Banach

M. LÓPEZ PELLICER*

Deseo expresar mi agradecimiento a la Real Academia de Ciencias de Madrid por invitarme a dar una conferencia en el Curso de Historia de la Matemática del siglo XX sobre Stefan Banach, uno de los sabios polacos más eminentes de la historia de la ciencia.

1.- Banach, Steinhaus y los desarrollos ortogonales.

Stefan Banach nació el 31 de marzo de 1892 en Cracovia. Su padre se llamaba Greczek, provenía de una familia montañesa de Jordanów y estaba empleado en la dirección de ferrocarriles en Cracovia.

En cuanto nació se le dejó en casa de una nodriza, apellidada Banach. Era planchadora en una buhardilla de la calle Grodzka, número 70 o 71. Desde ese momento Banach no tuvo más relaciones con su madre, y no la conoció nunca. Su padre tampoco se ocupó excesivamente del hijo, quien desde los quince años tuvo que ganarse la vida dando clases, preferentemente de Matemáticas.

En 1910 obtuvo su certificado de madurez en el cuarto Instituto de Cracovia, donde estudió de forma autodidacta matemáticas, marcando su vida el libro de Tannery sobre *Teoría de funciones reales*. No se sabe cómo aprendió francés.

Frecuentó durante poco tiempo y muy irregularmente las conferencias de matemáticas de Stanislas Zaremba en la Universidad de Cracovia, pues inmediatamente se trasladó a Leópol (Lwów) desde donde hizo sus estudios de ingeniería desde 1910 hasta 1914.

Al estallar la primera guerra mundial volvió a Cracovia y en medio de una penosa situación empezó a estudiar con profundidad matemáticas hacia 1916. Cuenta Steinhaus que en verano de 1916, paseando por un parque de Cracovia, oyó una conversación de dos jóvenes que hablaban de *"la integral de Lebesgue"*. Lo inesperado del hecho llevó a Steinhaus a conocerles. Eran Stefan Banach y Otto Nikodym. Le dijeron tener un tercer compañero de nombre Wilkosz.

---

* Académico Correspondiente

Los tres estaban unidos por un amor intenso a las matemáticas y por la situación desesperada de Cracovia, entonces una fortaleza. Vivían con la incertidumbre del día de mañana, sin tener la posibilidad de encontrar trabajo ni de establecer algún contacto científico. Esa atmósfera de Cracovia en 1916 no impedía a los tres jóvenes reunirse frecuentemente en un café, donde a pesar del gentío y alboroto pasaban el tiempo resolviendo problemas. El ruido parecía no perjudicar nada a Banach en sus investigaciones. Incluso escogía con agrado mesas próximas a la orquesta.

Steinhaus en ese primer encuentro con Banach le comentó que buscaba una función f de L^1 cuya serie de Fourier converja a f casi por todas partes sin ser convergente en L^1. Las condiciones de la guerra propiciaban que ambos desconociesen que dos años antes Hahn había encontrado una función $f \in L^1$ cuya serie de Fourier no converge a f en L^1, poniendo en evidencia el distinto comportamiento de las series de Fourier en L^1 y L^p, para $p > 1$, gracias al teorema de Riesz y Fischer en L^2 y a teoremas análogos en L^p, $p > 1$. Fue grande la sorpresa de Steinhaus cuando, algunos días después del encuentro en el parque, Banach le dio la solución casi completa de su problema utilizando la técnica de conjuntos residuales, con una pequeña reserva provocada por el desconocimiento de Banach de un ejemplo de Du Bois-Reymond.

Así nació el primer artículo de Banach, publicado con Steinhaus, presentado con cierto retraso a la Academia de Cracovia por S. Zaremba, y titulado:

* *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier. Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovia, serie A (1918) 87-96.*

También contiene un ejemplo de una función de $L^1 - L^2$ cuya serie de Fourier converge en L^1.

Banach ya no abandonará el tema de las series ortogonales, y en 1920 publica:

* *Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales, en Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et de Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A: Sciences Mathématiques (1919) 66-72.*

Dada una sucesión ortonormalizada de funciones de una variable en un intervalo $[a,b]$ establece un teorema análogo al conocido resultado de que, salvo en los puntos $2k\pi$, $k \in \mathbf{N}$ la media aritmética de las n primeras funciones del sistema ortonormal trigonométrico tiende a cero cuando n tiende a ∞. El teorema de Banach habla de convergencia en media hacia cero casi por todas partes, por lo que modificando las funciones en conjuntos nulos se obtiene convergencia puntual por todas partes. Steinhaus le hizo notar que el resultado era independiente de la completitud de la sucesión ortogonalizada.

Tres años más tarde, en 1923, Banach continuaría estas investigaciones con su artículo:

* *An example of an orthogonal development whose sum is everywhere different from the developed function, publicado en los Proceedings of the London Mathematical Society(2),* **21** *(1923) 95-97,*

cuyo objetivo era determinar una función $f \in L^1([a,b]) - L^2([a,b]), f(t) > 0$ para cada $x \in [a,b]$ y un sistema completo ortonormal $\{\psi_n(t) \colon n \in \mathbf{N}\}$ tal que la serie de Fourier de $f\left(\sum d_n \psi_n(t), \text{con } d_n = \int_a^b f(t)\,\psi_n(t)\; dt\right)$ convergiese puntualmente en $[a,b]$, pero la suma fuese diferente de $f(t)$ en cada $t \in [a,b]$.

En la sesión conmemorativa del 15 aniversario del fallecimiento de Stefan Banach, con la que abrió sus sesiones la Conferencia de Análisis Funcional organizada en 1960 por el Instituto Matemático de la Academia Polaca de las Ciencias, Steinhaus en su conferencia "Recuerdo de Stefan Banach" dijo que este era el trabajo que personalmente más le había impresionado. Banach consideró una función $f \in L_1(0,2\pi)$ tal que $\int_0^{2\pi} f = 1$ y $\int_0^{2\pi} f^2 = \infty$ y un sistema ortonormal completo $\{\varphi_n(t) \colon n \in \mathbf{N}\}$ de $L^2([a,b]$, añadiendo a $\varphi_n(t)$ una constante α_n tal que $\int_a^b f(t)\,(\alpha_n + \varphi_n(t))dt = 0$. La ortonormalización de $\{\alpha_n + \varphi_n(t), n \in \mathbf{N}\}$ por el método de Schmidt da un sistema ortonormal $\{\psi_n(t) \colon n \in \mathbf{N}\}$ completo en $L^2([a,b]$ que resuelve el problema, pues $\int_a^b f(t)\psi_n(t)\; dt = 0$.

Nueve años después de su primer trabajo encontramos otra vez juntos los nombres de Banach y Steinhaus en el artículo

* *Sur le principe de la condensation de singularités, Fundamenta Mathematica* **9** *(1927) 50-61,*

donde completando los resultados de su primer artículo conjunto prueban la existencia de una función integrable $f(x)$ tal que las sumas parciales $s_n(x)$ de su serie de Fourier tienen la propiedad de que $\limsup_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta |s_n(t)|\,dt = +\infty$, para todos los intervalos $[\alpha,\beta]$.

El nombre de principio de condensación de singularidades viene de Hankel y nos permite la construcción de un ente con infinitas singularidades a partir de infinitos entes tales que cada uno sólo tiene una singularidad.

Banach y Steinhaus reducen el principio de condensación de singularidades a los dos siguentes teoremas de cálculo funcional:

Teorema 1.- *Sea* $\{u_{pq}(x)\}$ *una sucesión doble de funcionales lineales de manera que a cada p corresponde un* x_p *tal que se tenga*

$$\lim_{q\to\infty} \sup \left\| u_{pq}\left(x_p\right) \right\| = \infty$$

entonces existe un x, independiente de p, tal que

$$\lim_{q\to\infty} \sup \left\| u_{pq}(x) \right\| = \infty$$

Teorema 2.- *Sea* $\{u_{pq}(x)\}$ *una sucesión doble de funcionales lineales tales que a cada p corresponde un* x_p *tal que la sucesión* $\{u_{pq}(x_p)\colon q \in \mathbb{N}\}$ *es divergente. Entonces existe un x, independiente de p, tal que todas las sucesiones* $\{u_{pq}(x)\colon q \in \mathbb{N}\}$ $p \in \mathbb{N}$ *son divergentes.*

Saks leyó el manuscrito y simplificó las pruebas del apartado §2, evitando así cálculos laboriosos.

2. Del nacimiento de los espacios de Banach al teorema de Hahn-Banach. Contribuciones en teoría de la medida y series ortogonales.

Entre las dos publicaciones conjuntas de Banach y Steinhaus, que son los artículos primero (año 1918) y diecinueve (año 1927) se detecta un profundo cambio, cuya evolución se puede analizar por las diecisiete publicaciones intermedias.

* *Sur l'equation fonctionelle* $f(x+y) = (f(x) + f(y)$. *Fundamenta Mathematicae* **1** (1920) 123-124.

Las funciones reales de variable real que satisfacen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ se llaman funciones additivas. Cauchy probó en 1821 que toda función aditiva satisface la equación $f(rx) = rf(x)$ con r racional. Si f es continua se obtiene la linealidad $f(x) = xf(1)$. Hammel en su trabajo de 1905 en Mathematische Annalen, utilizando el lema de Zorn, probó la existencia de bases en $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{Q}$,lo que implicaba la existencia de funciones aditivas no lineales.

Dado pues que en las funciones aditivas de la continuidad se deduce la linealidad, era natural estudiar condiciones más débiles que implicasen la linealidad. Este estudio era propiciado por ciertas investigaciones sobre el fundamento de la Mecánica, y en particular sobre la ley de composición de fuerzas.

En este trabajo, Banach, utilizando el teorema de Lusin de que para toda función medible existe otra continua que coincide con ella salvo en un conjunto de medida tan pequeña como se desee, probó que toda función aditiva y medible Lebesgue es lineal. Este resultado también fue obtenido independientemente por Fréchet, Sierpinski, Kac, Alexiewicz y Orlicz, y fue mejorado por Sierpinski, que demostró que toda función aditiva que sea mayorada por una función medible Lebesgue es lineal.

Entonces Banach soñaba con ser nombrado asistente en la cátedra de Matemáticas de la Escuela Técnica Superior de Léopol (Lwów).

Este sueño se realizó en 1920, cuando Antonio Lomnicki le propuso para este empleo, obteniendo ese mismo año el grado de Doctor. Desde entonces la situación de Banach cambió diametralmente. Su supervivencia estaba asegurada, se casó y se fue a vivir a los edificios de la Universidad, en la calle de San Nicolás. De esa época son sus artículos:

* *Sur les ensembles de points oú la derivé est infinie, publicado en los Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* **173** (1921) 457-459.

Lusin probó que el conjunto de puntos en que la derivada de una función continua es $+\infty$ tiene medida nula. Banach prueba que el conjunto de puntos x en que $f'_+(x) = +\infty$ tiene medida nula para toda función $f(x)$ de variable real.

* *Sur les solutions d'une equation fonctionnelle de J.Cl. Maxwell, publicado en Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et de Lettres, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, Série A: Sciences Mathématiques* (1922) 1-8.

Examinando la ley de distribución de velocidades de un gas J.Cl. Maxwell obtuvo la ecuación funcional

$$f(u)f(v)f(w) = \varphi(u^2 + v^2 + w^2)$$

Los métodos clásicos de su resolución siempre conllevaban hipótesis sobre la naturaleza de la función f. Si por ejemplo se supone derivabilidad en f el problema se reduce a la resolución de una ecuación diferencial.

En este artículo, con un método elemental, Banach obtiene todas las soluciones de la ecuación $f(u)f(v)f(w) = \varphi(u^2 + v^2 + w^2)$ que son del siguiente tipo:

Soluciones continuas: $f(x) = Ae^{\alpha x^2}$, $\varphi(x) = A^3 e^{\alpha x}$ con A y α constantes reales cualesquiera.

Soluciones discontinuas y medibles: De la forma $f(0) = a$, $\varphi(0) = a^3$, $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ para $x \neq 0$,

Soluciones no medibles: Son $f(x) = Ae^{H(x^2)}$, $\varphi(x) = A^3 e^{H(x)}$, donde $H(x)$ es una función aditiva y no lineal.

* *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables, publicado en Fundamenta Mathematicae* **3** (1922) 128-132.

En este artículo prueba Banach que las derivadas de Dini de una función medible Lebesgue $f(x)$ son funciones medibles Lebesgue, y que las derivadas de Dini de funciones de clase α de Baire son de clase $\alpha+2$.

Este resultado fue mejorado en 1942 por Zahorski que probó que la derivada superior de una función cualquiera, incluso no medible, es de clase 2, resultado también encontrado por Hájek en 1948. Staniszewska en 1959 probó que existen funciones que satisfacen la condición de Lipschitz y que ni la derivada superior ni la derivada inferior es una función de clase 1.

En 1922, en el tercer tomo de Fundamenta Mathematicae, aparece publicada su tesis doctoral, leída en Léopol en 1920). Su título es :

* *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922) 133-181.

Era su séptima memoria y la primera que tenía como tema las operaciones lineales, y representa el nacimiento de la teoría de los espacios de Banach.

La finalidad del trabajo es establecer algunos teoremas válidos para distintos conjuntos de funciones (funciones continuas, sumables, de potencia p-ésima integrable, funciones medibles acotadas, ...), lo que exige establecer teoremas generales que eviten el penoso trabajo de repetir las demostraciones en cada caso particular.

En el capítulo I se establecen los teoremas básicos de los que hoy llamamos espacios de Banach y se dan las caracterizaciones fundamentales de la continuidad de aplicaciones entre espacios normados.

El capítulo II lo dedica al estudio de algunos tipos de aplicaciones entre espacios normados y de Banach. Particularmente estudia las aplicaciones aditivas, que con continuidad se transforman en lineales, y las aplicaciones contractivas, para las que obtiene un teorema del punto fijo, así como el desarrollo en serie de la expresión del punto fijo.

En el capítulo III prueba que en los conjuntos de funciones considerados en su tesis convergencia en norma implica convergencia en medida y que de una sucesión convergente en norma a cero se puede extraer una subsucesión dominada casi por todas partes.

Aplica la nueva teoría, que pronto se llamará de espacios de Banach, a la ecuación integral de Fredholm.

El padre de la cibernética, Norbert Wiener, estuvo interesado en los espacios de Banach, pues en su autobiografía publicada en Londres en 1956 con el título *"I am a mathematician"* relata que fue Fréchet el primero que representó las formas lineales continuas del espacio L^2 pero que no se decidió a construir un sistema de postulados definiendo una estructura general de la que L^2 fuese uno de sus numerosos ejemplos. Fréchet atribuía a Wiener este mérito. Por ello sigue relatando Wiener que en 1922, siendo invitado de Fréchet con ocasión de un congreso matemático en Strasburgo, sucedió que Fréchet, muy excitado, le mostró este artículo de Stefan Banach (*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations integrales*) publicado le dijo, un tanto despectivamente, en una revista matemática polaca. Fréchet estaba irritado por el hecho de que Banach hubiese dado varios meses antes que Wiener un sistema de axiomas de un espacio vectorial con un número infinito de dimensiones idéntico al sistema axiomático de Wiener.

"De esta manera, escribe Wiener, la nueva teoría se denominó durante algún tiempo, teoría de los espacios de Banach-Wiener. Sin embargo, continua Wiener, yo no he escrito más que algunas notas de este tema del que progresivamente me he retirado. En el momento presente estos espacios llevan únicamente, como justo título, el nombre de Banach"..

Después de haber hecho esta confesión, Wiener dedica varias páginas de su autobiografía a comentar este contratiempo y a explicar que abandonó este campo por haber pensado que la teoría de espacios de Banach era casi un puro formalismo que no podría producir una cantidad suficiente de teoremas no triviales desconocidos hasta entonces. Ahora en su autobiografía Wiener confiesa que se había equivocado, ya que "después de los treinta y cuatro años pasados desde el congreso de Strasburgo la teoría de los espacios de Banach continuaba siendo un instrumento popular de análisis, comenzando a desarrollar ahora su pleno valor como método científico".

En ese mismo año, 1922, Banach obtiene la habilitación, siendo ascendido dos meses después a profesor extraordinario o profesor de conferencias. Para hacerle progresar la Universidad de Leópol no fue escrupulosa con los rigurosos reglamentos existentes. Banach tenía treinta años y ya era muy estimado.

