forma, a lo largo del siglo XIX fue poniéndose en evidencia que lo relevante no era la *naturaleza* de los objetos estudiados, sino las *relaciones* entre ellos. Así van surgiendo, no sin dificultad, las primeras estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales), que permiten agrupar bajo una misma denominación conjuntos formados por elementos de naturaleza muy distinta, pero que gozan de una serie de relaciones y propiedades comunes. Estas nociones permiten también explicar las grandes semejanzas advertidas entre teorías aparentemente muy distintas.

Esta evolución en la organización de las matemáticas, que para 1930 ya había ocurrido en álgebra, trató de extenderla Bourbaki a *toda* la matemática. Para ello, distingue tres tipos básicos de *estructuras fundamentales*: Las estructuras *algebraicas*, las de *orden* y las *topológicas*, yendo de menor a mayor grado de abstracción necesario para la formulación de sus axiomas. A partir de estos tres tipos de estructuras, pueden crearse estructuras *compuestas* por una o más estructuras "simples" sobre un mismo conjunto, relacionadas a través de ciertos axiomas de compatibilidad. Así aparecen las estructuras de *grupo*, *anillo*, *cuerpo* y *espacio vectorial topológico*, la de *espacio de medida* o la de *variedad diferenciable*, por poner algunos ejemplos.

El método axiomático y la organización en términos de estructuras matemáticas permiten al matemático una considerable economía de pensamiento. Tan pronto como se reconoce que los objetos bajo estudio satisfacen los axiomas de una cierta estructura, se dispone inmediatamente del arsenal completo de resultados generales conocidos para esa estructura, sin tener que demostrarlos de nuevo en cada caso particular. Sin embargo, nada más lejos de la concepción de Bourbaki que reducir las matemáticas a un "... juego puramente mecánico de fórmulas aisladas; más que nunca, la intuición domina en la génesis de los descubrimientos. Pero, además, [el matemático] dispone ahora de la poderosa maquinaria suministrada por la teoría de los grandes tipos de estructuras; con una sola ojeada, barre inmensos dominios, unificados ahora por el método axiomático, en los que antes parecía reinar el caos más completo." ([2], pág. 228). Para Bourbaki, "El matemático no trabaja como una máquina o como un obrero en una cadena de montaje. Nunca se insistirá demasiado en el papel fundamental que

juega en sus investigaciones una forma especial de *intuición*, que no es lo que vulgarmente se entiende por esta palabra, sino más bien una especie de *adivinación* (más allá de todo razonamiento) del comportamiento normal que se puede esperar de los entes matemáticos ... Y cuando el investigador descubre súbitamente una estructura en los fenómenos que está estudiando, es como una modulación repentina que orienta de golpe en una dirección inesperada el curso intuitivo de su pensamiento, e ilumina con una nueva luz el paisaje matemático en el que se mueve.” ([2], pág. 227).

Bourbaki es también consciente del rechazo que muchos matemáticos sienten contra el método axiomático, al que acusan de estéril y poco motivador. Sin embargo mantiene que, a pesar de algunos excesos, el desarrollo del método ha mostrado claramente su potencia y utilidad, y la oposición que todavía recibe de vez en cuando, “sólo puede explicarse por la natural dificultad de la mente a admitir que en el estudio de problemas concretos, pueda resultar tremendamente fructífera una forma especial de intuición que no viene sugerida directamente por los elementos considerados, y que a menudo sólo se adquiere tras un profundo y a veces difícil proceso de abstracción.” ([2], pág. 230).

Una vez establecido el marco del tratado, su *esqueleto*, por así decir, había que decidir qué *substancia* debía rellenar este molde. Rechazadas desde el principio las tentaciones enciclopédicas, había que elegir el repertorio óptimo de las definiciones y teoremas (con demostraciones completas, como ya dijimos) que el matemático profesional podía necesitar, es decir, qué incluir en el *juego de herramientas* que pretendía ser el tratado.

