Hilbert

BALTASAR RODRÍGUEZ- SALINAS*

David Hilbert nació el 23 de Enero de 1862 en Königsbert (Alemania). Procedía de una familia protestante de clase media que se había instalado en el siglo XVII cerca de Freiberg, Sajonia. Su bisabuelo Christian David se trasladó a Königsberg, al este de Prusia. El abuelo y el padre de Hilbert fueron jueces en Königsberg. Su padre se llamaba Otto y su madre Erdtmann, que era una mujer extraordinariamente culta que se interesaba especialmente por la filosofía, la astronomía y las matemáticas. Desde 1870, Hilbert asistió al Friedrichskolleg en Königsberg, y el último año de estudios secundarios lo realizó en Wilhelms-Gymnasium. Sufrió mucho durante su Bachillerato en Königsberg a causa de la obligación del aprendizaje meramente memorístico. Cuando- mucho más tarde- se le preguntó en cierta ocasión si ya en la escuela se había dedicado a las matemáticas, replicó: "en la escuela no me dedicaba especialmente a las matemáticas, pues ya sabía que lo haría más adelante". Ya en sus años escolares esta actitud caracterizó a Hilbert como una personalidad tenaz, enérgica y decidida, manifestando durante ellos una gran afición artística y literaria. En 1880 se examinó para su ingreso en la Universidad. Estudió en la Universidad de Königsberg de 1880 a 1884, excepto el segundo semestre que fue a Heidelberg. Como profesores de Universidad tuvo allí entre otros a H. Weber, F. Lindemann y A. Hurwitz.

Königsberg, la Universidad donde Immanuel Kant había estudiado y enseñado se convirtió en un centro de enseñanza de las matemáticas debido a la actividad de Jacobi (1827-1842). Cuando Hilbert comenzó sus estudios allí, el algebrista Heinrich Weber, colaborador de Dedekind en la teoría de funciones algebraicas, era profesor de Königsberg. En 1883 Weber lo dejó. Su sucesor fue Lindemann, un famoso pero caótico matemático que el año anterior había tenido la fortuna de probar la trascendencia de π y con ello la imposibilidad de la resolución de un problema famoso, el de la cuadratura del círculo. Lindemann realizó una sorprendente actividad de seminarios. Bajo su influencia Hilbert se interesó en la teoría de invariantes, su primera área de investigación. En aquel tiempo Königsberg tuvo un brillante estudiante Hermann Minkowski, dos años más joven que Hilbert pero dos trimestres por delante de éste, el cual recibió el Gran Premio de la Academia de París en 1883. En 1884 Hurwitz, tres años mayor que Hilbert y un maduro matemático en aquel tiempo fue nombrado profesor extraordinario en Königsberg. El fue el guía de Hilbert durante ocho años en todo lo que concernía a las matemáticas. Minkowski y Hurwitz tuvieron una enorme influencia en el desarrollo matemático de Hilbert.

* Académico Numerario.

El doctorado de Hilbert tuvo lugar a comienzos de 1885 en Königsberg. En el invierno de 1885-86, durante una estancia en Leipzig, entabló relaciones, que serían trascendentales para su desarrollo ulterior, con F. Klein. Se decidió a emprender un viaje de estudios a París, donde entró en contacto con el influyente Ch. Hermite.

En el año 1886 Hilbert ganó unas oposiciones a *Privatdozent* en la Universidad de Königsberg. En una carta a Mikowski Hilbert ridiculiza aquella situación escribiendo: "once profesores tienen que conformarse con un número similar de estudiantes". Entre los alumnos de Hilbert se encontraba A. Sommerfeld.

Cuando en 1892 Hurwitz fue llamado a Zurich, Hilbert obtuvo en calidad de sucesor un lugar para profesor extraordinario en Königsberg. Con ello mejoró su situación económica que pudo incluso pensar en casarse. En el mismo año de 1892 contraía matrimonio con Käthe Jerosch, hija de una familia de comerciantes de Königsberg, una señorita de considerable independencia y madurez intelectual. De la época de Königsberg data también una muy estrecha amistad juvenil con Käthe Kolwitz a la que defendió de los ataques de las fuerzas reaccionarias.

En 1893 Hilbert fue ascendido a profesor ordinario, sucediendo a F. Lindemann. En 1895 tuvo lugar un cambio decisivo en la vida de Hilbert con el nombramiento en Gotinga a propuesta de F. Klein. Cuando se reprochó a éste que había actuado muy a la ligera a traer a Gotinga a un hombre tan joven, protestó diciendo: "Me traigo al más inoportuno de todos". Sea como fuere, el nombramiento de Hilbert en Gotinga quedó justificado del modo más brillante: Gotinga obtuvo un investigador extraordinariamente profundo y productivo y un excelente profesor universitario de orientación humanística que contribuyó de manera esencial al desarrollo de este centro puntero de investigación y de la enseñanza científica y cuyos discípulos llevarían posteriormente consigo por todo el mundo esta insigne tradición. En 1902 Hilbert se reunió con Minkowski en Gotinga, donde fue creada una nueva cátedra de matemáticas a instancias de Hilbert.

Pese a las muchas honrosas ofertas de otras Universidades y Academias, Hilbert permaneció en Gotinga. Su jubilación tuvo lugar en 1930, pero continuó impartiendo cursos hasta 1934.

A mediados de los años veinte Hilbert enfermó de anemia, una enfermedad entonces incurable. Hilbert era plenamente consciente de su estado de salud, pero continuó imperturbable con su trabajo en la medida en la que la persistente fatiga asociada al cuadro clínico de su enfermedad se lo permitía. Con el tiempo, en 1927, la medicina desarrolló un preparado hepático, Hilbert fue uno de los primeros pacientes en recibirlo, y pudo salvarse.

En la década de estos años 20, cuando Gotinga era un deslumbrante centro de las matemáticas y de la física, Hilbert era indiscutiblemente una de las personalidades decisivas de las ciencias matemáticas, muy apreciado en el círculo de sus discípulos, amigos colaboradores y colegas del país y del extranjero.

Pero entonces los nacional-socialistas llegaron al poder en Alemania e hicieron huir a muchos de los mejores matemáticos y físicos de Gotinga: E. Noether, E. Artin, H. Weyl, R. Courant, P. Bernays, M. Born y otros. El matemático O. Blumenthal, íntimo amigo de Hilbert, emigró a Holanda y más tarde, en 1944, sería asesinado. El especialista en teoría de números E. Landau y el Premio Nobel de Física J. Franck fueron destituidos de sus cargos. A partir de 1939 se desencadenó una atroz guerra que enseguida se volvió contra su instigador, la Alemania nazi. El 2 de Febrero de 1943 capitulaban los restos de las tropas nazis cercadas a orillas del Volga en las proximidades de Stalingrado.