En 1923 Banach es nombrado miembro de la Sociedad de Ciencias y Letras de Leópol y publica su célebre artículo

* *Sur le problème de la measure, en Fundamenta Mathematicae* **4** (1923) 7-33,

En este artículo Banach resuelve un problema del libro de Lebesgue *Leçons sur l'intégration* (1905), quien al enunciar las seis propiedades que caracterizan a su integral:

1ª Cualesquiera que sean a,b y h, $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$.

2ª Cualesquiera que sean a,b y c, $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$.

3ª $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

4ª Si $f \geq 0$ y si $b > a$ se tiene que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

5ª Se tiene que $\int_0^1 1dx = 1$.

6ª Si $\{f_n(x),\, n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión creciente hacia $f(x)$,la integral de $f_n(x)$ tiende creciendo hacia la integral de $f(x)$.

plantea como problema si la propiedad sexta es independiente de las otras cinco. Banach prueba que se puede asignar a toda función acotada de variable real $f(x)$ y a todo intervalo $[a,b]$ un número $I(f)$ que verifica las cinco primeras condiciones de Lebesgue, de forma que extiende la integral de Riemann, pero para una función $f(x)$ integrable Lebesgue se tiene que este número $I(f)$ no coincide con su integral de Lebesgue, de lo que deduce que I no verifica la condición sexta, resolviendo así el problema de Lebesgue.

Otro antecedente de este artículo está en el libro *Grundzüge der Mengenlehre (1914)* Hausdorff que trata el problema de la medida, consistente en asignar a cada conjunto acotado E de un espacio de dimensión n un número $m(E)$ que verifique las condiciones siguientes:

1) $m(E) \geq 0.$

2) $m(E_\circ) = 1$, para un conjunto $E_\circ$ del espacio considerado.

3) $m(E_1 \bigcup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$, si $E_1 \bigcap E_2 = 0$.

4) $m(E_1) = m(E_2)$ si los conjuntos E_1 y E_2 son superponibles (es decir si existe un movimiento que transforma E_1 en E_2).

Hausdorff prueba que este problema de la medida no tiene solución general en el espacio de tres o más dimensiones. Tampoco tiene solución sobre una esfera del espacio tridimensional, pues con ayuda del axioma de Zermelo descompone paradójicamente esa superficie en cuatro conjuntos A, B, C y D, siendo D de medida nula, A, B y C son superponibles y A es superponible con $B \bigcup C$, por lo que si existiese la medida m se llegaría a la contradicción $m(A) = 1/2$ y $m(A) = 1/3$.

Banach prueba en este trabajo que se puede atribuir una medida a todo subconjunto de $\mathbb{R}$ y a todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$, resolviendo el problema de Hausdorff en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$. La medida que construye se la llama *medida de Banach o universal.*

Este trabajo de Banach supone el comienzo de una serie de trabajos aportando generalizaciones de las medidas universales en diversos sentidos, así como aplicaciones de estas medidas. El problema representativo consiste en considerar un conjunto S, un grupo G de transformaciones definidas en S, un álgebra $\mathcal{A}$ de conjuntos definida en S que sea G invariante y una subálgebra $\mathcal{A}_\circ (\subset \mathcal{A})$ que también sea G invariante, suponer que $m_\circ$ es una medida G-invariante definida en $\mathcal{A}_\circ$ y encontrar una medida m en $\mathcal{A}$ que sea G-invariante. Son muchos los matemáticos que se han ocupado de este problema llegando hasta los actuales. Limitándonos sólo a algunos de los que trataron este problema poco después de la publicación del trabajo de Banach deberíamos citar a Day, Kakutani, Markow, Morse, von Neumann, Sierkinski y Tarski. Todos ellos, en una u otra forma, utilizaron un teorema que Banach publicó en 1929, conocido como el teorema de Hahn-Banach de extensión de funcionales lineales, que utiliza el lema de Zorn. Ryll-Nardzewski en su trabajo *On the problem of the effectivity of the Hanh*

Banach theorem da interesantes resultados de extensión sin utilizar el axioma de elección.

Los cuatro artículos de Banach publicados en 1924 están alrededor de la teoría de conjuntos y de la medida, y le llevan a la paradoja de Banach Tarski. Sus títulos son:

* *Sur un théorème de M. Vitali, publicado en Fundamenta Mathematicae* **5** (1924) 130-136,

donde da respuesta negativa a la pregunta de Carathéodory de la validez del teorema de Vitali sobre el recubrimiento de conjuntos planos. Banach prueba que el teorema de Vitali no es cierto si el conjunto plano se recubre por rectángulos en que la relación de lados no está acotada. Además este trabajo contiene la demostración del teorema de Vitali que se encuentra en la mayoría de los libros de teoría de la medida.

* *Sur une classe de fonctions d'ensemble*, también publicado en *Fundamenta Mathematicae*, **6** (1924) 170-188.

* En este artículo Banach considera una familia $\mathcal{H}_0$ de subconjuntos del cuadrado fundamental de vértices $(0,0), (0,1), (1,0)$ y $(1,1)$ que contiene a los cuadrados cerrados contenidos en el cuadrado fundamental, de manera que $\mathcal{H}_0$ es estable frente a la unión de conjuntos disjuntos y a la obtención de complementos, por lo que la clase de funciones de conjuntos considerada en este artículo es más amplia que la que estudió de la Vallée-Poussin.

Para estas funciones Banach obtiene los siguientes resultados:

i) Las derivadas superior e inferior son medibles.

ii) Si una de estas funciones es de variación acotada se tiene que el conjunto de puntos donde una de las derivadas superior o inferior es infinito tiene medida nula.

iii) Cuando una de estas funciones F es de variación acotada y satisface la condición $F(E_1 \cup E_2) \leq F(E_1) + F(E_2)$ cuando E_1 y E_2 son subconjuntos disjuntos de $\mathcal{H}_0$, deduce que F tiene derivada casi por todas partes. A una función F que cumpla estas condiciones Banach le llama una función normal.

Estas propiedades tuvieron muchas aplicaciones en las investigaciones sobre transformaciones continuas, curvas rectificables y áreas de superficies y aunque Banach las formuló en dimensión 2 se deduce inmediatamente que valen para cualquier dimensión finita. El mismo Banach las aplicó en su celebre trabajo *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, que contiene la paradoja de Banach-Tarski.

* *Un théorème sur les transformations biunivoques*, también publicado en *Fundamenta Mathematicae* **6** (1924) 236-239.

Es bien conocido que la paradoja de Bertrand Russell enriqueció la fundamentación de la Matemática, pues motivó la obra Principia Mathematica de Bertrand Russell y Norbert Withehead así como el sistema axiomático de Zermelo, Fraenkel y Skolen.

El razonamiento de la paradoja de Bertrand Russell es idéntico al utilizado en la prueba del teorema de Cantor Schröder Bernstein que establece la antisimetría en la relación de orden $\leq$ entre cardinales. El trabajo que analizamos ahora es consecuencia de un profundo análisis de Banach sobre las diferentes demostraciones de este teorema, y prueba que todas ellas hacen uso implícito del siguiente teorema general de transformaciones biunívocas:

Si φ es una aplicación biyectiva de A en un subconjunto de B y si ψ es una aplicación biyectiva de un subconjunto de A sobre B, entonces existen dos particiones de $A = A_1 \cup A_2$ y $B = B_1 \cup B_2$ *tales que* $\varphi(A_1) = B_1$ *y* $\psi(A_2) = B_2$.

Banach aplica este teorema en el siguiente trabajo para probar la paradoja de Banach-Tarski.

* Banach S. y Tarski A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fund. Math. **6** (1924) 244-277.

En este excepcional trabajo, que paradójicamente sus autores le consideran como "Nota", se estudia la equivalencia de conjuntos de puntos por descomposición finita o numerable. Dos conjuntos de puntos situados en un espacio métrico son equivalentes por descomposición finita (o numerable), cuando pueden ser descompuestos en un número finito e igual (o en una infinidad numerable) de partes disjuntas respectivamente congruentes. Con este trabajo Banach va más allá de la descomposición paradójica de Hausdorff de la esfera y obtiene estos resultados:

En un espacio euclídeo de dimensión $n \geq 3$ dos conjuntos arbitrarios, acotados y con puntos interiores (por ejemplo dos esferas con radios diferentes) son equivalentes por descomposición finita.

El mismo resultado es válido para los puntos situados sobre una esfera.

Pero el teorema análogo para el espacio euclídeo de dimensión 1 o 2 es falso.

Por otra parte en un espacio euclídeo de dimensión $n \geq 1$ dos conjuntos cualesquiera con puntos interiores, acotados o no, son equivalentes por descomposición numerable.

La demostración de estos teoremas se basa en los resultados de teoría de la medida obtenidos por Hausdorff (pueden verse en su libro de teoría de conjuntos), por Vitali (1905, *Sobre el problema de la medida de conjuntos de puntos en un recta*) y por el propio Banach en los dos trabajos anteriores y en su artículo *Sur le problème de la measure*, así como en una utilización muy aguda del axioma de elección.

De estos teoremas se deduce que dos *poliedros arbitrarios son equivalentes por descomposición finita y que dos polígonos diferentes, que uno esté contenido en el otro, nunca son equivalentes por descomposición finita.* La primera consecuencia es paradójica, en tanto que la segunda parece estar de acuerdo con la intuición. El axioma de elección interviene en la demostración del primer resultado mucho más que en el segundo.

En los libros se recoge parte de los resultados de este artículo probando que la esfera unidad de R^3 puede dividirse en $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots$ y B_p subconjuntos disjuntos dos a dos de forma que moviendo adecuadamente $A_1, A_2, \ldots$ y A_n se puede reconstruir una esfera de radio 1 y con otros movimientos aplicados a $B_1, B_2, \ldots$ y B_p se reconstruye otra esfera de radio 1. Es obvio que esos conjuntos en que se descompone la esfera no son medibles Lebesgue, y este tipo de descomposición, posible gracias a la admisión del lema de Zorn, hace imposible la construcción de una medida universal aditiva en R^3.

Otra vez este trabajo de Banach abrió una nueva línea de investigación estudiando descomposiciones paradójicas de bolas y esferas en espacios euclídeos, elípticos e hiperbólicos, y atrajo nombres como Adams, Dekker, de Groot, Marczewski, Mycielski, Robinson, Sierpinski, von Neumann y Tarski. Robinson, por ejemplo, demostró que la bola en $\mathbf{R}^3$ de radio r es congruente por descomposición en cinco partes con dos bolas disjuntas de radio r, siendo imposible la duplicación de la bola de R^3 con menos partes.

No nos debe extrañar que en este año 1924 Banach fuese nombrado miembro correspondiente de la Academia Polaca de Ciencias. Lo que resulta sorprendente es que muriese sin haberle encontrado sillón en esa Academia.

En 1925 Banach publicó los siguientes artículos:

* *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fund. Math. 7 (1925) 225-236.

En este trabajo Banach demuestra que si C es un arco simple en el plano entonces la condición necesaria y suficiente para que C sea rectificable es que las funciones $N_x(s,C)$ y $N_y(s,C)$ sean integrables, donde $N_x(s,C)$ es el número de puntos en que la recta $x = s$ corta al arco C.

Para una definición adecuada de área, considera la imagen S continua y biunívoca de un cuadrado y representa por $N_{xy}(s,t,S)$ al número de puntos en que la recta $x = s$ corta a S. Definiendo de forma análoga $N_{xz}(s,t,S)$ y $N_{yz}(s,t,S)$ enuncia el teorema siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que la superficie S tenga área finita es que las funciones $N_{xy}(s,t,S)$, $N_{xz}(s,t,S)$ y $N_{yz}(s,t,S)$ *sean integrables en el sentido de Lebesgue.*

Estos resultados han tenido un importante papel en el estudio de las curvas rectificables y del área de una superficie, como puede verse en las monografías de Radó, Cesari y Saks. La función $N(t)$ se la llamó función de multiplicidad Banach de o indicatriz de Banach.

También prueba que la condición necesaria y suficiente para que una función continua $y = f(x)$ de variación acotada sea absolutamente continua es que todo conjunto de medida nula situado sobre el eje *OX* sea transformado en un conjunto de medida nula situado sobre el eje *OY*, contestando así a una pregunta de Hahn en su libro *Theorie der reellen Funktionen (1921).*

Las funciones que transforman un conjunto de medida nula situado en el eje *OX* en un conjunto de medida nula situado en el eje *OY* se dice que tienen la propiedad *N*, introducida por Lusin en su importante memoria de 1915 sobre integración y series trigonométricas. El teorema de Banach nos dice que en la clase de funciones de variación acotada la propiedad *N* de Lusin equivale a la continuidad absoluta. Esto es también una consecuencia del teorema de Radon Nikodym. Menchoff y Saks probaron que esta equivalencia es válida en una clase más amplia de funciones, a saber las funciones continuas, diferenciables casi por todas partes y con derivada sumable.

Banach transporta los resultados de rectificación de curvas al cálculo de áreas de superficies, y define la variación y la continuidad absoluta de manera que recuerdan las definiciones en el caso de una variable. Sus ideas fueron continuadas por Radó y Reichelderfer. Young tomó la definición de Banach de área como modelo en la definición de área intrínseca, uniendo las ideas de Banach con la teoría de la medida de Carathéodory. Schauder desarrolló las ideas de Banach relativas al jacobiano generalizado.

Para resaltar la importancia de este trabajo de Banach debemos señalar que antes de su aparición se utilizaba preferentemente la definición de Lebesgue y Peano de área de una superficie, relegando a un segundo plano la teoría proyectiva del área de superficies que utiliza las relaciones entre el área de las superficies y el área de sus proyecciones sobre los planos coordenados.

* *Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925) 1637-1640.

Esta comunicación de Banach contiene la aplicación de un teorema de su tesis doctoral a la convergencia de series ortogonales en $C([0,1])$.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión completa de funciones continuas ortonormales. Sea $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de coeficientes de Fourier de una función continua φ respecto a $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ y sea E el conjunto de todas las sucesiones $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ correspondientes a todas las funciones continuas φ posibles.

Es evidente que dos sucesiones $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ y $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ pueden engendrar el mismo conjunto *E*. Pues bien, entonces las series $\Sigma \alpha_n f_n$ y $\Sigma \alpha_n g_n$ son simultáneamente uniformemente convergentes o no.

Las ideas de esta comunicación fueron el origen de la teoría de los multiplicadores, desarrollada por Steinhaus, Orlicz y Marcinkiewicz.

* *Sur le prolongement de certaines fonctionneles.* Bulletin des Sciences Mathématiques (2) **49** (1925) 301-307.

Sea B un subconjunto denso en un espacio métrico conexo por arcos E y sea U una aplicación definida en E con valores en $\mathbb{R}$. Si la oscilación de U en el punto x es estrictamente positiva se tiene que U no es continua en x. Si suponemos que la oscilación de U es estrictamente positiva en cada punto de E-B, ¿puede afirmarse que U no es continua en B? Banach prueba que la respuesta es afirmativa si, y sólo si, B no es un G_δ.

Con este resultado Banach resuelve una modificación de un problema del libro de Paul Levy *Leçons d'analyse fonctionnelle*, con el que caracteriza cuando una aplicación lineal continua respecto a la topología de la convergencia uniforme en las p primeras derivadas no es continua utilizando la convergencia uniforme de las p-1 primeras derivadas.

Los artículos de Banach en 1926 fueron:

* *Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires.* Bulletin des Sciences Mathématiques (2) **50** (1926) 27-32 y 36-43.

Lebesgue en 1909 obtuvo el siguiente resultado: *Para que las funciones acotadas de la sucesión* $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ *tengan la propiedad de que* $lim \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx = 0$, *cualquiera que sea la función sumable* $f(x)$ *es necesario y suficiente que para todos los n* y para casi todos los x *(es decir,salvo en un conjunto nulo) se tenga que*

$$|\varphi_n(x)| < M, \quad lim \int_0^\alpha \varphi_n(x)dx = 0$$

para todos los α *pertenecientes al intervalo* $[0,1]$.