Como reconoce Dieudonné en [4], la elaboración de cada Capítulo de los *Éléments* ha originado muchas y duras discusiones entre los colaboradores de Bourbaki, y a menudo el acuerdo no se ha logrado hasta después de varios años de polémica. Pero estas discusiones nunca han trascendido al *mundo exterior*. No existe, por tanto, un pronunciamiento oficial del grupo sobre los criterios de selección del material incluido en el tratado. Sin embargo, podemos hacernos una idea bastante aproximada a través de las opiniones (puramente personales, como reiteradamente declara) de J. Dieudonné en [4]. En su opinión, los avances significativos en Matemáticas se deben siempre a un porcentaje muy reducido de los matemáticos profesionales. Por ello, un elemento decisivo para decidir si una determinada herramienta debe ser incluida en la obra, es si ha sido utilizada por grandes matemáticos y qué importancia le han atribuido. Los matemáticos que probablemente más han influido en Bourbaki, según Dieudonné, son Dedekind, Hilbert y la escuela alemana de álgebra y teoría de números de los 1920, y en Francia H. Poincaré y E. Cartan. El común denominador de estos matemáticos es el uso sistemático de nuevos conceptos y métodos “abstractos” para resolver problemas clásicos; y ésta es para Dieudonné la idea central de Bourbaki.

Por otro lado, la declarada vocación de utilidad, hace que no se incluyan en la obra resultados y teoremas que representan esencialmente el final de una teoría, sin previsible nuevas aplicaciones. Como ejemplo de esto, Dieudonné menciona el criterio de Galois de resolución por radicales de una ecuación algebraica (que fue el objetivo fundamental por el que Galois inventó su teoría). Este resultado resuelve un antiguo e importante problema, pero no se le han encontrado nuevas aplicaciones significativas. Por tanto, se optó por no incluirlo en el tratado de álgebra, aunque por

supuesto la teoría de Galois se estudia en profundidad, como instrumento básico que es en teoría de números y geometría algebraica.

En resumen, no se incluyen en el tratado de Bourbaki:

- a) Las teorías abstractas sin motivación, dejadas de lado por los grandes matemáticos (la “basura axiomática”, en palabras de Dieudonné.).
- b) Los productos finales de teorías, que no constituyen a su vez nuevas herramientas.
- c) Aquellas teorías, activas y muy importantes en opinión de los grandes matemáticos, pero que todavía no admiten una clara descripción en términos de relaciones entre estructuras significativas; como ejemplos Dieudonné pone la teoría de grupos finitos o la teoría analítica de números.
- d) Finalmente, aquellas teorías en pleno desarrollo y ebullición, con incorporación constante de nuevas ideas y métodos, que no admiten el menor intento de organización sistemática; son ejemplos la topología diferencial y algebraica, la geometría algebraica, los sistemas dinámicos, etc.

Así pues, el alcance del tratado de Bourbaki se ha ido reduciendo, aunque aún supone una obra monumental: esencialmente, se centra en el estudio de las tres estructuras básicas: de orden, algebraicas y topológicas, junto con algunas de sus combinaciones (grupos y espacios vectoriales topológicos, por ejemplo), la teoría de integración y los métodos fundamentales de cálculo. Posteriormente se incluyó el álgebra conmutativa, álgebras y grupos de Lie y algo de teoría espectral. También ha aparecido un fascículo de resultados sobre variedades y parece que se estuvo considerando la posibilidad de incluir parte de la geometría analítica.

Bourbaki fue pionero en la obra de sistematizar y ordenar una gran cantidad de información aparecida a lo largo de muchos años, en muchas revistas y en idiomas diferentes. También presentó el primer tratamiento sistemático de algunos temas, como son el álgebra multilineal y exterior, los espacios uniformes, la teoría de filtros, los grupos topológicos (y, en general, el primer tratado moderno de topología general). El volumen de Bourbaki sobre espacios vectoriales topológicos fue también el primer texto sobre espacios localmente convexos. Esto explica, en parte, el gran éxito alcanzado por estas publicaciones, que ha sorprendido incluso a sus propios autores.