Apenas una docena de personas acompañaron a David Hilbert hasta su reposo definitivo el 14 de Febrero de 1943, entre ellas su esposa Käthe casi ciega. De entre todos sus amigos de los días felices sólo el físico A. Sommerfeld pudo llegar desde Munich. De pie junto al féretro resumió la obra de la vida de Hilbert, que indiscutiblemente le acreditaba como el más destacado matemático de principios del siglo XX. ¿Cuál fue -se preguntaba allí Sommerfeld- el mayor de los méritos de Hilbert? ¿Residía en el campo de los invariantes, de la teoría de números, de la axiomatización de la geometría, o se trataba sobre todo de su teoría de la demostración? ¿O estaría todo esto superado por sus contribuciones al análisis, a la fundamentación de la teoría de funciones o por su teoría de las ecuaciones integrales? Y ¿cómo habría que valorar sus trabajos sobre física teórica, sobre la teoría de gases y la teoría general de la relatividad? ¿Estribarían en ello sus méritos más significativos?.

A este respecto todavía no se ha dicho la última palabra. La historia juzgará, pero no pasará de largo sobre el nombre y la obra de Hilbert.

El matemático cuyo trabajo más influyó a Hilbert fue Leopold Kronecker, aunque discrepaba con éste del dogmatismo aparantemente excesivo sobre la pureza de la metodología y simpatizaba con el trabajo de Georg Cantor sobre teoría de conjuntos, que había sido muy criticado por Krönecker.

La actividad científica de Hilbert puede dividirse en seis periodos: hasta 1893 (en Königsberg), formas algebraicas; 1894-1899, teoría algebraica de números; 1899-1903, fundamentos de la geometría; 1904-1909, análisis (principio de Dirichlet, cálculo de variaciones, ecuaciones integrales, problema de Waring); 1912-1914, física teórica; después de 1918, fundamentos de la matemática.

Al final de la exposición del Congreso Internacional de Matemáticos de Chicago, en 1893, Hilbert decía:

"En la historia de una teoría matemática se pueden distinguir fácil y claramente tres periodos: el ingenuo, el formal y el crítico. Como en la teoría de los invariantes algebraicos, sus fundadores Cayley y Sylvester son representantes del periodo ingenuo; cuando establecieron las construcciones más sencillas de los invariantes y lo aplicaron a la resolución de las ecuaciones de los primeros cuatro grados, ellos llevaron a cabo su descubrimiento inicial. Los descubridores Clebsch y Gordan son los representantes del segundo periodo, mientras que el periodo crítico tiene su expresión en los teoremas 6-13 anteriormente mencionados."

Independientemente de lo que eta histórica división significa, es obvio que Hilbert había caracterizado sus propias y numerosas contribuciones a la teoría de invariantes de 1885 a 1888 como todavía pertenecientes a los primeros dos periodos. Todavía cuando él hacía su exposición en Chicago, la teoría de invariantes no había avanzado mucho más que en los cinco años anteriores. Hilbert había dejado perplejos a sus contemporáneos por un revolucionario tratamiento, apodado "teológico" por P. Gordan, el "rey de los invariantes". Lo que Hilbert había llamado el periodo formal de Clebsch y Gordan era la invención y manipulación de un aparato, el cálculo simbólico, el cual todavía podía sonsacar el placer del historiador que se encontrase con él. El nuevo tratamiento de Hilbert era muy diferente: un método directo subyacente, no algorítmico, que prepararía lo que se llamaría álgebra abstracta en el siglo XX. Ha sido frecuentemente considerado un misterio que, después de su conferencia de Chicago, Hilbert dejase la teoría de invariantes y nunca más volviese a ella. Pero se debería de añadir que no fue el único que hizo esto. Se ha comentado que Hilbert había resuelto todos los problemas de dicha teoría. Esto, de hecho, no es cierto. Nunca una floreciente teoría matemática se marchitó tan deprisa. La teoría de invariantes murió como disciplina separada. Hilbert no había acabado con la teoría de invariantes resolviendo todos sus problemas, sino mirándolos desde otro punto de vista externo a la teoría. Esto ocurre frecuentemente en matemáticas. Desde otra perspectiva, ideas panorámicas se vuelven futilidades, ideas profundas trivialidades y métodos sofisticados obsoletos. En cualquier caso, es chocante que la fortua de la teoría de invariantes variase tan abruptamente, que cayese tan deprisa y a causa de un sólo hombre.

En términos modernos, la teoría de invariantes se redujo a los grupos lineales G actuando sobre un N-espacio R y los polinomios de R, invariantes bajo G. Los grupos ya estudiados en aquel tiempo eran principalmente las representaciones lineales del grupo lineal especial de los productos tensoriales simétricos de un n-espacio por una m-variedad -en términos de la época, los invariantes de una n-forma de grado m. Hasta entonces muchas habilidades habían sido aplicadas para caracterizar sistemas completos de invariantes. Los invariantes formaban anillos con base finita, para los ejemplos existentes. Generalmente estos invariantes básicos $I_1,\dots,I_k$ no eran algebraicamente independientes, los polinomios de relación, llamados sicigias, formaban un ideal, el cual otra vez según los ejemplos, tenía una base ideal finita $F_1,\dots,F_h$. Los $F_1,\dots,F_h$ no necesitaban ser ideal-independientes; podía haber relaciones entre ellos $R_1F_1+\dots+R_hF_h=0$, por lo que se obtenía un ideal de relaciones $R_1,\dots,R_h$ o "sicigias de segundo orden" y así sucesivamente.

Cuando Hilbert comenzó su trabajo, la finitud de una base de anillo para invariantes había sido obtenida por métodos algorítmicos que se aplicaban en algunos casos especiales. Hilbert no resolvió el problema general y aún sigue sin resolver. El también se restringió a grupos muy especiales; el explicar métodos generales a través de ejemplos fue una de las características del trabajo de Hilbert. Esta es una de las razones por la cual pudo fundar una escuela sólida y fuerte.

Se puede suponer que Hilbert comenzó con la finitud de la base ideal de sicigias. De hecho, él probó la finitud de la base de un ideal en cualquier anillo de polinomios. Fue principalmente esta destacada generalización y su espectacular y sencilla demostración lo que dejó asombrados a sus contemporáneos. La actual formulación del teorema de la base de Hilbert es como sigue: La propiedad de un anillo R con elemento uno de que cada ideal tenga una base finita es compartida por su anillo de polinomios $R[x]$. Esto fue probado muy independientemente de la teoría de invariantes. De hecho, se aplica a los ideales de sicigias de cualquier orden. Además, Hilbert probó que la cascada o cadena de sicigias se para a lo más en m pasos. Este resultado parece muy fino, y su uso en el álgebra homológica de hoy es una nueva confirmación de la visión profética de Hilbert.