Del teorema de Lebesgue se deducen fácilmente las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los núcleos $\{K_n(x,y),\ n \in \mathbb{N}\}$ para que

$$lim \int_0^1 K_n(x,y)f(y)dx = 0$$

para cada x y cada función sumable $f(y)$, resultado mejorado por Banach a partir del siguiente resultado general, que recuerda el teorema de Baanch Steinhaus:

Si una sucesión $\{U_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ *de operadores lineales y continuos en medida* (es decir, $lim x_p = x$ implica que $\lim_{p\to\infty} U_n(x_p) = U(x)$ en medida) *converge casi por todas partes a* $U(x)$ *se tiene que* $U(x)$ *es continuo en medida.*

La aplicación de este teorema a $L^1([0,1])$ considerando que las funciones medibles $\{K_n(s,t),\ n \in \mathbb{N}\}$ en $[0,1]^2$ verifican $|K_n(s,t)| \leq M_n(s)$ y que los polinomios formados con las funciones $\varphi_z(t)$ que toman el valor 1 en $[0,z]$ y 0 en $[z,1]$) son un conjunto denso en $L^1([0,1])$, le lleva a que si $\lim_{n\to\infty} \int_0^z K_n(x,y)dx = 0$ c.p.p. para todos los $z \in [0,1]$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 K_n(x,y)f(y)dx = 0$ c.p.p. para todas las funciones $f(y) \in L^1([0,1])$.

* *Sur une classe de fonctions continues*. Fund. Math. **8** (1926) 166-172.

Banach había probado en 1925 que en la clase de funciones de variación acotada la propiedad N de Lusin equivalía a la continuidad absoluta. Aquí contesta a la pregunta de Lusin, contenida en su memoria de 1915, sobre la existencia de derivada en una función con la propiedad N, probando que toda función continua que satisface la propiedad N admite derivada finita en un conjunto de puntos de medida positiva. Ya Ruziewicz había construido una función continua con la propiedad N que no tenía derivada en un conjunto de puntos de medida no nula.

Supongamos que E es un conjunto, $|E|$ es su medida exterior, $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $E_y = f(E)$. Banach dice que una función $f(x)$ continua en $[a,b]$ satisface la condición S si a cada $\varepsilon > 0$ corresponde un $\eta > 0$ de manera que $|E| < \eta$ implica $|E_y| < \varepsilon$. Posteriormente Fichtenholz demostró que la propiedad S era estrictamente más fuerte que la propiedad N. La función del ejemplo de Ruziewicz también tiene la propiedad S, por lo que no tiene derivada en un conjunto de puntos de medida no nula. En este trabajo Banach prueba que la unión de las condiciones N y T_1 (que sea nula la medida exterior del conjunto de valores que f toma una cantidad infinita de veces) equivalen a la condición S. También prueba que toda función absolutamente continua tiene la propiedad S.

En una nota en Comptes Rendues, Bary y Menchoff indican, sin demostración, que la condición necesaria y suficiente para que una función continua f sea composición de dos funciones absolutamente continuas es que el conjunto de valores de x donde f no tiene derivada tenga medida nula. Este resultado no es demostrable, pues el ejemplo de Ruziewicz tiene la propiedad S y no tiene derivada en un conjunto de puntos de medida no nula y Banach y Saks en 1928 publicaron:

* *Sur les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues*. Fund. Math. **11** (1928) 113-116.

donde prueban que la propiedad S es la condición necesaria y suficiente para que una función continua sea la composición de dos funciones absolutamente continuas. Esta propiedad fue demostrada simultáneamente y con independencia por Bary.

En 1927 Stefan Banach publicó otros dos artículos: *Sur le principe de la condensation de singularités* (Fund. Math. **9** (1927) 50-61), conjuntamente con Steinhaus y ya comentado. El otro es:

* *Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre.* Mathematische Zeitschrift **27** (1927) 68-75.

Bajo un conjunto de condiciones que cumple cierto conjunto de funciones encuentra que la primera variación f en el sentido de Paul Levy de cierto funcional continuo verifica la ecuación $\nabla f + \lambda f = 0$. Además prueba que en primera aproximación las funciones que definen las deformaciones de un cuerpo homogéneo son analíticas y satisfacen la ecuación $\nabla f + \lambda f = 0$.

Banach fundó en 1929 la revista Studia Mathematica que dirigió conjuntamente con H. Steinhaus hasta 1941, en cuyo primer tomo publica los artículos:

* *Sur les fontionnelles linéaires.* Studia Math. **1** (1929) 211-216.
* *Sur les fontionnelles linéaires II. Studia Math.* **1** (1929) 223-239.

Estos artículos contienen los pilares del análisis funcional, ya que encontramos el célebre teorema de extensión de Hahn-Banach, en su forma de extensión de formas lineales continuas definidas en subespacios y de interpolación de una forma lineal entre *-p(-x)* y *p(x)*, siendo *p(x)* una función real subaditiva y homogénea definida en un espacio normado real, así como los teoremas de la aplicación abierta y de la gráfica cerrada, pues Banach prueba que si E es un espacio de Banach respecto a las normas $\|x\|$ y $\|x\|_1$ de manera que de $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ se deduce que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = 0$ entonces las normas $\|x\|$ y $\|x\|_1$ son equivalentes (lo que equivale a la existencia de dos constantes m y M tales que $m \leq \|x\| / \|x\|_1 \leq M$ para $x \neq 0$.

Estos artículos contienen consecuencias célebres de los referidos teoremas, como el teorema de separación de puntos y cerrados, la existencia de formas lineales continuas con valores asignados en ciertos vectores, clausura débil de un subespacio, dualidad, convergencia débil y trasposición.

Cuanto menos resulta sorprendente que muchos libros siguen conservando la exposición de Banach de estos teoremas fundamentales del Análisis Funcional. Köthe, por citar un ejemplo, reproduce en su célebre tratado *Topological vector spaces* algunas de las pruebas de Banach.

Con sólo estos dos cortos artículos Banach hubiese entrado con derecho propio en la historia de la Matemática. Además, en 1929 Banach publica el tomo I de su libro *Cálculo diferencial e integral (Rachunek rozniczkowy i calkowy)* tomo **1**. Zaklad Narodowy im. Ossolinskich, Lwów, (1929)) y en colaboración con S. Saks escribe el artículo

* *Sur une généralisation du problème de la measure.* Fund. Math. **14** (1929) 127-131.

Lebesgue llama *problema de la medida* a definir una función $m(x)$ que haga corresponder a cada subconjunto X de $[0,1]$ un número real $m(X) \geq 0$ tal que:

I. Si X_1 y X_2 son superponibles entonces $m(X_1) = m(X_2)$.

II. Si X_1, X_2.... es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos se tiene que $m(X_1 \cup X_2 \cup ...) = m(X_1) + m(X_2) + ...$.

III. $m([0,1]) = 1$

Desde el ya referido trabajo de Vitali de 1905 titulado *Sobre el problema de la medida de conjuntos de puntos en una recta* se sabe que no es posible resolver el problema de la medida de Lebesgue. Ahora Banach y Kuratowski prueban que tampoco es posible resolver el problema de la medida con condiciones menos restrictivas, sustituyendo I y III por que la medida de un conjunto unitario sea 0 y que la medida no sea idénticamente nula.

La existencia de la descomposición de Banach-Kuratowski es consecuencia de un resultado de Sierpinski sobre la existencia en [0,1] de un conjunto de Lusin de cardinal el continuo, que implica la existencia de una función continua que no es uniformemente continua en ningún subconjunto no numerable, que determina una descomposición de Banach y Kuratowski.

El resultado de Banach y Kuratowski tiene dos generalizaciones: Una se debe a Ulam, quien probó que la hipótesis del continuo puede ser reemplazada por la hipótesis, más débil, de que el continuo es inferior al primer aleph inaccesible en sentido amplio. La otra se obtiene sustituyendo el conjunto $E = [0,1]$ por otros conjuntos, utilizando una descomposición análoga a la de Banach Kuratowski adaptada a cardinales más elevados, que cuando el cardinal del conjunto no sea regular exige un método de razonamiento nuevo, que ha sido muy empleado posteriormente. Esta generalización fue hecha por Banach en el artículo:

* *Uber additive Mabfunktionen in abstrakten Mengen.* Fund. Math. **15** (1930) 97-101.

donde Banach admitiendo la hipótesis del continuo generalizada da respuesta negativa al problema de la existencia de una medida numerablemente aditiva en *E*, cuando el cardinal *m* de *E* es inferior al primer aleph inaccesible.

Ulam extendió el resultado de Banach probando que la respuesta era también negativa para los cardinales inferiores al primer aleph inaccesible en sentido amplio. Utilizó una descomposición singular de *E* que ahora se llama descomposición de Ulam. Probó que podía reducir su trabajo a las medidas booleanas que no tomaban más que los valores 0 y 1. Con esta reducción probó que no se podía determinar una medida no nula, booleana, y nula sobre los subconjuntos unitarios cuando el cardinal del conjunto era inferior al primer aleph inaccesible en sentido amplio.

El problema de la existencia de medidas con valores 0 y 1 se presenta en diversas partes de la matemáticas. Se presenta en el problema de Mazur de la representación de los funcionales lineales en el espacio de las funciones reales definidas en un conjunto dotado con la topología de la convergencia puntual, en la representación de los funcionales aditivos y multiplicativos en los productos cartesianos de álgebras lineales

(Zelazko) así como en la estabilidad de ser ultrabornológico el producto de espacios ultrabornológico (teorema de Mackey-Ulam). También se presenta en investigaciones sobre los fundamentos de las matemáticas; se suele decir que un cardinal m es medible si existe una medida no nula y con valores 0 y 1 en la σ-algebra de todas las partes de un conjunto E de cardinal m, siendo cero la medida de cada conjunto unitario. En caso contrario, el cardinal m se dice que no es medible.

El resultado antes citado de Ulam nos dice que los cardinales inferiores al primer cardinal inaccesible en sentido amplio son no medibles. En 1960, Tarski, sirviéndose de ciertos resultados de Hanf, probó que el primer aleph inaccesible en sentido estricto es no medible, lo que da una idea del tamaño del primer cardinal medible, si existe. La primera demostración de Tarski era metamatemática, si bien inmediatamente Keisler y Tarski introdujeron unas operaciones que aplicadas a los cardinales producían cardinales mayores, de forma que aplicadas a cardinales no medibles siempre daban cardinales no medibles. Así dieron un método matemático para comprobar lo grande que es un cardinal medible. (Creo que no se sabe si la admisión o no de la existencia de cardinales medibles implicará alguna contradicción. Si se sabe, por un teorema de Scott, que la demostración de Gödel de la compatibilidad de la hipótesis del continuo generalizada no se aplica a la teoría de conjuntos enriquecida con el axioma de la existencia de cardinales medibles. El teorema de Scott establece que la existencia de un conjunto E de cardinal medible implica que todos los conjuntos no constructibles en el sentido de Gödel tienen cardinal medible).

Los resultados del artículo que estamos comentando hubiesen bastado para llenar el año de un gran matemático. Pero en 1930 Banach dio mucho más a la ciencia, pues además de publicar el segundo tomo de su cálculo diferencial e integral (*Rachunek rozniczkowy i calkowy (Cálculo diferencial e integral)* tomo 2. Ksiaznica-Atlas, Lwów, (1930)) nos dejó tres publicaciones más:

* *Sur la convergence forte dans le champ L^p*. Studia Math.**2** (1930) 51-57, en colaboración con Saks.

F. Riesz probó la reflexividad de los espacios L^p, para $p > 1$, que equivale a que cada sucesión $\{x_n, n \in \mathbf{N}\}$ acotada de L^p contiene una subsucesión débilmente convergente.

Banach y Saks hacen observar que es obviamente falso que cada sucesión acotada en L contenga una subsucesión convergente en L y prueban que sí es cierto que cada sucesión acotada de L contenga una subsucesión que en media converge en L. Como corolario dan el mismo resultado en el espacio de sucesiones l^p, para $p > 1$.

* *Uber einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen.* Studia Math. **2** (1930) 207-220.

* *Bemerkung zur Arbeit "Uber einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen"*. Studia Math. **2** (1930) 251.

La segunda de estas dos publicaciones contiene unas correcciones a la primera.

Sidon probó que si una función $f(x)$ acotada y medible tiene serie de Fourier de la forma $(1/2)a_o + \Sigma\{a_n \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t\}$ con $(k_{n+1}/k_n) > k > 1$ entonces la serie de Fourier es absolutamente convergente. Zygmund probó que si $f(x)$ es integrable y su serie de Fourier es de la forma precedente entonces $f(x)^p$ es integrable para $p > 0$.

Estos teoremas fueron el punto de partida del trabajo de Banach, que apoyándose en ellos y con métodos de Análisis Funcional estableció los resultados siguientes, relativos al caso en que $(k_{n+1}/k_n) > k > 1$:

1. Si la serie $\Sigma\left\{a_n^2 + b_n^2\right\}$ converge, existe una función continua $f(t)$ con serie de Fourier $(1/2)a_o + \Sigma\{a_n \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t\}$.

2. Si las sucesiones $\{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ y $\{b_n, n \in \mathbf{N}\}$ tienden a cero, existe una función integrable $f(t)$ con serie de Fourier $(1/2)a_o + \Sigma\{a_n \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t\}$.

De estos teoremas dedujo estas consecuencias, que generalizan un teorema de Carleman y otro de Orlicz:

a) Existe una sucesión $\{\varepsilon(n),\ n \in \mathbf{N}\}$ de números positivos que converge a cero y una función continua $f(t)$ con serie de Fourier $(1/2)a_o + \Sigma\{a_n \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t\}$ tal que la serie $\Sigma\left\{|a_n|^{2-\varepsilon(n)} + |b_n|^{2-\varepsilon(n)}\right\}$ diverge.

b) Existe una sucesión $\{\lambda(n), n \in \mathbf{N}\}$ que diverge a $+\infty$ y una función $x(t)$ integrable con serie de Fourier $(1/2)a_o + \Sigma\{a_{nn} \cos k_n t + b_n \operatorname{sen} k_n t\}$ tal que la serie $\Sigma\left\{|a_n|^{\lambda(n)} + |b_n|^{\lambda(n)}\right\}$ diverge.

Sidon posteriormente dio demostraciones constructivas de los teoremas 1 y 2, sin utilizar recursos del análisis funcional que utilizasen el lema de Zorn. Otra demostración constructiva del teorema 2 se debe a Zygmund.

* *Théorème sur les ensembles de première catégorie.* Fund. Math. **16** (1930) 395-398.

Banach prueba que en un espacio métrico si un conjunto A es de primera categoría en cada uno de sus puntos, entonces A es de primera categoría.

De este resultado saca algunas consecuencias: Por ejemplo el teorema de Kuratowski de que dada una serie convergente de funciones continuas $\{f_n(x)\}$ definidas en un espacio métrico separable y con valores en un espacio métrico arbitrario se tiene que el conjunto de puntos de discontinuidad de la función $f(x) = lim f_n(x)$ es de primera categoría, es cierto si se quita la condición de separabilidad.

Obtiene una generalización similar con las funciones representables analíticamente sobre un espacio métrico, extendiendo un resultado de Baire.

Un conjunto A de un espacio métrico se dice que tiene la propiedad de Baire ni no existe ninguna bola en la que el conjunto A y su complementario sean los dos de segunda categoría. Lebesgue probó que en un espacio métrico separable la unión de una cantidad numerable de conjuntos con la propiedad de Baire tiene la propiedad de Baire. Banach con el teorema precedente pudo quitar la condición de separabilidad, deduciendo que en todo espacio métrico los conjuntos de Borel tienen la propiedad de Baire.

En este fecundo año 1930 Banach recibió el premio de investigación de la ciudad de Léopol.

3.- La teoría de las operaciones lineales

En 1931 es nombrado miembro de la Sociedad de Ciencias y Letras de Varsovia y publica en polaco su obra principal, la *Teoría de las operaciones lineales (Teorja operacyj, Tom I. Operacje liniowe. (Teoría de las operaciones, Tomo I. Operaciones lineales*).Kasa im.Mianowskiego, Warszawa), que completada y traducida al francés fue reeditada al año siguiente con el título Théorie des operations linéaires. Monografie Matematyczme 1, Warszawa (1932). Después aparecerían diferentes ediciones en inglés.

* En 1931 Banach había sido uno de los fundadores de la colección **Monografie Matematyczne**, de la que fue miembro del comité de redacción hasta su muerte. Obsérvese que el primer libro de esa colección fue la obra de Banach que estamos comentando, pronto conocida en todo el mundo matemático.