Pero, además, Bourbaki es responsable de la popularización de algunas de las notaciones hoy universalmente aceptadas, como \cap, \cup y \emptyset , el uso de las notaciones $x \otimes y$ y $x \wedge y$ para los productos tensorial y exterior, $\langle x, y \rangle$ para denotar formas bilineales o $\sigma(E, F)$ para designar la topología débil. Aunque van der Waerden ya empleaba las letras \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} y \mathbb{C} para designar los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos, respectivamente, Bourbaki propugnó el uso de estas letras en negrita, y añadió a la lista la letra \mathbb{Q} para designar el conjunto de números racionales. El uso de la convención “japonesa” para designar negritas en manuscritos o notas mimeografiadas, ha conducido a la notación \mathbb{N}, \mathbb{Z} , etc., hoy comunmente aceptada. Otro buen hallazgo de Bourbaki es la utilización en los márgenes de unas curvas muy

visibles en forma de Z (curva peligrosa) para advertir al lector un punto especialmente delicado o resbaladizo. Menos éxito han tenido las propuestas de usar \mathbb{C} para la complementación de conjuntos o pr_1, pr_2 para las proyecciones.

La actitud de Bourbaki es radical en cuanto a seguir siempre una terminología rígida, sustituyendo el lenguaje informal y las abreviaturas por términos técnicos precisos. Esto le ha llevado a veces a introducir, con mayor o menor éxito, una nueva terminología. Entre los éxitos deben apuntarse nociones como *anillo noetheriano*, *artiniano*, *de Dedekind o factorial* o la de *álgebra sobre un anillo*. También el uso generalizado del término *compacto*, en lugar del antiguo de bicomacto, o la distinción entre *bola abierta*, *bola cerrada* y *esfera* en espacios métricos. También se debe a Bourbaki la introducción de las palabras *suprayectiva* y *biyectiva* para complementar la ya existente notación de *inyectiva*, referida a aplicaciones.

Desde el punto de vista técnico, las críticas más fuertes a la obra de Bourbaki se refieren a los contenidos de teoría de conjuntos y fundamentos de las matemáticas. Recordemos que el primer volumen publicado por el grupo fue precisamente el fascículo de *Resultados* sobre Teoría de Conjuntos, tras cuatro años de discusión, dejando el texto completo para más adelante. La idea era que “los lectores pudieran comprender las ideas de la teoría que serían utilizadas constantemente por Bourbaki” ([7], p. 20). En un trabajo que lleva el contundente título de *The Ignorance of Bourbaki* [9], A.R.D. Mathias hace una feroz crítica de estos aspectos de la obra de Bourbaki, basada fundamentalmente en la falta de referencias al importante trabajo de Gödel y la elección por Bourbaki de la axiomática de Zermelo, en lugar de la de Zermelo-Frankel (más el axioma de elección) para la teoría de conjuntos. En el trabajo citado se dan abundantes razones técnicas para sustentar el fuerte tono crítico del mismo, pero la opinión del autor queda bastante bien reflejada en esta frase (refiriéndose a la impresión producida al leer el volumen de *Théorie des Ensembles*: “Parecía la obra de alguien que hubiera leído *Grundzüge der Mathematik* de Hilbert y Ackermann, y *Leçons sur les nombres transfinites* de Sierpinski, ambos publicados antes de 1928, pero nada más.” ([9], p. 5.) Y continúa más adelante ([9], p.9): “Mi impresión es que...los Bourbakistas no estaban dispuestos a aceptar la posibilidad, fuertemente sugerida por los trabajos de Gödel, de que *no existen* fundamentos de las matemáticas en el sentido propuesto por Hilbert y adoptado por Bourbaki...”.