Aplicado al anillo de los invariantes, el teorema de Hilbert dice que cualquier invariante I puede ser representado en la forma $A_1 I_1 + ... + A_k I_k$ donde $A_1, ..., A_k$ son polinomios que pueden ser supuestos de menor grado que I. Si G es finito o compacto, ellos pueden ser cambiados en invariantes por promedios sobre G. Los nuevos $A_1, ..., A_k$ pueden ser expresados mediante $I_1, ..., I_k$ de la misma forma que I; este proceso puede continuarse hasta que los grados de los coeficientes sean cero. Esta moderna idea de proceder se debe a Hurwitz. Hilbert usó una operación diferencial, el Ω proceso de Cayley, para obtener el resultado.

Además los resultados de Hilbert relacionaban los invariantes con campos de funciones algebraicas y variedades algebraicas, en particular, el *Nullstellensatz*: Si un polinomio f se anula en todos los ceros de un ideal de polinomios M, entonces alguna potencia de f pertenece al ideal.

Otro trabajo del mismo periodo aborda la representación de los polinomios o funciones racionales definidos mediante cuadrados, un problema al que Artin hizo la contribución definitiva treinta años más tarde. Está también el teorema de irreducibilidad de Hilbert el cual asegura que, en general, la irreducibilidad es preservada si, en un polinomio de varias variables con coeficientes enteros, algunas de las variables se reemplazan por enteros. Una investigación algebraica aislada de años posteriores es el estudio de la ecuación de grado noveno, resuelta por funciones algebraicas de cuatro variables sólo.

No hay campo de las matemáticas cuya belleza haya atraído a la élite de los matemáticos con tanta fuerza como la teoría de números -"La Reina de las Matemáticas", en palabras de Gauss-. Hilbert pasó de la teoría de invariantes a la teoría algebraica de números. En 1893 en el Congreso de Munich, la Deutsche Mathematiker-Vereinigung, a la cual había presentado Hilbert nuevas demostraciones de la partición del ideal primo, encargó a Hilbert y Minkowski un informe sobre teoría de números en el plazo de dos años. Minkowski pronto se retiró, aunque leyó las demostraciones de lo que sería conocido como *Der Zahlbericht*, fechado por Hilbert el 10 de Abril de 1897. El *Zahlbericht* es mucho más que un informe; es un clásico, una obra maestra de la literatura matemática. Durante medio siglo fue una biblia para todos aquellos que querían aprender teoría algebraica de números, y quizás lo es todavía. En él Hilbert recopila todos los conocimientos relevantes sobre teoría algebraica de números, reorganizados bajo espectaculares nuevos puntos de vista, rehaciendo formulaciones y demostraciones, dejando los cimientos para el entonces creciente edificio de la teoría de cuerpos. Pocos tratados matemáticos pueden rivalizar con *Zahlbericht* en lucidez y cuidado didáctico. Comenzando con el cuerpo cuadrático, Hilbert paso a paso va creciendo en generalidad, con una vista a la teoría general de los cuerpos abelianos, pero desde el principio elige métodos que subyacen a principios generales.

Al final del prefacio del *Zahlbericht*, Hilbert dice:

"La teoría de cuerpos numéricos es un edificio de singular belleza y armonía. La parte más rica de este edificio llevada a cabo, según me parece amí, es la teoría de los cuerpos abelianos, la cual Kummer por sus trabajos sobre las leyes de reciprocidad, y Kronecker por sus trabajos sobre la multiplicación compleja de funciones elípticas nos han introducido. La profunda visión en la teoría que el trabajo de estos matemáticos proporciona, revela una enorme abundancia de tesoros preciosos ocultos en este dominio, apareciendo como un rico reto al explorador que conozca el valor de tales tesoros y con amor persiga el arte de lograrlos."

Es difícil, si no imposible, en un pequeño recuento evocar una ligera idea de lo que Hilbert forjó en teoría algebraica de números. Incluso en un contexto más amplio no sería fácil. Las propias contribuciones de Hilbert a la teoría algebraica de números son tan magníficas que a pesar de los logros de sus predecesores, uno tiene la impresión de que la teoría comenzó con él -aún más que la teoría de invariantes que él completó.

El trabajo de Hilbert se centra en la ley de reciprocidad y culmina en la idea de *cuerpo clase* o *cuerpo de clases*. La ley de reciprocidad, tal y como se entiende ahora, ha sido gradualmente desarrollada desde Gauss para residuos cuadráticos. Hilbert interpretó los residuos cuadráticos como normas en un cuerpo cuadrático y el símbolo residuo de Gauss como un símbolo de residuo norma. En esta interpretación se puede generalizar tanto como sea necesario en el estudio de los residuos potencia en la forma más eficiente. El singular comportamiento del primo par $p = 2$, el cual en general no admite la extensión de soluciones de $x^2 = a(\text{mod } p^k)$ a mayores valores de *k*, es corregido buscando soluciones no en los enteros ordinarios, sino en los números p-ádicos, aunque antes de Hensel los números p-ádicos no apareciesen explícitamente en la exposición de Hilbert. En cualquier caso, la idea de ellos, aunque no mencionados explícitamente, se debe a Hilbert. Su formulación de la ley de reciprocidad (como $\Pi_p(a / p) = 1$) presagiaba *idèles*, y su intuición del cuerpo de clases ha pròbado ser una guía segura para aquellos que más tarde intentaron buscar las metas que él propuso.

Después de 1902 Hilbert ya no volvería sobre el tema de los cuerpos de números algebraicos. Sin embargo, en una ocasión trabajó todavía en un problema de la teoría aditiva de números, y ello con un problema ya planteado en el siglo XVIII por el matemático inglés E. Waring. Hilbert resolvió afirmativamente este problema acerca de la posibilidad de expresar los números por medio de un número constante de potencias n-ésimas: para cada número natural *N* existe únicamente un número natural $Z(n)$ dependiente de *n*, tal que *N* puede expresarse como suma de a lo más de $Z(n)$ potencias n-ésimas. Este trabajo del año 1909 fue dedicado por Hilbert a su amigo prematuramente fallecido H. Minkowski. Una demostración elemental, pero en absoluto sencilla, de este profundo teorema no fue ofrecida hasta 1942 por el matemático Y.V. Linnik.