Esta obra es la continuación natural enriquecida de su tesis (*Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales*). Al comentar la tesis ya indicamos que su éxito proviene de que gracias a los llamados espacios de Banach se pueden resolver de forma general un gran número de problemas, que de otra forma deberían ser tratados separadamente exigiendo mucha ingeniosidad. En otras palabras: De los espacios de Banach parte un potente edificio en el que Banach tiene el mérito de haber puesto todos los pilares. El mismo indicaba en 1932 que la teoría de las operaciones lineales, creada por Vito Volterra, tiene por objeto el estudio de funciones definidas en espacios de infinitas dimensiones y que en dominios muy importantes de las matemáticas esta teoría había penetrado de una forma esencial. Indicaba que bastaba recordar que la teoría de las ecuaciones integrales y el cálculo de variaciones se presentan como casos particulares en distintos capítulos de la teoría de ecuaciones lineales.

En la teoría de las operaciones lineales los métodos de la matemática clásica se unen a los métodos modernos de una forma perfectamente armoniosa y completamente eficaz. Permite interpretar los teoremas de la teoría de conjuntos o de la topología de forma inesperada. Por ejemplo, el teorema topológico sobre el punto fijo se traduce mediante la teoría de operaciones lineales en el teorema clásico sobre la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales. Hay partes importantes de la matemática cuyo conocimiento no es posible sin la ayuda de la teoría de las operaciones lineales.

La teoría de las operaciones lineales merece, por su valor estético, por la profundidad de sus razonamientos y por sus numerosas aplicaciones el interés creciente que le han prestado y prestan los matemáticos. No resultará extraña la opinión de Hadamard que considera la teoría de las operaciones lineales como uno de los métodos más potentes de investigación matemática.

En el libro de Banach se recogen los resultados que hacen referencia a las operaciones lineales definidas en ciertos espacios generales, particularmente allí *los espacios de tipo (B)*, hoy espacios de Banach, de los que son casos particulares los espacios de funciones continuas, los de funciones de potencia p-ésima integrable, los espacios de Hilbert, etc.

Con su teoría de operaciones lineales, Banach obtiene la interpretación de teoremas generales en diversas disciplinas matemáticas: Teoría de grupos, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, ecuaciones con una infinidad de incógnitas, funciones de variable real, series ortogonales, etc.

Es muy interesante ver que ciertos teoremas producen resultados en disciplinas muy alejadas unas de otras. **Por ejemplo, el teorema de extensión de un funcional aditivo resuelve simultáneamente el problema general de la medida, el problema de los momentos y el de la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales con una infinidad de incógnitas.**

La crítica oficial de la obra *Teoría de las operaciones lineales* de Banach se puede leer en el Bulletin of the American Mathematical Society **40** (1934) 13-16, donde Tamarkin escribe que "representa la cúspide digna de atención de una larga serie de investigaciones iniciadas por Volterra, Fredholm, Hilbert, Hadamard, Fréchet, Fréderic Riesz y continuadas de una manera muy eficaz por Stefan Banach y sus discípulos". Tamarkin añade inmediatamente: "**La teoría de las operaciones lineales es por sí misma un dominio atractivo, pero su importancia se acentúa más por sus numerosas y bellas aplicaciones**".

El prestigio de Banach era ya universal antes de la aparición de su libro *Teoría de las operaciones lineales*. Podemos constatar como su bien merecida fama había alcanzado los Estados Unidos mucho antes de la aparición de su libro leyendo la necrología que sobre Banach escribió Stanislas Ulam, uno de los discípulos mejor dotados de Banach, en el Bulletin of the American Mathematical Society, **52**, 7, (1946) 600-603. "*Nos ha llegado*, escribe Ulam, *la noticia de que Banach ha muerto apenas alcanzado el fin de la guerra. El gran interés de su obra es un hecho bien conocido entre nosotros. En efecto, en el campo de su más brillante actividad, es decir en la teoría de los espacios lineales de infinitas dimensiones, la escuela americana ha dado su aportación y continua suministrando importantes resultados. Esta cooperación se puede considerar como una extraordinaria unión de intuición científica que concentró* *los esfuerzos de numerosos matemáticos polacos y americanos en un mismo campo..." "La obra de Banach -continua Ulam- ha puesto por primera vez en relieve, en el caso general, el éxito de los métodos que tienen una componente geométrica y algebraica en los problemas de análisis lineal, lo que permitió sobrepasar en mucho los descubrimientos preferentemente formales de Volterra, Hadamard y sus sucesores. Sus resultados se extienden a espacios más generales que los considerados por otros matemáticos tales como Hilbert, Schmidt, von Neuman, Riesz y otros. En muchos matemáticos americanos, sobre todo entre los jóvenes, ha calado la* **idea del estudio geométrico y algebraico de los espacios funcionales lineales; este método de trabajo avanza continuamente con energía** (*escribía en 1946*) **y da resultados importantes".**

El comentario expuesto antes de Wiener, cuando consideramos la tesis doctoral de Banach, así como estas notas de Ulam y Tamarkin muestran que en 1931 Banach estaba situado en el primer nivel de la historia del desarrollo de esta nueva e importante rama del Análisis Matemático, la teoría de espacios de Banach, delante de un grupo de excelentes matemáticos que antes habían ensayado sus esfuerzos en el mismo campo.

4.- La obra de Banach después de su teoría de las operaciones lineales

De igual forma que hasta ahora, la obra de Banach no se va a reducir a desarrollar los contenidos de la *Théorie des opérations linéaires*. En estos años 1931 y 1932 en que aparecen las primeras ediciones en polaco y en francés de su libro Banach continúa aportando nuevos resultados, muchos de ellos consecuencia de su teorema sobre los conjuntos de primera categoría, y publica los siguientes artículos:

* *Uber analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen Fund.* Math. **17** (1931) 283-295.

Dados dos espacios métricos X e Y se tienen definidas en el espacio de todas las aplicaciones de X en Y las clases de Borel L^{ξ}, y , por recurrencia, las clases de Baire, B^{ξ}, partiendo de las aplicaciones continuas y tomando reiteradamente límites puntuales. Banach define, también por recurrencia y reiterando límites puntuales, las clases b^{ξ}, partiendo de la primera clase de Borel (es decir, $b^1 = L^1$).

Prueba que si el espacio Y es separable se tiene que $b^{\xi} = L^{\xi}$, y que si además el espacio Y es conexo por arcos se tiene que $B^{\xi} = L^{\xi}$, para todo $\xi > 1$. Además, para los espacios de Banach prueba que $B^1 = L^1$.

Posteriormente Rolewicz probó que si el espacio Y es separable y conexo por arcos y la clase B^1 es cerrada para la convergencia uniforme se tiene que $B^1 = L^1$, condición que se cumple cuando el espacio Y es retractivo, es decir cada bola es un retracto de Y. Esta clase de espacios no es muy amplia, pues Borsuk probó que hay espacios localmente conexos por arcos que no son retractivos.

* *Uber metrische Gruppen.* Studia Math. **3** (1931) 101-113.

Los éxitos obtenidos por Banach en sus espacios, es decir espacios vectoriales provistos con una norma compatible respecto a la que el espacio es completo, tal vez le llevaron a estudiar los grupos topológicos metrizables y completos, que en este trabajo les llama espacios de tipo $\mathbf{G}$.

Con técnicas de categorías obtiene unos lemas que le permiten entre otros probar estos resultados:

a) Un isomorfismo algebraico continuo entre dos grupos topológicos metrizables y completos es un isomorfismo topológico.

b) Sea $\{F_{pq}(x),\ p \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N}\}$ una sucesión doble de homomorfismos continuos entre dos grupos metrizables completos E y F, tal que para cada p existe un x_p tal que la sucesión $\{F_{pq}(x_p),\ q \in \mathbf{N}\}$ diverge. Si E es conexo entonces el conjunto A de puntos de E tales que para cada $x \in A$ al menos una de las sucesiones $\{F_{pq}(x),\ q \in \mathbf{N}\}$, $p = 1,2,3,\ldots$ converge es de primera categoría.

En este trabajo Banach obtiene condiciones suficientes para que el límite puntual de homomorfismos continuos sea continuo, así como teoremas que relacionan la continuidad local y la continuidad global.

* *Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen*. Studia Math. **3** (1931) 174-179.

Este trabajo contiene una prueba muy sencilla de que el conjunto de funciones sin derivada finita a la derecha en ningún $t \in [0,1]$ es residual en el espacio de todas las funciones continuas en $[0,1]$ provisto con la norma supremo. El mismo teorema fue probado un poco más tarde por Mazurkiewicz contestando a una pregunta de Steinhaus. Sirve para probar que existen funciones continuas no diferenciables en ningún punto.

El teorema de Mazurkiewicz-Banach es una de las primeras aportaciones de lo que se llama método de la categoría para establecer teoremas de existencia. Consiste en elegir un espacio métrico completo adecuado y comprobar que el conjunto de puntos que tienen una cierta propiedad es residual.

Este método fue insistentemente aplicado por los matemáticos polacos, Banach, Mazurkiewicz, Auerbach, Orlicz, Saks,..., y, además de la teoría de funciones se extendió a la topología, a la teoría de las funciones analíticas y al análisis funcional.

* *Uber die Hóldersche Bedingung*. Studia Math. **3** (1931) 180-184, en colaboración con H. Auerbach.

Continuando con la notación del trabajo anterior se prueba ahora que el conjunto de funciones continuas $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$ tales que el límite superior cuando h tiende a cero del cociente $|(f(t+h) - f(t)) / \omega(t)|$ es $+\infty$ para todo t es residual, siendo $\omega(t)$ una función cualquiera tal que $h > 0$ implica $\omega(h) > 0$ y es cero el límite de $\omega(h)$ cuando h tiende a cero.

También prueban que en el espacio H^{α}, con $0 < \alpha < 1$ de las funciones que satisfacen la condición de Hölder $|f(t+h) - f(t)| \leq ch^{\alpha}$, se tiene salvo en un conjunto de primera categoría de valores de t, que el límite superior cuando h tiende a cero del cociente $|(f(t+h) - f(t)) / h^{\beta}|$ es $+\infty$ para todo $\beta > \alpha$. En particular, se tiene que el conjunto de funciones no diferenciables en ningún valor de t y que satisfacen la condición de Hölder con exponente $\alpha < 1$ es residual en $C[0,1]$.

* *Sur les transformations biunivoques*. Fund. Math. **19** (1932) 10-16.

Da dos teoremas generales sobre las transformaciones biyectivas de los que deduce las siguientes consecuenccias:

Existe sobre la circunferencia un conjunto G no medible que cualquier rotación lo transforma en sí mismo, salvo un conjunto numerable de puntos.

El intervalo $[0,1]$ *contiene un conjunto A tal que el cardinal de A y de* $[0,1] - A$ *es el continuo, de forma que A contiene, salvo un conjunto de puntos de cardinal inferior al continuo, a cualquier subconjunto de* $[0,1]$ *que sea homeomorfo a un subconjunto de A.*

A partir de 1933 Banach tiene una participación importante en la vida académica, pues de 1933 a 1935 es nombrado presidente de la Sección de Léopol de la Sociedad Polaca de Matemáticas. En 1939 fue presidente de la Sociedad Polaca de Matemáticas, siendo ese año el primer laureado con el gran premio científico de la Academia Polaca de las Ciencias y de las Letras. De 1939 a 1941 fue decano de la Facultad de Léopol y en 1941 fue nombrado académico correspondiente de la Academia de Kiev.

La segunda guerra mundial dejó su sombra lúgubre en Banach. A finales de junio de 1941, cuando los alemanes invadieron la ciudad, se inscribió en el instituto bacteriológico del profesor Weigel donde, dada su condición de matemático, le emplearon como contador de una variedad de piojos utilizados en la preparación de un suero contra el tifus exantemático. Estuvo en prisión varias semanas, por haber encontrado en su vivienda personas que traficaban con marcos alemanes. Parece que en prisión encontró algún teorema; aquí tenía más tiempo para pensar matemáticas que cuando contaba piojos.

Varios discípulos de Banach perecieron a manos de la Gestapo; el más eminente fue Pablo Schauder, quien, eligiendo normas adecuadas, fue el primero que encontró la utilidad de los espacios de Banach en el estudio de los problemas límites de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Tuvo la satisfacción de asistir a la derrota de los alemanes en Léopol. En otoño de 1944, tras la expulsión de las tropas alemanas, volvió a su puesto de profesor.

Poco antes de su muerte había sido invitado por la Universidad de Cracovia a aceptar una cátedra. Murió en Léopol el 31 de agosto de 1945 tras una grave enfermedad de varios meses.

Los trabajos de Banach en el periodo desde 1933 hasta 1945 fueron:

* *Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearen Operationen.* Studia Math. **4** (1933) 90-94, en colaboración con S. Mazur.

Haciendo uso de los teoremas de categorías de Baire, establecen que si es un $G_{\delta\sigma}$ el conjunto de puntos donde es convergente una sucesión de aplicaciones lineales con valores en un espacio de Banach, entonces ese $G_{\delta\varepsilon}$ es cerrado. Obtienen consecuencias de este resultado en distintos espacios de funciones.

* *Sur la structure des ensembles linéaires.* Studia Math.**4** (1933) 95-99, en colaboración con C. Kuratowski.

En el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ provisto con la norma supremo, construyen un subespacio vectorial no boreliano cuyo complemento es analítico (es decir, imagen continua de un conjunto boreliano). Con este ejemplo se da otra solución al problema planteado por Lebesgue en 1905 de la existencia de un conjunto no boreliano en que todo subconjunto perfecto tenga la propiedad de Baire, problema del que ya se conocía una solución en R.

* *Zur Theorie der linearen Dimensionen.* Studia Math.**4** (1933) 100-112, en colaboración con S. Mazur.

Dos espacios normados X e Y son isomorfos cuando existe un isomorfismo topológico entre X e Y.

Dos espacios normados X e Y se dice que tienen la misma dimensión lineal cuando cada uno de ellos es isomorfo a un subespacio vectorial del otro.

En el artículo establecen isomorfismos, isometrías y relaciones dimensionales. Prueban que *cualquier subespacio del espacio* $\mathcal{V}$ de las funciones $x(t)$ de variación acotada en $[0,1]$ tales que $x(0)=0$, provisto con la norma variación, es isométrico a un subespacio del espacio $\mathcal{L}^1$ de las funciones integrables en $[0,1]$ con la norma usual.

* *Sur la dimension linéaire des espaces fonctionnels* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **196** (1933) 86-88, en colaboración con S. Mazur.

Utilizando el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con la norma supremo y el espacio de las series absolutamente convergentes resuelven el problema de encontrar dos espacios de igual dimensión lineal que no son isomorfos.

* *Sur les séries lacunaires.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.(1933) 149-154.

Weierstrass trató las propiedades de las series exponenciales lagunares para construir funciones no prolongables. El estudio de propiedades de series lagunares fue continuado por Borel, Hadamard y Ostrowski. Dadas las relaciones entre series exponenciales y trigonométricas era natural estudiar las series trigonométricas lagunares. El propio Banach partiendo de resultados de Sidon y Zygmund había hecho aportaciones a la teoría de las series lagunares en 1930. En ese año Zygmund demostró los siguientes teoremas:

1° . Si la suma de cuadrados de los coeficientes de una serie trigonométrica con grandes lagunas (es decir: $n_{k+1} / n_k > q > 1$) es convergente, se tiene que la suma de la serie es una función de clase L^p, para todo $p > 1$.

2° . Si la serie de Fourier de una función de clase L^r, con $r \geq 1$, tiene grandes lagunas, entonces la suma de los cuadrados de sus coeficientes es convergente. Entonces el teorema anterior asegura que la función es de clase L^p, para todo $p > 1$.

Los dos resultados principales obtenidos por Banach en este artículo son:

I. Para todo sistema ortonormal $\{x_n(t),\ n \in \mathbf{N}\}$ existe una subsucesión $\{x'_n(t),\ n \in \mathbf{N}\}$ que Banach llama serie lagunar, tal que la condición $\Sigma a_n^2 < \infty$ implica la convergencia en media de $\Sigma a_n x'_n(t)$ en L^p, para todo $p \geq 1$.

II. Toda función $f \in L^q$, con $q > 1$, que admite desarrollo en serie lagunar es de clase L^p, para todo $p \geq 1$.

Generalizaciones importantes de estos resultados se encuentran en la monografía de Kaczmarz y Steinhaus. Merece aparte especial mención el teorema de Wiener relativo a las series trigonométricas con pequeñas lagunas ($\lim_{k\to\infty} (n_{k+1} - n_k) = +\infty$) que establece que si el desarrollo trigonométrico de una función f de L^1 tiene pequeñas lagunas y es de clase L^2, se tiene que $f \in L^2$.