Algunas de estas objeciones no parecen concordar con las palabras de Dieudonné: “Entre los distintos sistemas lógicos... el que parecía adaptarse mejor al tratado era la teoría axiomática de conjuntos definida por Zermelo y completada por Frankel y Skolem...” Y respecto a la actitud de Bourbaki hacia el problema de los fundamentos dice que “puede describirse como de total indiferencia. Lo que Bourbaki considera importante es la *comunicación* entre matemáticos...” ([4], p. 618). Por ello no es de extrañar que la opinión de Bourbaki sobre la lógica y la teoría de conjuntos sea la de “incluir en el tratado lo menos posible, esto es, lo que sea absolutamente necesario para las demostraciones de lo que Bourbaki considera teoremas importantes...” ([4], p. 622.)

En cualquier caso, la influencia de la obra de Bourbaki, sobre todo a partir de 1950, ha sido realmente muy grande, tanto por el número de referencias explícitas a sus

libros, como por la forma en que ha inspirado un determinado estilo de escribir matemáticas. Tampoco hay que ocultar que la obra de Bourbaki ha influido en la forma de enseñar matemáticas, con resultados no siempre positivos. Sin embargo, no parece que ello sea debido a una postura deliberada del grupo. Ya hemos citado a este respecto las manifestaciones de Dieudonné. Podemos añadir estas palabras de Chevalley en una entrevista realizada en 1981: “Siempre tuvimos muy claro que nadie estaba obligado a leer a Bourbaki. Creíamos sinceramente que si alcanzábamos el éxito sería sólo por el valor intrínseco de nuestro texto y no se convertiría su lectura en una *obligación*, como parece que es ahora...” ([7], p.20).

La insistencia en usar siempre una terminología rigurosamente correcta, evitando los llamados *abusos de lenguaje*, conduce con frecuencia a una cierta pedantería e ilegibilidad del texto, que es una de las más frecuentes acusaciones que se hacen a los *Éléments*. También es cierto que se echa en falta una bibliografía adecuada, pero, en palabras de Halmos, “el resultado... no es un libro de texto que se pueda poner sensatamente en las manos de un principiante (incluso Bourbaki lo admite así), pero es un libro de referencia, casi una enciclopedia, sin el cual las matemáticas del siglo XX serían, para bien o para mal, completamente diferentes de lo que son.” ([5], p.93).

Referencias

- [1] N. BOURBAKI, *Foundations of Mathematics for the working mathematician*. Journal of Symbolic Logic **14** (1948), 1-14.
- [2] N. BOURBAKI, *The Architecture of Mathematics*. American Math. Monthly **57** (1950), 221-232.
- [3] J. DIEUDONNÉ, *The Difficult Birth of Mathematical Structures (1840-1940)*. Scientia (1979), 7-23.
- [4] J. DIEUDONNÉ, *The work of Bourbaki during the last thirty years*. Notices of the Amer. Math. Soc. (1982), 618-623.
- [5] P.R. HALMOS, *Nicolas Bourbaki* en “Matemáticas en el Mundo Moderno”, Ed. Blume (1974), 89-94.
- [6] J. HERNÁNDEZ, *Las estructuras matemáticas y Nicolás Bourbaki*. Seminario “Orotava” de Historia de la Ciencia. La Orotava, Tenerife, 1995.
- [7] D. GUEDJ, *Nicholas Bourbaki, Collective Mathematician.- An Interview with Claude Chevalley*. Math. Intelligencer, **7** (1985), 18-22.
- [8] F. LE LIONNAIS, *Las Grandes corrientes del pensamiento matemático*. Eudeba, 1962.
- [9] A.R.D. MATHIAS, *The Ignorance of Bourbaki*. Math. Intelligencer, **14** (1992), 4-13.
- [10] A. WEIL, *Souvenirs d'apprentissage*. Birkhäuser, 1991.