La teoría algebraica de números fue la culminación de la actividad de Hilbert. La abandonó cuando ya no quedaba casi nada por hacer. De todos modos encomendó a discípulos y colegas la continuación de su trabajo pionero en la teoría de cuerpos; entre tanto había centrado su atención en los fundamentos de la geometría y allí se dirigió. La geometría elemental era mucho más sencilla que la matemática sofisticada en la que había estado sumergido hasta el momento. El impacto de su trabajo en los fundamentos de la geometría no es comparable con sus trabajos en la teoría de invariantes, en la teoría algebraica de números y en el análisis. Difícilmente hay algún resultado de *Grundlagen der Geometrie* que no hubiese sido posible descubrir en tiempos de Hilbert si no lo hubiese hecho él. Pero lo que importa es que fue él quien lo escribió y que es un magnífico libro. Antes, en el semestre de invierno 1898-1899 Hilbert impartió un curso fundamental en torno a este tema. *Grundlagen der Geometrie* se publicó en 1898 y todavía se lee y por supuesto por muchos más lectores que entonces. Se ha ido modernizando en sucesivas ediciones, pero lo que muchos lectores no tienen en cuenta es que el campo de los fundamentos de la geometría ha evolucionado más rápidamente que el célebre libro de Hilbert, resultando ser más un documento histórico que una base de investigación o docencia moderna.

El resurgimiento de las matemáticas del siglo XVII no incluyó la geometría. Las materias de Euclides y su tratamiento axiomático se pusieron en tela de juicio antes del siglo XIX. Entonces fueron descubiertas las geometría no euclideas y proyectiva, y los fundamentos de la geometría se estudiaron de nuevo con la geometría diferencial (Riemann) y con la teoría de grupos (Helmholtz). G.K.C. von Staudt (1847) intentó una axiomática de la geometría proyectiva, pero fracasó debido a que no se dio cuenta del papel de los axiomas de continuidad. El primer sistema axiomático cerrado lógicamente de la geometría euclidea y proyectiva fue debido a Pasch (1882), y fue modificado y elaborado por la escuela italiana. A Hilbert se le suele atribuir la frase: "Debe ser posible sustituir en todas las proposiciones de la geometría las palabras punto, línea y plano por mesa, silla y alfombra." Pero Pasch ya había dicho lo mismo con otras palabras. Es más, eso no era todo lo que debería hacerse para entender la geometría como parte de las matemáticas, independientemente de su realidad espacial; uno debe de entender las relaciones entre estos puntos, líneas y planos de una forma abstracta.

Hilbert hizo popular la idea del carácter implícito de las definiciones, lo que intentó en su *Grundlagen der Geometrie*, pero G. Fano lo había formulado antes que él.

Así describe Hilbert al final de *Grundlagen der Geometrie* lo que perseguía con la obra:

"El presente tratado es una interrogación crítica de los principios de la geometría; nos hemos guiado por la máxima de discutir los problemas de forma que se examinen si se pueden resolver de una manera prescrita y con ayudas prefijadas. En mi opinión esta máxima contiene una prescripción natural y general. De hecho, cuando nos encontramos con un problema o planteamos un teorema en nuestras consideraciones matemáticas, nuestro deseo de conocer no se satisface hasta que no obtenemos la solución concreta y la prueba exacta o hasta que comprendemos la razón de la imposibilidad o necesidad del fallo.

De hecho, la presente investigación geométrica intenta responder a la pregunta de cuales axiomas, suposiciones o ayudas son necesarias para la demostración de una verdad geométrica elemental; después depende del punto de partida para elegir el método de demostración que uno prefiera."

Las metas de Hilbert en axiomática fueron consistencia e independencia. La geometría no euclidea se inventó para demostrar la independencia del axioma de las paralelas, y los modelos de la geometría no euclidea en la geometría euclidea probaron su consistencia relativa. El tratamiento de Hilbert fue al menos parcialmente diferente; utilizó la herramienta de la algebrización de forma inteligente. Usó los modelos y contramodelos algebraicos para probar la consistencia e independencia.

La algebrización en los fundamentos de la geometría no era una cosa nueva. Se remonta hasta Staudt, aunque antes de Hilbert no parece que fuese considerada como una prueba consistente. La escuela italiana ya había utilizado dicho método para pruebas de independencia; pero Hilbert superó a todos sus predecesores. La algebrización de la geometría, desde Hilbert, ha probado tener una fuerza importante para crear nuevas estructuras matemáticas. El aislar y entrelazar axiomas de incidencia y axiomas de continuidad se refleja de forma análoga en los modelos algebraicos. En el trabajo de Hilbert, éstos conducen a estructuras que prefiguran las ideas de cuerpo y espacio topológico, o yuxtaposición de ambos. De hecho, Hilbert enseñó a los matemáticos cómo axiomatizar y cómo debería comportarse un sistema de axiomas.

En 1904 Hilbert dejó asombrado al mundo matemático cuando rescató el principio de Dirichlet que había caído en descrédito después de las críticas de Weierstrass. Antes de Weierstrass se había supuesto en el cálculo de variaciones que la cota inferior de un funcional F existía y que por tanto había un mínimo. Si alguna integral curvilínea sobre un camino entre dos puntos era acotada, debería existir una curva mínima. El problema de valores frontera de la ecuación potencial se resolvía, según el principio de Dirichlet minimizando $F(u) = \int |\mathrm{grad}\ u|^2\, d\omega$ bajo las condiciones frontera. Después de que Weierstrass probase que el argumento no estaba justificado el principio se evitaba o se rodeaba.

Hilbert probó el principio de Dirichlet por la fuerza bruta, tan directamente como lo había hecho con la finitud de la base de la teoría de invariantes. Una sucesión u_n es elegida de forma que $\lim_n F(u_n) = \inf_u F(u)$, suponiendo el gradiente grad u_n acotado. Entonces un proceso diagonal ahora clásico proporciona una subsucesión que converge primero en un subconjunto denso numerable y, por tanto, en todas las partes y además uniformemente. El método parece trivial hoy porque se ha convertido en la más divulgada herramienta del análisis funcional.

Hilbert enriqueció también la teoría clásica de variaciones, pero su contribución más importante al análisis son las ecuaciones integrales, que trató en una serie de artículos entre los años 1904 y 1910. Hilbert recopiló sus vastos resultados con proyección de futuro en la monografía, que aún hoy en día mantiene su actualidad, *Elementos de una teoría general de las ecuaciones integrales lineales* (1912). En el transcurso del siglo XIX se sabía que las ecuaciones integrales del tipo $f - Af = g$ (donde A es el operador integral y f la función desconocida) eran mucho más fáciles de tratar que las ecuaciones del tipo $Af = g$. Liouville (1837) abordó una ecuación de este tipo y la resolvió mediante iteración. Lo mismo hizo August Beer (1865), cuando intentó resolver el problema de la frontera de la teoría del potencial por medio de una doble capa sobre la frontera. Carl Neumann (1877) lo abordó por formal inversión de 1-A. Este mismo método fue muy útil en las ecuaciones de Volterra (1896). Cuando Poincaré (1894) investigó el problema frontera $\Delta f - \lambda f = h$, apareció la ecuación integral $f - \lambda Af = g$ por medio de la función de Green, de modo que la solución dependía analíticamente del parámetro λ. Esto permitió la prolongación analítica a través del λ-plano excepto para ciertas singularidades polares. Para resolver este tipo de ecuación, Fredholm (1900, 1902) utilizó el método del determinante, pero su mayor mérito fue ver claramente las singularidades λ como autovalores de los problemas homogéneos.