* *Sur la measure de Haar*. Nota al libro: S. Saks, *Théorie de l'intégrale*. Monografie Matematyczne **2**, Warszawa (1933) 264-272.

La medida invariante introducida por Haar en 1932 en los grupos topológicos se convirtió en una noción tan fundamental para la teoría de grupos como la medida de Lebesgue para el análisis. Antes se conocían aplicaciones de una medida invariante a los grupos de Lie. La noción de la medida de Haar suscitó un vivo interés entre los matemáticos y varios eminentes matemáticos dedicaron sus trabajos a esta noción. El primero fue Banach, con esta nota que apareció poco después del trabajo de Haar.

El teorema de Haar sobre la existencia de una medida invariante respecto a las traslaciones en un grupo topológico fue establecido bajo la hipótesis de que este grupo es un espacio métrico, separable y localmente compacto.

Banach generaliza el teorema definiendo axiomáticamente la congruencia. Además la separabilidad no es esencial en la nota de Banach, ya que sus razonamientos son válidos sustituyendo compacidad secuencial por compacidad.

Más tarde el teorema de Haar fue generalizado a grupos localmente compactos y completado en 1936 con el teorema de unicidad debido a von Neumann.

La idea directriz de todas las demostraciones de la existencia de la medida de Haar es la misma. La diferencia está en el paso al límite. Haar elegía una subsucesión convergente, Banach utilizaba el límite generalizado y en el caso no métrico utilizaba el teorema de Tychonoff. Una prueba constructiva de la medida de Haar se debe a H. Cartan en 1940.

La construcción de Banach se generaliza a espacios no métricos. Casos particulares de esta generalización son el teorema de Haar y un teorema más general de existencia de medida en los espacios uniformes, invariante ante un grupo de homeomorfismos continuos (Segal, 1949).

* *Uber mehrdeutige stetige Abbildungen.* Studia Math.**5** (1934)174-178, en colaboración con S. Mazur.

El estudio de los homeomorfismos locales nació con la teoría de las superficies de Riemann de funciones analíticas. La solución del problema de dar condiciones para que un homeomorfismo local sea un homeomorfismo se debe a Carathéodory y Rademacher (1917), Stoilov (1934), Cartan (1933) y Eilenberg (1935).

El teorema 2 del trabajo de Banach se distingue de estos resultados por su sencillez y generalidad de hipótesis, introduciendo los selectores continuos, que dieron origen en 1956 a la teoría de la selección de Michael.

* *Sur un théorème de M. Sierpinski.* Fund. Math. **25** (1935) 5-6.

Da una prueba sencilla del teorema de Sierpinski que permite representar cada una de las funciones de una sucesión $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ donde f_n aplica el conjunto infinito E en E, por productos finitos, cuyos factores son siempre dos funciones fijas, que pueden repetirse, de E en E. Esas dos funciones sólo dependen de la sucesión considerada.

**Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis.* Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo (1936) 261-268.

Banach dio una conferencia plenaria en este Congreso, mostrando la repercusión que su teoría de espacios lineales había tenido en ecuaciones integrales, ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, series ortogonales, operadores polinómicos, teoría del punto fijo, teoremas de existencia de ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y funciones analíticas. En particular se detuvo en las elegantes aplicaciones de la *Teoría de Operaciones lineales* dadas por su discípulo Schauder en la monografía *Uber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus*, así como en las aplicaciones obtenidas por Leray en hidrodinámica.

Una idea de la importancia del trabajo de Banach la suministra la relación de matemáticos relacionados con la Teoría de las Operaciones Lineales que cita en su conferencia, muchos de los cuales la han utilizado o han mejorado sus resultados. Por orden de aparición en la conferencia son:

Volterra, Hadamard, Hilbert, Fréchet, Wiener, Riesz, Hahn, Helly, Levy, Radon, Steinhaus, Kaczmarz, Orlicz, Mazur, Ascoli, Minkowski, Tonelly, Schauder, Cauchy, Hadamard, Birkoff, Kellog, Neumann, Stone, Fantappiè, Jordan.

En esa conferencia tuvo una destacada intervención el que fuera académico de esta Real Academia de Ciencias de Madrid, profesor D. Ricardo San Juan Llosá, con su resolución a un problema propuesto por Carlemann.

* *The Lebesgue integral in abstract spaces*. Nota al libro: S. Saks.: *Theory of the Integral* Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów (1937) 320-330.

La idea de construir una integral del tipo de la de Lebesgue sin introducción previa de la medida es precoz. Se suele considerar a Daniell como el autor de la *integral sin medida*. Daniell, en 1912 en su trabajo *Une extension de l'integral de M. Lebesgue*, considera un retículo T_o de funciones reales definidas en un conjunto y una forma lineal positiva U definida en T_o que verifique la condición:

(1) Dada una sucesión decreciente $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ convergente puntualmente a cero se verifica que $\lim U(f_n) = 0$

Se considera la clase T_1 formada por los límites de sucesiones $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ no decrecientes de funciones de la clase T_o, y se define la aplicación I por el lím $U(f_n)$ que puede ser ∞. Para una función arbitraria f se define la semintegral superior $I(f)$ como el extremo inferior de los números $I(g)$ con $f < g \in T_1$. Cuando $I(f) = -I(-f)$ e $|I(f)| < \infty$ se dice que la función f es integrable y se considera $I(f)$ como la integral de f. Si T_o son las funciones continuas en un intervalo y U es la integral ordinaria se obtiene que $I(f)$ es la integral de Lebesgue.

La teoría expuesta en el trabajo de Banach se aproxima a la de Daniell sustituyendo la condición (1) por

(2) Dada una sucesión $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, $|f_n| \leq \varphi \in T_o$, y convergente puntualmente a cero se verifica que lim U(f) = 0.

Se trata de una condición más difícil de comprobar que la de Daniell, que anticipa en parte el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, y que hace pensar que Banach no consideró los trabajos de Daniell, Hahn, Nikodym y Radon.

En la segunda parte del trabajo, Banach aplica la teoría general al caso de un espacio métrico compacto arbitrario K, considerando T_0 igual a las funciones continuas con valores reales definidas en K, $C(K)$,con U igual a una forma lineal positiva definida en $C(K)$. Banach utiliza los teoremas de convergencia débil dados en su libro *Teoría de las operaciones lineales* para demostrar la condición (2), que es lo que necesita para construir la integral.

El desarrollo del análisis ha llevado a considerar la integración en espacios localmente compactos, utilizando la construcción de Daniell y no la de Banach (véase Bourbaki, Loomis, Naimark,...).

* *Uber homogene Polynome in* L^2 . Studia Math. 7 (1938) 36-44.

Banach estudia distintas propiedades, da la expresión natural de su norma, y en particular estudia las formas n lineales simétricas, particularmente las definidas por los núcleos integrales.

* *Mechanics* (en polaco en dos tomos en Monografie Matematyczne **8** y **9**, Warszawa-Lwów-Wilno (1938). Se reeditó en 1947 después de su muerte y se tradujo al inglés en un tomo en Monografie Matematyczne **34**, Warszawa-Wroclaw (1951).

Este libro nos prueba que Banach podría haber investigado en aplicaciones prácticas de las matemáticas, por las que no se interesó. El antecedente de esta Mecánica Racional se puede buscar en un curso de Mecánica que impartió en 1923, un año después de su Tesis Doctoral, en la Escuela Técnica Superior de Léopol.

* *Uber das "Loi suprème" von Hoene-Wronski.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.(1939) 1-10.

La serie de Taylor es un caso particular de la representación obtenida por Hoene-Wronski de una función $x(t)$ en serie $\Sigma\alpha_1 x_1(t)$. Para extender estas representaciones Banach introduce la siguiente propiedad:

Un subespacio L de un espacio de Banach E se dice que tiene la propiedad A si para cada sucesión $\{\{x_1, i \in \mathbb{N}\}$ *de L existe una sucesión de números positivos* $\{M_1, i \in \mathbb{N}\}$ *tal que para cada sucesión de escalares* $\{\alpha_1, i \in \mathbb{N}\}$ que verifique $\Sigma|\alpha_1|M_1 < \infty$ *se tiene que* $\Sigma\alpha_1 x_1$ *converge a un elemento de L.*

Obtiene resultados generales de subespacios con la propiedad A, que aplicados al espacio de las funciones continuas en [0,1] le permite obtener como casos particulares las fórmulas de Taylor, Lagrange y el desarrollo de Hoene-Wronski.

Entre los resultados que obtiene señalaremos que dada una sucesión de vectores $\{x_1, i \in \mathbf{N}\}$ del espacio de Banach E obtiene un subespacio L y unos funcionales Φ_m tales que para cada $x \in L$ se tiene que $x = \Sigma x_m \Phi_m(x)$. Los funcionales Φ_m los obtiene utilizando un wronskiano generalizado y esta representación nos lleva a la teoría de bases.

* *Sur la divergence des series orthogonales.* Studia Math. **9** (1940) 139-155.

En este trabajo trata Banach el problema de la divergencia de las sumas parciales de las series ortogonales, con demostraciones hechas por el método de las categorías. En particular prueba que para toda función no nula $f \in L^2[0,1]$ existe un sistema ortonormal completo tal que las sumas parciales $s_n(t)$ del desarrollo en serie de la función f según este sistema verifican que $\overline{lim}|s_n(t)| = \infty$. Talalyan obtuvo unos años más tarde este resultado de forma independiente.

* *Sur la divergence des interpolations.* Studia Math. **9** (1940) 156-165.

En el espacio $C[0,1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ considera Banach una sucesión total $\{x_n(t),\ n \in \mathbf{N}\}$ de forma que dados $0 \le t_1 < t_2 < t_3 <...< t_n \le 1$ se tiene que $\alpha_1 x_1(t_j) + ... + \alpha_n x_n(t_j) = 0$, para $j = 1,2,...,n$ sólo se verifica si $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

De esta condición de independencia lineal se deduce que dada una función $x(t)$ existen unos únicos números $\beta_1,...$ y β_n tales que $\beta_1 x_1(t_j) + ... + \beta_n x_n(t_j) = x(t_j)$ para $j = 1,2,...,n$. La función $U(t) = \beta_1 x_1(t) + ... + \beta_n x_n(t)$ se llama función interpolada $x(t)$ respecto a las funciones $x_1(t),...$ y al sistema de puntos $S = \{t_1,...t_n\}$. Dados los conjuntos de puntos S_m, $m = 1,2,3,...$ que cumplan las condiciones de la interpolación se obtienen un conjunto de funciones interpoladas $U_m(t)$.

Banach demuestra que existe una función $x(t)$ y una sucesión de conjuntos de puntos $S_m, m \in \mathbf{N}$, tales que:

1.- $S_m \subset S_{m+1}$.
2.- $\cup\{S_m : m \in \mathbf{N}\}$ es densa en $[0,1]$
3.- $\overline{lim}|U_m(x,t)| = +\infty$, casi por todas partes en $[0,1]$.

5.- Publicaciones póstumas

* *Sur la measure dans les corps indépendants.* Akademia Hayk Ykpaïhclkoï PCP, Ihcthtyt *Matematπkπ*, *Coiphπk πpaub Ihctπtyty Matematπkπ* 1946 No **8** (1947), 71-90.

* *On measures in independent fields* (edited by S. Hartman), Studia Math. **10** (1948), 159-177.

Este trabajo fue redactado por Hartman utilizando manuscritos de Banach de 940, siendo el principal resultado la solución afirmativa a un problema propuesto por Marczewski generalizando la construción de la probabilidad producto.

* *Remarques sur les groupes et les corps métriques* (preparado para su impresión por S. Hartman) Studia Math. 10 (1948), 178-181.

Obtiene un teorema de tipo teorema de gráfica cerrada en los grupos métricos completos para la aplicación que a cada elemento del grupo le hace corresponder su inverso.

Además en un espacio métrico completo E con un producto continuo, asociativo y con elemento unidad prueba que la condición necesaria y suficiente para que sea continua la aplicación que a cada elemento invertible x de E le haga corresponder x^{-1} es que el conjunto de elementos invertibles sea un G_δ.

* *Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une measure.* Nota póstuma con prefaccio y comentario de E. Marczewski, Colloquium Mathematicum **1** (1948) 103-108.

Vitali en 1905 probó que no era posible resolver el problema de la medida planteado por Lebesgue en 1905. En 1929 Banach y Kuratowski probaron que tampoco tenía solución el problema generalizado de la medida admitiendo la hipótesis del continuo.

En su demostración aparece la existencia de una sucesión $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos de X que tiene una infinidad no numerable de átomos de forma que es nula idénticamente toda medida numerablemente aditiva, definida en la mínima σ álgebra que contiene a los $E_n, n \in \mathbb{N}$,y que sea nula en los átomos de la sucesión $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$.

En esta nota Banach caracteriza las sucesiones $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ que tienen la propiedad precedente. Para ello dice que un conjunto $A \subset [0,1]$ es *absolutamente nulo* si para cada medida numerablemente aditiva μ definida en la σ-álgebra de los conjuntos borelianos de $[0,1]$ y que sea nula en los subconjuntos de un elemento existe un conjunto boreliano $B \supset A$ tal que $\mu(B) = 0$. Además, si $c_n(x)$ es la función característica del conjunto E_n a la función $c(x) = 2\sum\left\{\frac{c_n(x)}{3^n}\right\}$ la denomina función característica de la sucesión $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Banach prueba que *la condicion necesaria y suficiente para que exista una medida numerablemente aditiva y no idénticamente nula, definida en la mínima σ-*

álgebra que contenga a los conjuntos E_n, *y que se anule para los átomos, es que el conjunto de valores de la función característica de la sucesión de conjuntos* $\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ *no sea absolutamente de medida nula.*

* *Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des fonctions de variables distinctes.* Redactado después de una reseña póstuma por S. Hartman y E. Marczewski, Colloquium Mathematicum **1** (1948) 109-121.

Este trabajo fue reconstruido por Hartman y Marczewski después de una nota manuscrita de Banach titulada Funciones independientes, con varios resultados sin demostración.

La noción de funciones estocásticamente independientes fue introducida por Kolmogoroff en 1936, con objeto de precisar el concepto intuitivo de independencia utilizado en probabilidad. Las funciones independientes se convirtieron en un instrumento útil y fundamental en teoría de probabilidad.

En el trabajo de Banach dos funciones independientes f y g, definidas en $[0,1]$ se dice que son representables biaxialmente si existen dos funciones $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$ que transforman el intervalo $[0,1]$ en el rectángulo unidad conservando la medida, y si en el rectángulo unidad existen dos funciones medibles $F(x)$ y $G(y)$ tales que $f(t)=F(\varphi(t))$. La conservación de la medida significa que para todo conjunto de Borel M del cuadrado se tiene que la medida lineal del conjunto $\{t\colon (\varphi(t),\psi(t)) \in M\}$ es igual a la medida plana de M.

Banach se planteó el problema de hallar las condiciones para que dos funciones independientes sean representables biaxialmente. Encontró dos condiciones suficientes:

- Que estas funciones tengan funciones de distribución continuas.
- Que no tomen más que un conjunto numerable de valores salvo en los puntos de un conjunto de medida nula.

Dió, además, un ejemplo sencillo de funciones independientes sin representación biaxial.

En esta época, la teoría general de las medidas en los productos cartesianos debida a Daniell, Kolmogoroff, Ulam, Halmos y Marczewski entre otros, estaba en sus comienzos, siendo poco familiar a los matemáticos por las condiciones de la guerra. El propio Banach, como hemos indicado al comentar su primera publicación póstuma, fue autor de uno de los principales teoremas de esta teoría. No obstante, en este artículo utiliza herramientas anteriores de la teoría de funciones reales, como medida de Lebesgue y transformaciones tipo de Peano.

* *Introducción a la teoría de funciones de variable real.* Monografie Matematyczne **17**, Warszawa-Wroclaw 1951 (en polaco).

6.- La personalidad de Stefan Banach [1]

Vamos ahora a hablar de la personalidad de Banach y de la influencia que ha ejercido en su entorno.

Ya hemos indicado que Banach fue nombrado profesor ordinario en 1927. Daba cursos perfectos; jamás se perdía en los detalles y no llenaba la pizarra con muchas fórmulas complicadas.

No daba importancia a la forma verbal de su exposición. Le era extraño todo barniz humanista y toda su vida conservó la forma de ser y el lenguaje de un hombre sencillo de Cracovia. Tenía dificultades en formular sus pensamientos y redactaba sus manuscritos sobre hojas arrancadas de un cuaderno. Cuando quería cambiar una parte del texto, tenía la costumbre de cortar la parte inútil y de pegar lo que quedaba sobre una nueva hoja blanca sobre la que escribía la nueva versión. Sin la ayuda de sus amigos sus primeros trabajos no hubieran llegado jamás a la imprenta.

No escribía cartas y no respondía jamás por escrito.

No se gozaba en sus investigaciones lógicas hasta que las comprendía perfectamente.

Frecuentemente decía que la matemática tiene una belleza creativa específica que no se puede encerrar en un sistema deductivo rígido, pues más o menos tarde sobrepasa todo sistema formal, lo que tal vez ocurra ya con sus Espacios de Banach.

Prefería el valor en sí de las teorías matemáticas a sus aplicaciones concretas o utilitarias, eligiendo el justo medio en las generalizaciones. Por eso dice Steinhaus dado que *Yo soy un matemático* es el título de la autobiografía de Wiener, la de Banach debería titularse *"El matemático por excelencia"*.

En el lado opuesto a Banach se situaron algunos matemáticos coetáneos, rivales en la teoría de las operaciones lineales, quienes consideraron espacios muy generales, lo que les condujo a obtener resultados triviales, o bien hacían demasiadas hipótesis sobre estos espacios, con lo que sólo conseguían ejemplos artificales y escasos.

Banach sabía trabajar incesantemente y en todas partes.

Como no estaba habituado a las comodidades burguesas no sentía necesidad de confort. Sus honorarios de profesor le debían haber sido suficientes. Sin embargo su gusto por la vida de café, su falta absoluta de economía y de regularidad en los asuntos cotidianos le llevaron al principio de su vida de profesor a endeudarse y, a continuación, a una situación muy penosa. Para salir de ella comenzó a escribir manuales.

Este es el origen del *Cálculo diferencial e integral* en dos volúmenes, el primero escrito en 1929 y el segundo en 1930. Este manual escrito en lenguaje escueto y accesible ha sido muy popular entre estudiantes de primeros cursos de Escuelas Técnicas Superiores.

---

[1] Comentario extraído de la conferencia de H. Steinhaus el 4 de septiembre de 1960 en el congreso de Análisis Funcional de Varsovia, en la sesión inaugural conmemorativa del 15 aniversario del fallecimiento de Stefan Banach.

Lo que le ocupó más tiempo y le costó más esfuerzo fueron los manuales de aritmética, álgebra y goemetría para escuelas secundarias. Unos los escribió sólo y otros en colaboración con Sierpinski y Stozek. No fueron jamás reproduciones de los manuales existentes, pues Banach pensaba que para cuidar el valor didáctico de un manual la colocación y exposición de cada definición, cada demostración y cada problema deben ser una cuestión a resolver por el autor del manual.

La importancia de Banach para la ciencia en general y para la ciencia polaca en particular se prolonga en sus discípulos. Se puede decir que la escuela de Léopol (Lwów) no existía antes de la llegada de Banach, pues Sierpinski se fue de Léopol a Varsovia poco después de la primera guerra mundial y Zygmunt Janiszewski murió poco después.

Mazur y **Orlicz** son los primeros discípulos de Banach. Sus nombres se encuentran sobre la portada de la revista Studia Mathematica y representan la continuación del programa científico de Banach, patente en esta revista.

Stanislas Ulam, debe a Kuratowski su iniciación a las matemáticas, si bien más tarde entró en la órbita de Banach.

La mesa más importante del Café Escocés de Léopol fue la de Banach, Mazur y Ulam. Es en ella en la que tenían lugar las sesiones de las que habla Ulam en la necrología que escribió sobre Banach en el Bulletin of the American Mathematical Society: *"Era muy difícil aguantar más que Banach o beber más que él durante estas sesiones".* Una de estas sesiones duró diecisiete horas, pero desgracidamente nadie se tomó la molestia de tomar notas y nadie la pudo reproducir. Probablemente el mármol de la mesa fue recubierto de fórmulas, borradas luego por algún empleado del café.

Esa misma suerte corrieron más de un teorema probado por Banach y sus discípulos, siendo lamentable que muchos de sus resultados se hayan perdido en detrimento de la ciencia, tanto por la negligencia de Banach como de sus discípulos. Hay que señalar el mérito de Lucie Banach en comprar un gran cuaderno de tapas rígidas, confiado al cajero del Café Escocés, dedicado a escribir problemas propuestos con la precaución de dejar al lado de cada problema espacio para las respuestas eventuales. Este *"Libro Escocés"* se encontraba a disposición de cada matemático que lo pidiese en el café. Algunos problemas tenían premio, que variaba de una pequeña taza de café a un ganso. Un ganso fue el premio recibido por Per Enflo al probar en 1973 la existencia de un espacio de Banach separable sin base de Schauder, que era un subespacio de c_0. Puede provocar sonrisa esta forma de hacer matemáticas, si bien debemos señalar que desde Hilbert se considera que al proponer un problema se ha resuelto la mitad. Además, una lista de problemas no resueltos incita a buscar las respuestas, manteniendo el espíritu en vela y creando una atmósfera científica. Aún quedan problemas no resueltos en el libro escocés. Por ejemplo, aún no se sabe si cualquier espacio de Banach de dimensión infinita tiene un cociente separable. La respuesta es afirmativa en algunos casos particulares.

Banach era ante todo matemático con una claridad de ideas turbadora. Jamás confiaba con la buena suerte ni con la admisión de hipótesis deseables. Decía que la *"esperanza era el atributo de la gente de poco espíritu".* Por eso no era amigo de hacerse falsas ilusiones y creía que sólo un pequeño porcentaje de personas podían comprender las matemáticas. Se parecía a Hilbert en que atacaba los problemas de frente, después de haber eliminado con ejemplos todas las vías laterales. Estaba persuadido que el análisis lógico de un problema debe conducir a probar el teorema o a rechazarlo.

Apenas se interesaba por la política, lo que no le impedía tener una visión penetrante de la situación en la que se encontraba. La naturaleza no le atraía especialmente. El arte, la literatura y el teatro eran para él distracciones secundarias que raramente llenaban las cortas lagunas de su trabajo. En cambio estimaba una sociedad extrovertida amante de la buena bebida.

Por tanto, la concentración de toda su energía intelectual en una dirección le permitió superar muchos obstáculos.

Entre las dos guerras dominaba en Polonia la idea de sabio como abnegado asceta que debía trabajar alejado del mundo para una sociedad no muy bien definida. De alguna manera se le perdonaba al sabio la ineficacia de su trabajo y se le consideraba por la grandeza de sus privaciones personales, sin tener en cuenta que en otros países se evaluaba a los sabios por lo que aportasen de durable a la ciencia. Banach no se sometió a la idea de sabio coetánea con él. Bien parecido, físicamente fuerte y realista hasta el cinismo, fue quien más contribuyó a hacer desaparecer en Polonia la idea perniciosa evaluar a los científicos por cualidades no constatables.

Banach se daba cuenta de su valor y del de sus discípulos y destruyó de una vez por todas el mito de que la matemática polaca era inferior a la de otros países. Se sentía orgulloso de su origen montañés y hacía poco caso de cualquier intelectual con una formación muy general sin especialización. Destruyó de una vez por todas el mito de que la matemática polaca era inferior a la de otros países, lo que es sabido y admirado hoy día por el pueblo polaco culto.

7.- Referencias bibliográficas para el estudio de la obra y personalidad de Banach.

Afortunadamente tenemos los discursos pronunciados en la sesión conmemorativa del 15 aniversario del fallecimiento de Stefan Banach, con la que abrió sus sesiones la Conferencia de Análisis Funcional, organizada en 1960 por los miembros del Instituto Matemático de la Academia Polaca de las Ciencias, recogidos en 1961 en el volumen IV de la revista Wiadomosci Matematyczne, órgano de la sociedad polaca de Matemáticas, y en 1963 en el volumen I de la serie especial de Studia Mathématica.

El volumen 1 de "Colloquium Mathematicum", periódico fundado en Wroclaw en 1948, contiene una breve biografía de Stefan Banach con la lista de sus trabajos y un estudio detallado de los principales resultados obtenidos por Banach titulado "Sobre la obra científica de Stefan Banach", cuyo primer capítulo contiene un delicioso artículo de W. Orlicz (p. 93-102) dedicado a la teoría de las operaciones y de las series ortogonales. El capítulo II contiene un artículo de E. Marczewski (p. 93-102) dedicado a los resultados obtenidos por Banach en Teoría de las funciones reales y teoría de la medida.

"Obras" de Stefan Banach, editado en dos volúmenes por el Instituto Matemático de la Academia Polaca de Ciencias, el volumen primero en 1967 y el segundo en 1979 reproducen sus 53 artículos publicados en vida de Banach, sus 5 publicaciones póstumas, redactadas por discípulos de Banach, la monografía "Théorie des operations linéaires", el análisis de sus publicaciones, resultados inéditos -que presentó en diversas sesiones científicas o simplemente comunicó a otros matemáticos- y algunos problemas puestos por él mismo Banach. En el primer volumen aparecen los 36 artículos relativos preferentemente a la teoría de funciones reales y de la medida; el resto, junto con el libro de teoría de las operaciones lineales constituye el segundo volumen.

Las referencias bibliográficas para el estudio de la obra de Banach se completan con los manuales de Aritmética, Algebra y Geometría para las escuelas primarias y secundarias compuestos en polaco por él sólo o en colaboración con W. Sierpinski y W. Stozek, y con los títulos de las conferencias y comunicaciones que dió en la Sociedad Polaca de Matemáticas, y que contienen resultados no publicados en otro lugar. Se pueden leer en los "Anales de la Sociedad Polaca de Matemáticas" **9** (1930), 10 (1931), 12 (1933), 13 (1934) y 17 (1938).

8.- Algunas consecuencias de la obra de Stefan Banach

Banach es uno de los pocos nombres propios que aparecen en los índices terminológicos (Mathematics subject classification de la AMS, Unesco, Zentralblatt). Su nombre y obra siguen vivos en el Stefan Banach Center de Varsovia, en los artículos que continuamente se publican sobre espacios de Banach, en los congresos sobre diversos aspectos de la teoría de Espacios de Banach y también en el pueblo cultivado polaco, que ya indicamos que reconoce a Banach como el impulsor de la matemática polaca.

Y eso es así debido a que con su obra principal, *"Teoría de las operaciones lineales"*, puso **todos los pilares fundamentales** de un gran edificio matemático que continua en desarrollo. Esto obliga a citar algunas aportaciones de hijos o nietos científicos de Banach para vislumbrar la importancia de su obra. Tenemos que renunciar a aportaciones recientes, pues este curso de historia de la Matemática está dedicado a la primera mitad de nuestro siglo. Esta restricción no nos permite ahora comentar la contribución de matemáticos actuales españoles a la teoría de espacios de Banach y de la medida, lo cual nos hubiese agradado hacerlo.

Para facilitar la lectura agruparemos por temas los resultados que vamos a comentar, siguiendo el excelente artículo *"Some aspects of the present theory of Banach Spaces"* de Aleksander Pelczynski, en colaboración con Czeslaw Bessaga, publicado en el volumen II de las *Obras de Stefan Banach*, editado por el Instituto Matemático de la Academia Polaca de Ciencias.

8.1.- Reflexividad y compacidad débil

Banach caracterizó la reflexividad de un espacio separable. El descubrimiento por Eberlein y Smulian de que un espacio de Banach es débilmente compacto si, y sólo si, es débilmente sucesionalmente compacto, dio lugar a las distintas caracterizaciones de la reflexividad usuales, de las que tal vez la más sorprendente sea la de James:

Un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, cada forma lineal continua alacanza su máximo en la bola unidad de X.

En su prueba se utiliza el siguiente teorema de Bishop y Phelps:

Para cada espacio de Banach X el conjunto de formas lineales continuas que alcanzan su supremo en la bola unidad de X es norma denso en X^*.

James consideró en c_o el espacio J de las sucesiones $\{x(j),\, j \in \mathbf{N}\}$ tales que es finito el supremo de $|x(p_1) - x(p_2)|^2 + \ldots + |x(p_{n-1}) - x(p_n)|^2$ al variar n y probó que la codimensión de J en su bidual es 1. Bessaga y Pelczynski probaron que $J \times J$ no es isomorfo a ningún subespacio de J, resolviendo así un problema propuesto por Banach. Un ejemplo de espacio de Banach reflexivo no isomorfo a su producto cartesiano por sí mismo ha sido dado por Figiel.

Todos los subespacios cerrados de codimensión uno de un espacio de Banach son isomorfos. Banach propuso encontrar un espacio de Banach no isomorfo a un hiperplano. Contraejemplos en espacios normados de dimensión infinita han sido proporcionados por Rolewicz y Dubinsky, y Bessaga, Pelczynski y Rolewicz han encontrado espacios de Fréchet con esta propiedad.

Las propiedades del ejemplo DJ de James (el árbol dicotómico) han motivado el caracterizar los espacios de Banach X que son isomorfos a un cociente Y^{**}/Y, siendo Y otro espacio de Banach. Este problema ha sido estudiado por James, Lindenstrauss, Davis, Figiel, Johnson y Pelczynski, introduciendo los espacios de generación débilmente compacta (un espacio de Banach X se dice que es de generación débilmente compacta si existe un operador lineal continuo definido en un espacio reflexivo Z cuyo rango es denso en X), y obteniendo que para un espacio de Banach X de generación débilmente compacta existe un espacio Y tal que Y^{**}/Y es isomorfo a X.

Amir y Lindenstrauss han probado que los espacios de Banach de generación débilmente compacta admiten una norma equivalente estrictamente convexa (es decir que $p(x) + p(y) = p(x + y)$ implica la dependencia lineal de x e y).

Los espacios de Banach separables, al igual que los reflexivos, son de generación débilmente compacta. Para los espacios de Banach separables Kadec ha mejorado el resultado de Amir y Lindenstrauss probando la existencia de una norma localmente uniformemente rotunda, es decir que para puntos x y x_n de la esfera unidad se tiene que lim $p([x + x_n)/2] = 1$ implica lim $p(x - x_n) = 0$.

Troyanski ha mejorando los teoremas precedentes, pues ha probado que los espacios de Banach de generación débilmente compacta admiten una norma equivalente que es localmente uniformemente convexa.

Day ha obtenido que el espacio $1^{\infty}(S)$ con S no numerable no admite una norma equivalente uniformemente convexa. Más información sobre renormas equivalentes puede encontrarse en Asplund, Davis, Johnson, Klee, Pisier, Rosenthal, Schachermayer, Whitfield, así como en la excelente obra de Deville, Godefroy y Zizler, titulada "Smoothness and renormings in Banach spaces".

8.2.- Propiedades locales de los espacios de Banach

La distancia entre espacios isomorfos de Banach tiene interés en el estudio de las propiedades isomorfas de los espacios de Banach, así como en el estudio de las propiedades de los subespacios de dimensión finita de un espacio de Banach X, denominadas propiedades locales de X.

Para $a > 1$ se dice que los espacios de Banach X e Y son a-isomorfos si existe un isomorfismo T de X sobre Y tal que $\|T\|\|T\|^{-1} \leq a$. El mínimo de los números a para los que X e Y son a-isomorfos se llama la distancia de Banach Mazur entre X e Y y se denota como $d(X,Y)$. Los 1-isomorfismos son los isomorfismos isométricos.