Fue en este punto donde intervino Hilbert. Cambió las ecuaciones no homogéneas por homogéneas, los no autovalores por los autovalores, o aún mejor, pasó de la ecuación lineal a la forma cuadrática, esto es, a su transformación sobre los ejes principales. El método de Fredholm le indicó cómo abordar esta transformación desde el caso de dimensión finita. Era un procedimiento algo tosco y pronto fue superado por Erhard Schmidt (1905) de una manera más elegante. Hilbert coordinó espacios de funciones mediante bases ortonormales de funciones continuas e introdujo el espacio de las sucesiones numéricas de cuadrado sumable, el espacio de Hilbert como ha sido llamado desde entonces. Aquí la transformación sobre los ejes principales fue utilizada, primero sobre las formas cuadráticas llamadas "completamente continuas" ("compactas", en términos modernos), y después sobre formas acotadas, donde Hilbert descubrió y manejó hábilmente el espectro continuo mediante la integral de Stieltjes. El término "espectro" fue introducido por Hilbert a quien se le atribuyen también nuevos y sugestivos términos. "Espectro" tiene un sonido onomatopéyico y veinte años después los físicos estudiaron espectros de operadores para explicar los espectros ópticos.

Parece extraño hoy el paso de Hilbert al espacio de sucesiones numéricas, pero entonces se necesitaba de forma imperiosa; el espacio de Hilbert tal y como lo conocemos hoy era impensable antes del teorema de Fisher-Riesz (1907), y su formulación abstracta data de 1920. El tratamiento que Hilbert da a la resolución de espectros es algo retorcido, pero fue simplificado mucho más tarde, esencialmente por F. Riesz (1913). La teoría fue extendida para operadores autoadjuntos por J. von Neumann y M.H. Stone alrededor de 1930.

Desde 1909 Hilbert desarrolló un gran interés por la física teórica, aplicando directamente sus métodos a ella. Los resultados sólo fueron publicados parcialmente. Primero, recurriendo de nuevo a estipulaciones axiomáticas, se ocupó con detenimiento de la teoría cinética de gases. Otras investigaciones se encaminaron hacia la ley de Kirchhoff sobre la proporcionalidad entre la emisión y la absorción de la radiación, así como por último hacia el principio de Hamilton de la teoría general de la relatividad. A estos trabajos se refirirían posteriormente los físicos atómicos, entre ellos P. Debye y M. Born.

Finalmente, en el año 1924, se publicaron los *Métodos de la Física Matemática* escritos en colaboración con R. Courant y en los que se exponían sistemáticamente sus métodos y resultados perfeccionados, así como también los de sus discípulos y colaboradores.

A comienzo de los años 20 Hilbert reanudó de nuevo con redobladas energías sus investigaciones sobre los fundamentos de las matemáticas, aunque ahora en un sentido mucho más general y con objetivos mucho más ambiciosos que unos veinte años antes. No obstante, generalmente no alcanzan la inventiva de sus trabajos anteriores en las matemáticas. Lo mismo ocurre con sus trabajos sobre física matemática. Esto se hace evidente con el paso de los años. Sus contemporáneos estaban realmente impresionados, y en la actualidad es dificil no hacerlo, por su introducción del functor "transfinito" τ, (el cual para cada predicado A elige un objeto τA tal que $A(\tau A) \to A(x)$.) Desde luego, es una idea genial incorporar todas las herramientas de un sistema formal, tal como el cuantificador universal y existencial, y el axioma de elección por el símbolo τ y restaurar el punto de vista finito eliminándolo.

A un sistema axiomático para la construcción de una teoría, además de los requisitos de independencia y completitud, hay que exigirle, ante todo, la consistencia de los axiomas. Hilbert había descubierto que con respecto a una axiomática general la verificación de la consistencia interna en cuanto al contenido sólo podría ser relativa, es decir, sólo podría ser decidida mediante la construcción de un modelo. Pero como a su vez los elementos de este modelo son de tipo matemático, la consistencia de una teoría se reduce a la de la otra. Por este motivo Hilbert sustituyó -para escapar de este círculo vicioso- la consistencia en cuanto el contenido por una consistencia formal. Según Hilbert, un sistema de axiomas sólo queda totalmente libre de contradicción cuando a partir de él y mediante razonamientos lógicos es imposible deducir un enunciado y su negación.

Durante muchos años aquel artificio llevó a los investigadores por caminos erroneos. Pero cómo iban a pensar que la herramienta no iba a funcionar si todo lo que decía Hilbert era cierto. Uno de los deseos de Hilbert durante su primer periodo axiomático no estaba aún resuelto: después de la consistencia relativa de la geometría quería probar la consistencia de las matemáticas en sí mismas o, como él mismo decía, la consistencia de la teoría de números. Este deseo se convirtió en una auténtica obsesión. Siempre que las matemáticas no sean más que contar habas, no es un problema la consistencia. Empieza a ser un problema cuando las matemáticas tratan los infinitos como bolsas de habas. Cantor hizo eso con la teoría de conjuntos y Hilbert terminó haciendo lo mismo con la matemática.

Él concibió la idea del formalismo: reducir la matemática a un juego finito con un número infinito de fórmulas definidas de forma finita. El juego debe ser consistente, esto es lo que tienen que probar los metamatemáticos de forma que dentro de este juego no se obtenga nunca la fórmula $0 \neq 0$. Pero si se quiere evitar un círculo vicioso, la metamatemática se debe restringir a contar habas. Si alguna cadena del juego da $0 \neq 0$, se deben eliminar las conexiones que involucran el transfinito τ y reducir la cadena a una donde se cuenten habas. Esta era la idea de Hilbert de una prueba con consistencia.