Las estimaciones de la distancia de Banach-Mazur están relacionadas con el cálculo de las constantes de proyección. Dado $a \geq 1$ un subespacio Y de X se dice que es a-complementado si existe una proyección P de X sobre Y tal que $\|P\| \leq a$. El ínfimo de los números a tales que Y es a-complementado en X se denota por $p(Y,X)$. Para un espacio de Banach E se define la **constante de proyección de E** por

$$p(E) = \sup\ p(i(E), X)$$

donde el supremo se extiende sobre todos los espacios de Banach X y todas las inmersiones isométricas de E en X. El número $p(E)$ se llama la constante de proyección del espacio de Banach E, que está muy relacionada con la extensión de operadores lineales con valores en E, ya que:

Si E es un espacio de Banach con $p(E) < \infty$ *entonces para cada* (X,Y,T) *consistente en un espacio de Banach X, un subespacio Y y un operador lineal y continuo T de Y en E y para cada* $\varepsilon > 0$ *existe una extensión* $\overline{T}$ *de X en E tal que*

$$\overline{T} \text{ extiende } T \quad y \quad \|\overline{T}\| \leq C\|T\|$$

con $C \leq p(E) + \varepsilon$. *Recíprocamente, si para cada* (X,Y,T) *existe una extensión* $\overline{T}$ *que satisface* $\|\overline{T}\| \leq C\|T\|$ *entonces* $p(E) \leq C$. *Se tiene* $p(E) = \infty$ *si, y sólo si, existe* (X,Y,T) *tal que T no admite extensión a un operador acotado definido en X.*

La distancia de Banach Mazur y la constante de proyección están conectados con ciertos invariantes isométricos de los espacios de Banach finito dimensionales, así como con la teoría de los ideales de Banach. Algunos autores que han tratado estos problemas son Figiel, Garling, Grothendieck, Lindenstrauss, Milman, Pelczynski y Pietsch entre otros.

La distancia de Banach-Mazur da origen al siguiente concepto introducido por Grothendieck y James:

Sea $a \geq 1$. Un espacio de Banach X es *a-representable localmente* en un espacio de Banach Y, si para cada $b > a$ cada subespacio de dimensión finita de X es b-isomorfo a un subespacio de Y. Cuando X es a-representable localmente en Y e Y es a-representable localmente en X se dice que X es *a-isomorfo* localmente a Y. El espacio X se dice que es localmente representable en Y si X es localmente 1-representable en Y. Grothendieck y Joichi han probado que:

Un espacio de Banach X es localmente a-representable en l^2 *si, y sólo si, X es a-isomorfo a* l^2.

Extensiones de este resultado han sido obtenidas por Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine, Lindenstrauss y Pelczynski en el siguiente sentido:

Sea $1 \leq p < \infty$ *y sea* $a \geq 1$. *Un espacio de Banach X es a-representable localmente en* l^p *si, y sólo si, X es a-isomorfo a un subespacio de un* $L^p(\mu)$ *(en particular a un subespacio de* $L^p[0,1]$ *cuando X es separable).*

y para $p = \infty$ se tiene:

Para cada cardinal $n \geq \chi_0$ *existe un espacio compacto de Hausdorff K tal que el peso topológico del espacio C(K) es n y cada espacio de Banach cuyo peso topológico es* $\leq n$ *es isométricamente isomorfo a un subespacio del espacio C(K). Cada espacio de Banach es localmente representable en el espacio* c_0.

Este resultado extiende el teorema clásico de Banach-Mazur que nos dice que cada espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C([0,1])$. La prueba es similar sustituyendo el hecho de que cada métrico compacto es la imagen continua del conjunto ternario de Cantor por el teorema de Esenin-Volpin, que, admitiendo la hipótesis del continuo establece que para cada cardinal $n \geq \chi_0$ existe un compacto Hausdorff K de peso topológico n tal que cada compacto Hausdorff de peso topológico $\leq n$ es la imagen continua de K.

El problema de caracterizar los espacios de Banach en los que $l^p, 1 \leq p \leq \infty$ es localmente representable se debe a Krivine, Maurey, Pisier y Rosenthal. El siguiente caso particular tiene una prueba muy sencilla debida a Dvoretzky: *El espacio* l^2 *es localmente representable en cada espacio de Banach de dimensión infinita.*

Las caracterizaciones de los espacios de Banach en los que c_0 y l^∞ se pueden representar localmente están conectadas con la teoría de series aleatorias. Por ejemplo, Maurey y Pisier han obtenido que son equivalentes estas dos propiedades:

a) *El que el espacio* c_0 *no sea localmente representable en X.*

b) *Para cada sucesión* $\{x_n\}$ *de elementos de X y cada sucesión* $\{f_n(\omega), n \in \mathbb{N}\}$ *de variables aleatorias independientes gaussianas estandarizadas se tiene que la serie* $\sum f_n(w)x_n$ *converge casi por todas partes si, y sólo si, la serie* $\sum r_n(t)x_n$ *converge casi por todas partes, siendo* $r_n(t)$ *las funciones de Rademacher en el intervalo [0,1].*

El siguiente teorema debido a Lindenstrauss y Rosenthal se conoce como *principio de la reflexividad local* y muestra la diferente naturaleza entre los resultados relativos a estructura local y global de un espacio de Banach:

Cada espacio de Banach es localmente isométrico a su bidual.

8.3.- Los módulos de convexidad y de suavidad. Superreflexividad

Se ha dedicado gran atención a relacionar los invariantes de la estructura local de los espacios de Banach con las propiedades geométricas de las esferas unidad. Dos de estos invariantes son el módulo de convexidad introducido por Clarkson ($\delta_X(t) = \inf\{1 - \|(x + y/2\|, \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x - y\| \geq t\}$) y el módulo de suavidad $\rho_X(t)$ introducido por Day, que tiene por expresión:

$$\rho_X(t) = \frac{1}{2} \sup\{\|(x + y)\| + \|x - y\| - 2, \|x\| = 1, \|y\| = t\}).$$

El espacio de Banach se dice que es uniformemente convexo (suave) si $\delta_X(t) > 0$ para $t > 0$ $\left(\lim\limits_{t-0} \frac{\rho_X(t)}{t} = 0 \right)$.

Si $\mathcal{P}$ es una propiedad definida para espacios de Banach se dice que un espacio de Banach E tiene la propiedad super $\mathcal{P}$ si cualquier espacio finitamente representable en el espacio E tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Per Enflo fue el primero en demostrar que un espacio superreflexivo admite una norma uniformemente convexa. A Enflo y a James se debe que sepamos que las condiciones:

* X es isomorfo a un espacio uniformemente convexo.
* X es isomorfo a un espacio uniformemente suave.
* X es superreflexivo.

son equivalentes.

Otras caracterizaciones de la superreflexividad en términos de "geodésicas" de la esfera unidad han sido dadas por James y Schaffer y en términos de sucesiones básicas por Gurari y James. Es evidente que en un espacio superreflexivo ni c_o ni l^1 son localmente representables. James ha determinado un espacio reflexivo **RJ** no superreflexivo en el que l^1 no es localmente representable.

Los módulos de convexidad y suavidad también están conectados con la convergencia incondicional de las series en un espacio X. Por ejemplo:

Si X es un espacio de Banach uniformemente convexo y $\sum \varepsilon_n x_n$ es convergente para cada sucesión de signos $\{\varepsilon_n : n \in \mathbf{N}\}$ entonces $\sum \delta_X(\|x_n\|) < \infty$.

Si X es un espacio de Banach uniformemente suave y $\sum \varepsilon_n x_n$ *es divergente para cada sucesión de signos* $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ *entonces* $\sum \rho_X(\|x_n\|) = \infty$.

Si en $L^p(\mu)$ *con* $1 < p < \infty$ *la serie* Σf_n *es incondicionalmente convergente, entonces* $\Sigma \|f_n\|^{c(p)} < \infty$ *con* $c(p) = \text{máx } (p,2)$.

Si en $L^1(\mu)$ *la serie* Σf_n *es incondicionalmente convergente, entonces* $\Sigma \|f_n\|^2 < \infty$.

Que los exponentes utilizados son los mejores posibles se deduce con ayuda del teorema de Dvoretzky-Roger.

Terminando esta sección citemos la generalización del teorema de Orlicz Pettis debida a Besaga, Pelczynski y Kwapien, utilizando c_o y las funciones $r_k(t)$ de Rademacher:

Son equivalentes:

* $\Sigma |x^*(x_n)| < \infty$ *para cada* $x^* \in X^*$, *implica que la convergencia de* Σx_n *es incondicional.*

* *Que* $\sup_n \|r_k(t) x_k\| < \infty$ *implica la convergencia incondicional de* $\Sigma \chi_n$.

* *X no contiene copia de* c_o.

La teoría de las series incondicionalmente convergentes está relacionada con la teoría de los operadores absolutamente sumantes de Grothendieck y con ciertos operadores introducidos por L. Schwartz, en el contexto de la teoría de la medida en espacios vectoriales infinito dimensionales.

8.4.- Bases y la propiedad de aproximación

Hay diferentes situaciones en la teoría de operadores en las que es conveniente representar un operador como límite de una sucesión de operadores con propiedades conocidas.

Los operadores mejor investigados son los de rango finito dimensional y los compactos, por lo que es natural preguntarse cuando un operador lineal continuo puede ser aproximado por operadores de estas clases.

Banach, Mazur y Schauder habían observado que el problema de la aproximación estaba relacionado con el problema de la existencia de una base y con algunas cuestiones de la aproximación de funciones continuas.

La memoria de Grothendieck *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* de 1955 explicaba el papel fundamental del problema de la aproximación en el estudio de la estructura de los espacios de Banach. Por eso fue un progreso sustancial la determinación de un espacio de Banach sin la propiedad de aproximación (Per Enflo, 1972). El resultado de Enflo ha sido mejorado por Davie, Figiel y Szankowski, que han probado:

* *Para cada* $p \in [1,\infty] - \{2\}$ *existe un subespacio* E_p *en* l^p *que no tiene la propiedad de aproximación. Además* $E_\infty \subset c_o$.

La prueba de Davie, corta y elegante, utiliza propiedades de las series aleatorias. El siguiente resultado de Kwapien es otro contraejemplo de la propiedad de aproximación de interés en análisis armónico:

* *Para cada p, con* $2 < p < \infty$ *existen sucesiones crecientes* $\{n_k\}$ y $\{m_k\}$ *de enteros positivos tales que la envoltura lineal y cerrada en* L^p *de las funciones* $f_k(t) = e^{2\pi i t n_k} + e^{2\pi i t m_k}$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ *no tiene la propiedad de aproximación.*

Grothendieck en la referida memoria *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* estableció el siguiente resultado positivo respecto a la teoría de la aproximación:

Si X^* tiene la propiedad de aproximación se tiene que X también tiene la propiedad de aproximación.

Este resultado lo complementó Lindenstrauss probando que existe un espacio de Banach con la propiedad de aproximación (incluso con una base), cuyo dual no tiene la propiedad de aproximación.

8.5,- La propiedad de aproximación acotada

En general las pruebas de que un espacio particular de Banach tiene la propiedad de aproximación muestran que tiene una propiedad más fuerte. Distintos tipos de propiedades han sido estudiadas por Grothendieck, Johnson, Lindenstrauss, Pelczynski, Rosenthal y Zippin. Ahora sólo vamos a dar unas referencias respecto a la propiedad de aproximación acotada y en la próxima sección hablaremos de las bases de Schauder.

Un espacio de Banach Y se dice que tiene la propiedad de aproximación acotada con constante a (> 1) si para cada $\varepsilon > 0$ y para cada compacto $C \subset Y$ existe un operador F de rango finito dimensional de Y en Y y norma menor o igual que a tal que $\|Fx - x\| < \varepsilon$ para cada $x \in C$.

Figiel y Johnson han construido un espacio de Banach que tiene la propiedad de aproximación y no tiene la propiedad de aproximación acotada.

Grothendieck ha demostrado que si X es un espacio de Banach reflexivo o un espacio de Banach separable con predual, entonces si X tiene la propiedad de aproximación se tiene que X tiene la propiedad de aproximación acotada.

Además, también Grothendieck ha probado que si X^* tiene la propiedad de aproximación acotada con constante a entonces X tiene la propiedad de aproximación acotada con constante $\leq a$.

La propiedad de aproximación acotada puede formularse en términos de extensión de opeeradores, siguiendo a Davie, Michael, Ryll-Nardzewski, Pelczynski y Wojtaszczyk.

8.6.- Bases y su relación con la teoría de la aproximación

La propiedad de aproximación acotada está muy relacionada con la propiedad de existencia de una base. Una sucesión $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de un espacio de Banach X es una base de Schauder (o simplemente una base) de X si, para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x = \Sigma f_n(x) e_n$. Cada f_n es un elemento de X^* llamado el n-ésimo coeficiente funcional de la base $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$. Considerando las sumas parciales se tiene:

* *Si un espacio de Banach X tienen una base, entonces X es separable y tiene la propiedad de aproximación acotada.*

Un espacio sin la propiedad de aproximación acotada no tiene base. No se conoce ningún espacio con la propiedad de aproximación acotada que no tenga base.

* Un espacio de Banach separable tiene la propiedad de aproximación acotada si, y sólo si, es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio de Banach con base (Johnson, Rosenthal, Zippin y Pelczynski).

* Sea X un espacio de Banach separable con predual (separable reflexivo). X tiene la propiedad de aproximación acotada si, y sólo si, X es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio con base que tiene predual (de un espacio reflexivo con base) (Lindenstrauss y Johnson).

De la misma forma que para la propiedad de aproximación y para la propiedad de aproximación acotada se tiene:

* Si X^* tiene una base lo mismo le sucede a X. Recíprocamente, si X tiene una base, X^* es separable y tiene la propiedad de aproximación, entonces X^* tiene una base (Johnson, Rosenthal y Zippin).

*Si X es un espacio de Banach separable tal que X o X^* es isomorfo a un subespacio complementado de $C([0,1])$ o $L^p([0,1])$ con $1 \le p < \infty$, entonces X tiene base (Johnson, Rosenthal, Zippin).

El resultado de Banach de que cada espacio de Banach de dimensión infinita contiene un subespacio de dimensión infinita con base ha sido mejorado en distintas direcciones:

* Cada espacio de Banach no reflexivo contiene un subespacio no reflexivo con base (Pelczynski).

* Un espacio de Banach de dimensión infinita con predual separable contiene un subespacio con predual y con base (Johnson y Rosenthal).

Los resultados anteriores relativos a subespacios sugieren considerar el problema análogo con cocientes, para los que se tiene:

*Cada espacio de Banach separable de dimensión infinita tiene un cociente infinito dimensional con base (Johnson y Rosenthal).

Se podrá mejorar el resultado anterior, quitando la condición de separabilidad, si se llegase a probar que los espacios de Banach de dimensión infinita tienen algún cociente separable de dimensión infinita.

Otro problema de Banach relativo a la existencia de sistemas biortogonales ha sido contestado por Ovsepian y Pelczynski:

*Cada espacio de Banach separable X admite un sistema biortogonal (x_n, f_n) con $\|x_n\| = 1, n = 1,2,3,\ldots$, $lim_n \|f_n\| = 1$ y tal que:

a) $f \in X^*$ y $f(x_n) = 0$, cualquiera que sea n, implican que $f = 0$.

b) $x \in X$ y $f_n(x) = 0$ para $n = 1,2,\ldots$, implican que $x = 0$.

Además, dado $c > 1$ el sistema puede elegirse de forma $\sup_n \|f_n\| < c$.

No se sabe si la última parte es cierta para $c = 1$.

8.7.- Bases incondicionales

Una base $\{e_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ de un espacio de Banach X se dice que es **incondicional** si $\Sigma \left| f_n(x)x^*(e_n) \right| < \infty$, para cada $x \in X$ y para cada $x^* \in X^*$, donde f_n es la sucesión de coeficientes funcionales de la base $\{e_n, n \in \mathbf{N}\}$.

La existencia de una base incondicional en un espacio es una propiedad muy fuerte, pues define para cada subconjunto σ de enteros positivos la proyección continua $P_\sigma(x) = \Sigma\{f_n(x)e_n\colon n \in \sigma\}$ y, en el caso real, determina la estructura de retículo en X inducida por el orden parcial definido por $x < y$ si, y sólo si, $f_n(x) < f_n(y)$, para $n = 1,2,\ldots$. Además algunos resultados con bases incondicionales pueden ser extendidos a retículos de Banach, como puede verse en la obra de Dunford y Schwartz, así como en la de Lindenstrauss y Tzafriri.

Se debe a James el que *un espacio de Banach con base incondicinal es reflexivo si, y sólo si, no contiene subespacios isomorfos a* c_0 *o a* l^1. Por ello sus ejemplos J y DJ no tienen base incondicional. Tampoco tiene base incondicional el espacio $C[0,1]$ pues no es reflexivo y por el teorema de Banach y Mazur contiene una copia de cualquier espacio de Banach separable.