Como complemento adecuado e indispensable de las investigaciones sobre la axiomática, Hilbert continuó desarrollando el cálculo lógico en conexión con G. Peano, G. Frege, E. Schoröder, B. Russell y otros. Para Hilbert la deducción en cuanto al contenido quedaba sustituída por una serie de actos puramente formales, es decir, por cálculos con signos según reglas fijas. De este modo las matemáticas se convertían para Hilbert en la teoría general de los formalismos. Además en el año 1928 Hilbert publicó junto con su discípulo W. Ackermann el tratado *Elementos de la Lógica Teórica*, que todavía constituye hoy una valiosísima introducción a la lógica matemática.

Sobre la relación entre su método formal y la axiomática, Hilbert manifestaba su opinión muy a menudo -incluso en oposición a otras corrientes filosóficas que argumentaban en el ámbito de las matemáticas-. Así por ejemplo se lee en el trabajo *Los fundamentos de las Matemáticas* de 1928:

"... en mi teoría se sustituye la deducción en cuanto al contenido por una actuación externa según ciertas reglas; merced a ello el método axiomático alcanza esa seguridad y perfección de las cuales es capaz y de las que tiene también necesidad si es que debe llegar a ser instrumento básico de toda investigación teórica".

En su entorno varios colegas pensaban que esto no era válido. Otros que era irrelevante. Su adversario más intransigente fue L.E.J. Brouwer, quien desde 1907 manifestó que era más importante la certeza que la consistencia en matemáticas. Construyó una nueva matemática, llamada intuicionismo, en la que muchos conceptos de la matemática clásica no tenían importancia y muchos teoremas clásicos desaprobados. En los comienzos de los años 20 Hermann Weyl, uno de los más famosos discípulos de Hilbert, se unió al grupo Brouwer. Tanto Hilbert como Brouwer eran radicales y para ambos las matemáticas no eran cosa de broma. Así que desde que se conocieron mantuvieron tensiones y discusiones en los años 20.

Mientras tanto el mundo matemático no tuvo que tomar partido hasta que ocurrió la catástrofe. En 1931 Kurt Gödel probó que el método de Hilbert no era factible. Era un resultado profundo, aunque aparecieron paradojas como la de Löwenheim-Skolem. ¿Es que Hilbert no dudó de su método? Todo lo que publicó es tan ingenuo que parece que la respuesta es "sí". ¿Pero cómo fue posible?.

Los resultados de Tarski, de Gödel y los del matemático norteamericano P.J. Cohen de 1964 acerca de la Hipótesis del Continuo evidencian que, aun reconociendo el destacado papel de la axiomática como método de investigación matemática, ésta no puede ser elevada a la categoría de único método de investigación matemática. Se ha demostrado que el método axiomático no puede por sí solo servir de fundamento de las matemáticas y que por consiguiente la matemática no es como pensaba Hilbert una *ciencia sin hipótesis*. Antes bien, las formas de reflejar de uno u otro modo la realidad objetiva y los planteamientos desarrollados a partir de las exigencias sociales pasan a formar parte de las condiciones bajo las cuales las matemáticas pueden ser cultivadas. De entre la infinidad de teorías concebibles construidas axiomáticamente, mediante acoplamiento histórico-social de reacción con el entorno humano, son seleccionadas aquéllas cuyo conjunto nosotros denominamos ciencia matemática. Y sólo han tenido y tienen -como demuestra la historia- existencia, han permanecido y se mantienen vivas y fecundas aquellas teorías que bajo cualquier forma se orientan hacia problemas de la realidad objetiva en su más amplio sentido.

Por ello forma parte de las más hermosas y provechosas tareas de un matemático el colaborar allí donde se obtengan nuevos descubrimientos sobre la realidad objetiva que abran la posibilidad de su transformación en beneficio de la Humanidad. David Hilbert fue siempre consciente de este auténtico y fundamental deseo humanista de toda ciencia y durante toda su vida mantuvo esta convicción.

Era ilimitada la confianza de Hilbert en las posibilidades del pensamiento humano y en su capacidad cognoscitiva. A aquel pesimismo epistemológico formulado a finales del siglo XIX por el influyente fisiólogo alemán E. du Bois-Reymond, pesimismo que éste había expresado con la fórmula: *Ignoramus. Ignorabimos* (Nada sabemos. Nada sabremos), Hilbert contraponía en el año 1900 en el Congreso de Matemáticos de París su opinión:

"Aquí está el problema, busca la solución. Puedes hallarla mediante el pensamiento puro, pues en las matemáticas no existe ningún *Ignorabimos*."

Y cuando tras el descubrimiento de las antinomias de la teoría de conjuntos algunos partidarios del intuicionismo condenaron la teoría de conjuntos y magnificaron las dificultades lógicas en su seno, Hilbert les salió al paso con la referencia a las ventajas del modo de pensar de la teoría de conjuntos y de las matemáticas modernas basadas en ella:

"Deseamos fecunda formación de conceptos y modos de razonar allí donde se presente la más mínima posibilidad, seguirle la pista atentamente y fomentarla, apoyarla y hacerla utilizable. Nadie podrá expulsarnos del Paraíso que Cantor ha creado por nosotros".

Todavía en otra ocasión, ya hacia el final de su actividad investigadora, manifestó Hilbert de modo muy sugestivo su credo epistemológico. No iría muy errado al suponer que esta declaración suya hubiese sido pensada incluso como una especie de testamento para las futuras generaciones de científicos: con motivo de su jubilación, Hilbert pronunció en 1930 una conferencia en torno al ambicioso tema *Conocimiento de la Naturaleza y Lógica.* Su disertación comenzaba con las palabras:

"El conocimiento de la Naturaleza y de la Vida es nuestra más noble tarea. Todo esfuerzo y voluntad humanos desembocan allí y en ello siempre nos ha tocado en suerte lograr un éxito creciente".

Al final de su discurso Hilbert abordaba una vez más el *insensato Ignorabimus*. Las palabras finales de este discurso radiado fueron posteriormente grabadas sobre su lápida sepulcral en Gotinga, diciendo:

"*Debemos saber. Sabremos*" (Véase, [18]).

Hacia el cambio de siglo Hilbert ya gozaba de fama universal como uno de los matemáticos vivos más fecundos. Posiblemente en aquel momento se hallaba en la cúspide de su capacidad creadora. En el Congreso Internacional de Matemáticos del año 1900 en París se le encomendó la principal ponencia. En su conferencia *Problemas de las Matemáticas*, pronunciada el 8 de Agosto, Hilbert planteó veintitrés problemas matemáticos a los que, por ser los problemas esenciales y decisivos de las matemáticas en aquella época, habría que dar especial atención. En considerable medida la evolución posterior ha dado la razón a Hilbert, al tiempo que su conferencia configuraba en gran medida el ulterior desarrollo de las matemáticas del siglo XX.