Es trivial la existencia de bases incondicionales en los espacios l^p, $1 \le p < \infty$ así como en los espacios separables de sucesiones de Orlicz. Un espacio de funciones de Orlicz tiene base incondicional si, y sólo si, es reflexivo (Gaposhkin). Es difícil el siguiente resultado de Paley y Marcinkiewicz: *El sistema de Haar es una base incondicional para los espacios* L^p, *para* $1 < p < \infty$. Este resultado se extiende a espacios simétricos de funciones para los que Olevskii ha demostrado que tienen base incondicional si, y sólo si, el sistema de Haar es una base incondicional.

Si X^* es separable y X tiene una base incondicional, entonces X^* tiene una base incondicional. Sin embargo, existen espacios sin base incondicional cuyo dual tiene base incondicional, por ejemplo $C(\omega^\omega)$ cuyo dual es 1^1.

8.8.- Caracterizaciones de los espacios de Hilbert en la clase de los Banach.

De alguna forma los espacios de Banach pueden considerarse una extensión de los espacios de Hilbert. Alguna de las propiedades importantes de los espacios de Banach hacen referencia a cierta aproximación local a un espacio de Hilbert.

No debe pues extrañar que uno de los problemas propuestos por Banach en su *Teoría de operacines lineales* es la caracterización isométrica o isomorfa de los espacios de Hilbert en la clase de espacios de Banach. Han sido muchos los matemáticos atraidos encontrar una propiedad **P** tal que *un espacio de Banach X tuviese la propiedad* **P** *si, y sólo si, X fuese isométricamente isomorfo (isomorfo) a un espacio de Hilbert.* Ha sido más difícil encontrar las caracterizaciones isomorfas que las isométricas.

Jordan y von Neumann probaron que un espacio de Banach es isométrico a un Hilbert si, y sólo si, satisface la ley del paralelogramo.

La caracterización de Jordan y von Neumann se puede reformular diciendo que un espacio de Banach es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, cada subespacio de dimensión 2 es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert. Análoga caracterización con subespacios tridimensionales había sido obtenida ya por Fréchet.

Kakutani y Bohnenblust han obtenido:

En un espacio de Banach X de dimensión ≥ 3 son equivalentes:

i) X es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert.

ii) Cada subespacio de dimensión 2 de X es la imagen de una proyección de norma 1.

iii) Cada subespacio de X es la imagen de una proyección de norma 1.

Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad $\mathbf{H}^k$, para $k = 2,3,\ldots$, (dimensión de $X \geq k$)si todos los subespacios de X de dimensión k son isométricamente isomorfos. De artículos de Auerbach, Mazur, Ulam, Dvoretzky y Gromov se deduce que *un espacio de Banach X real (complejo) con la propiedad H^k es isométricamente* *isomorfo a un espacio de Hilbert si k es par y* $k+1 \leq \dim X \leq \infty$, *o si k es impar* $k+2 \leq \dim X \leq \infty$ (*si k es par y* $k+1 \leq \dim X \leq \infty$ *o si k es impar* $2k \leq \dim X \leq \infty$, *respectivamente*).

Foias y von Neumann han obtenido la siguiente caracterización: *Un espacio de Banach complejo X es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, para cada operador lineal* $T\colon X \longrightarrow X$ *y cada polinomio P con coeficientes complejos se verifica que* $\|P(T)\| \leq \|T\| \sup \|P(z)\colon |z| = 1\|$.

Auerbach y von Neumann han probado que un espacio de Banach finito dimensional es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, para cada par de puntos x e y en la esfera unidad de X existe una isometría lineal T de X sobre X tal que $T(x) = y$.

Vamos a mencionar algunas caracterizaciones de la isomorfía de un espacio de Banach con un espacio de Hilbert. Lindenstrauss y Tzafriri han probado que

Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si cada subespacio cerrado de X es complementado.

Grothendieck, Lindenstrauss y Pelczynski han demostrado que *un espacio de Banach separable X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, X y* X^* *son isomorfos a subespacios* $L^1([0,1])$ *o si, y sólo si, X y* X^* *son isomorfos a cocientes de* $C([0,1])$.

Se denota por $L_o^2(R,X)$ al espacio normado de las funciones simples con valores en X cuyos soportes tienen medida de Lebesgue finita con la norma $\left(\int \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2}$. Sea $L^2(R,X)$ la completación de este espacio y sea F la transformada de Fourier de $L_o^2(R,X)$ en $L^2(R,X)$, Kwapien ha probado que X *es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, F es un operador acotado.*

Figiel y Pisier han obtenido la siguiente caracterización de isomorfía con un Hilbert en términos de convexidad uniforme y suavidad uniforme: *Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, existe una constante A y dos espacios de Banach* X_1 *y* X_2 *isomorfos a X tales que* X_1 *es uniformemente convexo,* X_2 *es uniformemente suave y los módulos de convexidad y suavidad satisfacen las relaciones* $\delta_{X_1}(t) \geq At^2$, $\rho_{X_2}(t) \leq At^2$, para $0 < t < \varepsilon$.

Una caracterización no lineal del isomorfismo con un espacio de Hilbert se debe a Enflo: *Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, es uniformemente homeomorfo a un espacio de Hilbert H.*

9.- Comentario final.

En el congreso de matemáticas de París de 1900, Hermite rindió homenaje a Weierstrass diciendo que **era el maestro de todos los matemáticos del congreso**. Creo que cualquier matemático tomaría las palabras de Hermite para trasladarlas a Banach.

En otra ocasión, cuando se cuestionaba la teoría de conjuntos de Cantor, Hilbert afirmó con contundencia **que Cantor había creado un paraíso para los matemáticos del que nadie los podría sacar**. Dentro de ese paraíso matemático de Hilbert creo que los Espacios de Banach están, parafraseando a Santa Teresa, muy cerca de la séptima morada.

Agradecimientos. Deseo expresar mi profundo agradecimineto a los profesores D. Manuel Valdivia y D.Vicente Montesinos, que me han facilitado parte de la bibliografía, han leído el manuscrito y me han dado valiosas sugerencias.

También deseo reiterar mi gratitud a la Real Academia por su invitación a dar esta conferencia dentro del curso de Historia de la Matemática en el siglo XX, y muy particularmente a los directores del curso, los Excmos. Srs. D. Darío Maravall Casesnoves y D. Baltasar Rodríguez-Salinas Palero.

Bibliografía

Publicaciones de Stefan Banach

[1] Banach S. y Steinhaus H.: *Sur la convergence en moyenne de séries de Fourier*. Bull. International de l'Académie des Sciences de Cracovie, serie A (1918) 87-96.

[2] Banach S.: *Sur la valeur moyenne des fonctions orthogonales*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. (1919) 66-72.

[3] Banach S.: *Sur l'equation fonctionelle* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Fund. Math. 1(1920)123-124.

[4] Banach S.: *Sur les ensembles de points oú la derivée est infinie*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **173** (1921) 457-459.

[5] Banach S. y Ruziewicz S.: *Sur les solutions d'une équation fonctionnelle de J. Cl. Maxwell*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. (1922) 1-8.

[6] *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*. Fund. Math. 3 (1922) 128-132.

[7] Banach S.: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (Tesis doctoral) Fund. Math. **3** (1922) 133-181.

[8] Banach S.: *An example of an orthogonal development whose sum is everywhere different from the developed function*. Proceedings of the London Math. Soc.(2), **21** (1923) 95-97.

[9] Banach S.: *Sur le problème de la measure*. Fund. Math. **4** (1923) 7-33.

[10] Banach S.: *Sur un théorème de M. Vitali*. Fund. Math. **5** (1924) 130-136.

[11] Banach S.: *Sur une classe de fonctions d'ensemble.* Fund. Math. **6** (1924) 170-188.

[12] Banach S.: *Un théorème sur les transformationos biunivoques.* Fund. Math. **6** (1924) 236-239.

[13] Banach S. y Tarski A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fund. Math. **6** (1924) 244-277.

[14] Banach S.: *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie.* Fund. Math.**7** (1925) 225-236.

[15] Banach S.: *Sur une propriété caractéristique des fonctions orthogonales.* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **180** (1925) 1637-1640.

[16] Banach S.: *Sur le prolongement de certaines fonctionneles.* Bulletin des Sciences Mathématiques (2) **49** (1925) 301-307.

[17] Banach S.: *Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires.* Bulletin des Sciences Mathématiques (2) **50** (1926) 27-32 y 36-43.

[18] 18. Banach S.: *Sur une classe de fonctions continues.* Fund. Math. **8** (1926) 166-172.

[19] Banach S. y Steinhaus H.: *Sur le principe de la condensation de singularités.* Fund. Math. **9** (1927) 50-61.

[20] Banach S.: *Sur certains ensembles de fonctions conduisant aux équations partielles du second ordre.* Mathematische Zeitschrift **27** (1927) 68-75.

[21] Banach S. y Saks S.: *Sur les fonctions absolument continues des fonctions absolument continues.* Fund. Math. **11** (1928) 113-116.

[22] Banach S.: *Sur les fontionnelles linéaires.* Studia Math. **1** (1929) 211-216.

[23] Banach S.: *Sur les fontionnelles linéaires II.* Studia Math.**1** (1929) 223-239.

[24] Banach S. y Kuratowski C.: *Sur une généralisation du problème de la measure.* Fund. Math. **14** (1929) 127-131.

[25] Banach S.: *Rachunek rozniczkowy i calkowy (Cálculo diferencial e integral)* tomo 1. Zaklad Narodowy im. Ossolinskich, Lwów, (1929).

[26] Banach S.: *Rachunek rozniczkowy i calkowy (Cálculo diferencial e integral)* tomo 2. Ksiaznica-Atlas, Lwów, (1930).

[27] Banach S. y Saks S.: *Sur la convergence forte dans le champ* L^p. Studia Math.**2** (1930) 51-57.

[28] Banach S.: *Uber einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen.* Studia Math. **2** (1930) 207-220.

[29] Banach S.: *Bemerkung zur Arbeit "Uber einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen".* Studia Math. **2** (1930) 251.

[30] Banach S.: *Uber additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen.* Fund. Math. **15** (1930) 97-101.

[31] Banach S.: *Théorème sur les ensembles de première catégorie.* Fund. Math. **16** (1930) 395-398.

[32] 32. Banach S.: *Uber analytisch darstellbare Operationen in abstrakten Räumen*. Fund. Math. **17** (1931) 283-295.

[33] 33. Banach S.: *Uber metrische Gruppen*. Studia Math. **3** (1931) 101-113.

[34] 34. Banach S.: *Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen* Studia Math. **3** 1931) 174-179.

[35] Banach S. y Auerbach H.: *Uber die Hóldersche Bedingung* Studia Math. **3** (1931) 180-184.

[36] *Banach S.: Teorja operacyj, Tom I. Operacje liniowe. (Teoría de las operaciones*, Tomo I. Operaciones lineales). Kasa im. Mianowskiego, Warszawa).

[37] Banach S.: *Sur les transformations biunivoques*. Fund. Math. **19** (1932) 10-16.

[38] Banach S.: *Théorie des operations linéaires*. Monografie Matematyczme 1, Warszawa (1932).

[39] Banach S.y Mazur S.: *Eine Bemerkung über die Konvergenzmengen von Folgen linearen Operationen*. Studia Math. **4** (1933) 90-94.

[40] Banach S. y Kuratowski C.: *Sur la structure des ensembles linéaires*. Studia Math. **4** (1933) 95-99.

[41] Banach S. y Mazur S.: *Zur Theorie der linearen Dimensionen*. Studia Math.**4** (1933) 100-112.

[42] Banach S. y Mazur S.: *Sur la dimmension linéaire des espaces fonctionnels* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **196** (1933) 86-88.

[43] Banach S.: *Sur les séries lacunaires*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.(1933) 149-154.

[44] Banach S.: *Sur la measure de Haar*. Nota al libro: S. Saks, *Théorie de l'intégrale*. Monografie Matematyczne **2**, Warszawa (1933) 264-272.

[45] Banach S. y Mazur S.: *Uber mehrdeutige stetige Abbildungen*. Studia Math.**5** (1934) 174-178.

[46] Banach S.: *Sur un théorème de M. Sierpinski*. Fund. Math. **25** (1935) 5-6.

[47] Banach S.: *Die Theorie der Operationen und ihre Bedeutung für die Analysis*. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo (1936) 261-268.

[48] Banach S.: The Lebesgue integral in abstract spaces. Nota al libro: S. Saks.: *Theory of the Integral* Monografie Matematyczne 7, Warszawa-Lwów (1937) 320-330.

[49] Banach S.: Uber homogene Polynome in L^2. Studia Math. 7 (1938) 36-44.

[50] Banach S.: *Mechanics* (en polaco en dos tomos en Monografie Matematyczne 8 y 9. Warszawa-Lwów-Wilno (1938) y en inglés en un tomo en Monografie Matematyczne **34**. Warszawa-Wroclaw (1951).

[51] 51. Banach S.: *Uber das "Loi suprème" von Hoene-Wronski*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.(1939) 1-10.

[52] Banach S.: *Sur la divergence des series orthogonales*. Studia Math. 9 (1940) 139-155.

[53] Banach S.: *Sur la divergence des interpolations*. Studia Math. **9** (1940) 156-165.

[54] Banach S.: *Sur la measure dans les corps indépendants*. Akademia Hayk Ykpaïhclkoï PCP, Ihcthtyt *Matematπkπ, Coiphπk πpaub Ihctπtyty Matematπkπ* 1946 No **8** (1947), 71-90.

[55] Banach S.: *On measures in independent fields* (edited by S. Hartman), Studia Math. **10** (1948), 159-177.

[56] Banach S.: *Remarques sur les groupes et les corps métriques* (préparé pour l'impression par S. Hartman) Studia Math. **10** (1948), 178-181.

[57] Banach S.: *Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une measure*. Nota póstuma con prefacio y comentario de E. Marczewski, Colloquium Mathematicum **1** (1948) 103-108.

[58] Banach S.: *Sur la représentation des fonctions indépendantes à l'aide des fonctions de variables distinctes*. Redactado después de una reseña póstuma por S. Hartman y E. Marczewski, Colloquium Mathematicum **1** (1948) 109-121.

[59] Banach S.: *Wstep do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej* (Introducción a la teoría de funciones de variable real). Monografie Matematyczne 17, Warszawa-Wroclaw 1951 (en polaco).

[60] Banach S. y W. Stozek.- *Algebra dla klasy II gimnazjum*, Lwów 1934, Wroclaw 1947.

[61] Banach S.- *Algebra dla klasy III gimnazjum*, Lwów 1935, Wroclaw 1947.

[62] Banach S.- *Algebra dla klasy IV gimnazjum*, Lwów 1936, Jerozolima 1944, Bari 1946, Edinburg 1946, Wroclaw 1946.

[63] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- *Arytmetyka dla klasy I gimnazjum*, Lwów 1933, 1937.

[64] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- *Arytmetyka i geometrja dla klasy V szkól powszechnych*, Lwów 1933.

[65] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- *Arytmetyka i geometrja dla klasy VI szkól powszechnych*, Lwów 1933, Edinburgh 1945.

[66] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- *Arytmetyka i geometrja dla klasy VII szkól powszechnych*, Lwów 1935.

[67] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- *Arytmetyka i geometrja dla klasy I szkól srednich*, Lwów 1923.

[68] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- *Arytmetyka i geometrja dla klasy II szkól srednich*, Lwów 1930.

[69] Banach S., W. Sierpinski y W. Stozek.- Arytmetyka i geometrja dla klasy III szkól srednich,Lwów1931.

Bibliografía complementaria

[70] *Biografía de Stefan Banach*. Colloquium Mathematicum. Volumen 1. 1948.

[71] W. Orlicz y E. Marczewski. *"Sur l'oeuvre scientifique de Stefan Banach. Colloquium Mathematicum*. Volumen **1**. 1948.

[72] *Discursos de la sesión conmemorativa del quince aniversario del fallecimiento de Stefan Banach.* Wiadomosci Matematyczne, Sociedad Polaca de Matemáticas. 1961.

[73] *Discursos de la sesión conmemorativa del quince aniversario del fallecimiento de Stefan Banach.* Volumen 1 de Studia Mathematica. 1963.

[74] *Stefan Banach. Oeuvres. Volumen 1.* Ediciones científicas de Polonia 1967.

[75] Kazimierz Kuratowski. *A Half Century of Polish Mathematics.* Pergamon, 1973.

[76] *Stefan Banach. Oeuvres.* Volumen 2. Ediciones científicas de Polonia 1979.

[77] Daniel Mauldin. *The Scottish Book.* Birkhäuser 1981.