A la vista de este notabilísimo e insólito resultado no es de extrañar que desde entonces la Conferencia de Hilbert en París haya atraído sobre sí permanente atención y que se aluda a ella como un ejemplo verdaderamente clásico de predicción científica (Véase, [18]).

Estos son los problemas que planteó Hilbert allí para los que no creen en el *Ignorabimos*:

1. *El Problema del Continuo.* Después de muchos intentos fracasados el problema fue resuelto por Paul J. Cohen en 1963, aunque en otro sentido del que Hilbert lo concibió. Se ha probado que es indecidible. En el mismo sentido Hilbert menciona la buena ordenación que llevó a cabo Zermelo.
2. *La consistencia de los axiomas de la aritmética.* Ya hemos hablado de ella.

3. *La existencia de tetraedros con bases y alturas iguales que no son iguales en el sentido de división y compleción.* La cuestión se resolvió afirmativamente por Max Dehn poco tiempo después.
4. *La línea recta como camino más corto.* Es una formulación muy vaga del problema.
5. *La analiticidad de los grupos continuos.* Después de pequeños avances en el problema, se resolvió en 1952.
6. *El tratamiento matemático de los axiomas de la física.* Todavía hoy la axiomática en la física no es muy satisfactoria. El mejor ejemplo es el tratado de *Fundamentos Matemáticos de Termodinámica* (1964) de R. Giles, pero en general no está muy claro lo que significa realmente axiomatizar la física.
7. *Irracionalidad y trascendencia de ciertos números.* Desde C.L. Siegel (1921) y A.O. Gelfond (1929) a A. Baker (1966-1969), problemas de esta clase han sido resueltos satisfactoriamente.
8. *Problemas de números primos.* La conjetura de Riemann sobre los ceros de la función ζ continúa abierta todavía. En cuerpos algebraicos ha sido tratado por E. Hecke (1917). La conjetura de Goldbach fue sucesivamente resuelta por L. Schnirelmann (1930), I.M. Vinogradov (1937), y otros.
9. *Prueba de la más general ley de reciprocidad en cuerpos de números arbitrarios.* El problema ha sido resuelto por el mismo Hilbert, Artin (1928) y I.R. Safarevic (1950).
10. *Decisión sobre la resolubilidad de una ecuación diofántica.* Este es un problema muy general. Ha sido tratado en varias ocasiones, por ejemplo, por Thue (1908) y por C.L. Siegel (1929). El problema general fue resuelto negativamente por J.V. Matijasevic en 1969.
11. *Formas cuadráticas con coeficientes algebraicos.* Importantes resultados han sido obtenidos por Helmuth Hasse (1929) y por C.L. Siegel (1936-1951). Conexiones con *idèles* y grupos algebraicos fueron demostradas por A. Weil y T. Ono (1964-1965).
12. *Teorema de Kronecker sobre cuerpos abelianos para cuerpos algebraicos arbitrarios.* Se refiere a hallar las funciones que para un cuerpo arbitrario juegan el mismo papel que las funciones exponenciales para el cuerpo racional y las funciones modulares elípticas para cuerpos cuadráticos imaginarios. Se ha hecho bastante en este tema, pero está lejos de ser resuelto.
13. *Imposibilidad de resolver la ecuación general de grado siete por funciones de dos variables.* Resuelto por V.I. Arnold (1957), quien admite funciones continuas, pero no se ha resuelto para el caso que se requiera la analiticidad.
14. *Finitud de sistemas de funciones enteras relativas.* Esto se resolvió negativamente por Masayoshi Nagata (1959).
15. *Fundamento exacto del cálculo enumerativo de Schubert.* Aunque la geometría enumerativa ha sido fundamentada de varias formas, la justificación del cálculo de Schubert está aún abierta.

16. *Topología de curvas y superficies algebraicas reales.* Los resultados son todavía esporádicos.
17. *Representación de formas definidas mediante cuadrados.* Fue resuelto por Artin (1926).
18. *Espacio de construcción para poliedros congruentes.* La finitud del número de grupos con dominio fundamental fue probado por Ludwig Bieberbach (1910). La conjetura de Minkowski sobre el cubrimiento de espacios con cubos ha sido probado por Georg Hajos (1941).
19. *El carácter analítico de soluciones de problemas de variación.* Se han conseguido algunos resultados especiales.
20. *Problemas generales de valores frontera.* Aparte de la investigación del propio Hilbert sobre el problema de Dirichlet, otras muchas investigaciones se han realizado en este área.
21. *Ecuaciones diferenciales con un grupo de monodromía dado.* Este dificil problema propuesto por B. Riemann, fue completamente resuelto por Hilbert en 1905.
22. *Uniformización.* Para curvas, lo resolvieron Koebe y otros.
23. *Extensión de los métodos del cálculo de variaciones.* Ha sido tratado por varios matemáticos, entre ellos el mismo Hilbert. [Véase, 13].

Al final de su Conferencia de París Hilbert subrayó la unidad orgánica de las matemáticas:

"... La ciencia matemática es en mi opinión un todo indivisible, un organismo cuya posibilidad de supervivencia está condicionada por la relación entre sus partes. Pues en toda la heterogeneidad del objeto del conocimiento matemático percibimos en detalle la igualdad de los recursos lógicos, la analogía en la formación de conceptos en la totalidad de las matemáticas y las numerosas afinidades en sus diversas ramas de conocimiento... El carácter unitario de las matemáticas reside en la esencia intrínseca de esta ciencia; pues la matemática es el fundamento de todo conocimiento científico riguroso. Para que desempeñe plenamente este elevado destino, le deseamos que en el nuevo siglo le surjan maestros geniales y gran cantidad de jóvenes enardecidos de noble pasión".

Las conclusiones de su célebre Conferencia de París suenan como una referencia a los periodos subsiguientes de la investigación de Hilbert, a su giro hacia el análisis y la física matemática. Los motivos del cambio residen sin lugar a dudas en el impetuoso y verdaderamente sensacional avance de las ciencias naturales, sobre todo de la física, a comienzos del siglo XX. Piénsese en M. Planck y la teoría cuántica; en A. Einstein y la teoría de la relatividad; en W.C. Röntgen, W. Nernst, E. Rutherford, P. y M. Curie, M. von Laue y P. Debye.

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Bolonia de 1928 Hilbert había formulado los problemas acerca de la completitud de la lógica por una parte y de la teoría elemental de números por otra. En 1930 el primer problema fue resuelto en sentido positivo por el joven matemático K. Gödel; por el contrario, un año después el segundo problema fue respondido en sentido negativo. Actualmente esta no completitud no es una lacra, una deficiencia del mético axiomático formulado por Hilbert, la cual podría superarse por ejemplo añadiendo otros axiomas. Gödel había demostrado en realidad que es esencialmente imposible establecer un sistema axiomático *al alcance de la vista* para la teoría elemental de números que sea no sólo consistente sino también completo. (Véase, [18]).

Alan Turing (1937) para tratar un problema de muy amplio alcance conocido como el *Entscheidungsproblem*, parcialmente planteado por Hilbert, en el décimo problema de la conferencia de París y, de forma más completa en el Congreso de Bolonia. Hilbert había pedido nada menos que un procedimiento algorítmico general para resolver cuestiones matemáticas -o, mejor dicho, una respuesta a la cuestión de si semejante procedimiento podía o no existir en principio. Hilbert tenía también un programa para situar las matemáticas sobre una base inatacable, con axiomas y reglas que quedaran establecidas de una veż para todas, pero cuando Turing produjo su gran obra dicho programa había sufrido un golpe decisivo por parte del sorprendente teorema demostrado por Gödel en 1931. El problema de Hilbert que interesaba a Turing, (el *Entscheidungsproblem*), iba más allá de cualquier formulación concreta de las matemáticas en términos de sistemas axiomáticos. La pregunta era: ¿existe algún procedimiento mecánico general que pueda, *en principio*, resolver uno tras otro todos los problemas de las matemáticas (que pertenezcan a alguna clase apropiadamente bien definida)?.

Parte de la dificultad para resolver esta cuestión consistía en decidir lo que se debe entender por "procedimiento mecánico". El concepto quedaba fuera de las ideas matemáticas comunes de la época. Parece claro que también Turing consideraba el cerebro humano como un ejemplo de "máquina" en este sentido, de modo que, cualesquiera que fueran las actividades que pudiera llevar a cabo un matemático humano cuando aborda sus problemas de matemáticas, éstas también tendrían entrada en la etiqueta de "procedimientos mecánico" (R. Penrose, *La nueva mente del emperador*. Mondadori, Madrid, 1991).

F.W. Levi decía: "Si fuese pintor podía dibujar el retrato de Hilbert, sus características están grabadas en mi mente, sobre todo cuando hace cuareta años estaba en la cima de su vida. Todavía recuerdo su frente ancha, sus ojos brillantes mirando a través de sus gafas, su barbilla pronunciada y acentuada con una barba corta, incluso recuerdo su sombrero Panamá, y su voz aguda del Este de Prusia todavía suena en mis oídos (F.W. Levi. *Forscher un Wissenschaftler im heustigen Europa*).

Esta descripción de Levi está confirmada por muchos otros. En cambio las personas que conocieron a Hilbert posteriormente se desilusionaron profundamente.

Hilbert tenía una personalidad fuerte y era un libre pensador en otras materias que no fuesen las matemáticas. Como prusiano del Este tenía inclinaciones políticas conservadoras pero rechazaba todo tipo de emociones nacionalistas. Durante la Primera Guerra Mundial rechazó la forma de la famosa Declaración del Mundo Cultural, y cuando el matemático francés Darboux murió durante la guerra, él publicó su necrológica.

Los biógrafos de la época de Hilbert son más o menos convencionales pero nunca bizantinos. La tradición oral es más característica y ha sido recogida por Constance Reid, quien en su biografía da una idea de Hilbert y su mundo. En ella incluye una reimpresión de la necrológica de H. Weyl, quien es el experto más importante de su trabajo y refleja la influencia personal que Hilbert tenía sobre sus estudiantes y colaboradores: "Hilbert era como la flauta del flautista de Hamelin seduciendo a las ratas para que le siguieran al gran y profundo río de las matemáticas". Una prueba de ello son las sesenta y nueve tesis dirigidas por él, muchas de ellas de estudiantes que llegaron a ser matemáticos famosos.

Para terminar esta pequeña biografía de Hilbert nada mejor que repetir las palabras grabadas sobre su tumba en Gotinga, que rechazaban el *insensato Ignorabimus*:

"*Debemos saber. Sabremos*".

Bibliografía

[1] HILBERT, D.: *Gesammelte Abhandlungen.* 3 vols. Berlin, 1943-1935; 2ª ed., 1970.

[2] HILBERT, D.: *Über das Unendliche.* Math. Annalen, **95** (1926).

[3] HILBERT, D.: *Grundlagen der Geometrie.* Leipzig, 1899; 9ª ed., Stuttgart, 1962.

[4] HILBERT, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen.* Leipzig, 1912; 2ª ed., 1924.

[5] HILBERT, D.: *Die Grundlagen der Mathematik.* Abh. Math. Seminar Hamburg, **6** (1928).

[6] HILBERT, D. y H. FREGE: *Briefwechsel.* Sitsungsberichte Heidelberges Akademie der Wissenschaften (1941).

[7] ALEXANDROV, P.S.: *Problemy Gilberta.* Moscow, 1969. Editado en alemán por H. Wussing. Leipzig, 1971.

[8] ASSER, G.: *Das Wirken David Hilberts auf dem Gebiet der Grundlagen der Mathematik.* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR. **2** (1968), 67-90.

[9] BIEBERBACH, L.: *Über den Einfluss von Hilbert's Pariser Vortrag über "Mathematische Probleme" auf die Entwicklung der Mathematik in den letzten dreissing Jahren.* Naturwissenschaften, **18** (1930), 1101-1111.

[10] BLUMENTHAL, O. y O. TOEPLITZ, M. DEHN, R. COURANT, M. BORN, P. BERNAYS, K. SIEGEL: *David Hilbert zur Feier seines* 60. *Geburtstages.* Die Naturwissenschaften, **10** (1922), 67-99.

[11] CARATHÉODORY, C.: *Hilbert.* Sitsungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Math.- nat. Abt. (1943), 350-354.

[12] CARATHÉODORY, C. y A. SOMMERFELD: *Hilbert.* Naturwissenschaften **31** (1943), 213-214.

[13] FREUDENTHAL, H.: *Hilbert, David.* Dictionary of Scientific Biografy, 3, New York: Charles Scribner's Sons, 1971, 388-395.

[14] GRELL, H.: David Hilbert: *Gesamtpersönlichkeit und algebraischzahlentheortisches Werk.* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR. 2 (1968), 1-46.

[15] REID, C.: *Hilbert.* Berlin-Heidelberg.New York, 1970.

[16] SCHRÓEDER, K.: *Hilberts Beiträge zur Analysis und Physik.* Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft der DDR. 2 (1968), 47-66.

[17] WEYL, H.: *David Hilbert and His Mathematical Work.* Bull. of the Amer. Math. Soc. **50** (1944), 612-654.

[18] WUSSING, H. y W. ARNOLD: *Biografías de grandes matemáticos.* Universidad de Zaragoza, 1989.