Borel, Baire y Lebesgue

Mª E. BALLVÉ* y P. JIMÉNEZ GUERRA**

Emile Borel (1871-1956)

Emile Félix Edouard Justin Borel nace el 7 de Enero de 1871 en Saint-Affrique (Aveyron, Francia) del matrimonio formado por el pastor protestante Honoré Borel y su mujer Emile Teissié-Solier. En 1882 Borel deja la escuela donde su padre eseñaba en Saint-Affrique, para estudiar en un liceo próximo a Montauban, trasladándose posteriormente a París para preparar su ingreso en la Universidad. En esta época hace amistad con un hijo de G. Darboux, frecuentando el círculo familiar de este gran matemático, lo que sin duda influyó en su vocación. En 1889 ingresa con el número uno de su promoción en la Escuela Normal Superior y en la Escuela Politécnica, decidiéndose por continuar sus estudios en la Escuela Normal Superior debido a su interés por la docencia y la investigación.

En 1893 acepta un cargo docente en la Universidad de Lille, donde escribe su tesis doctoral y veintidós artículos más, regresando en 1897 a la escuela Normal, donde profesó como Maître de Conferences hasta que en 1909 pasó a ocupar la Cátedra de Teoría de Funciones, de la que fue su primer titular. Ese mismo año entra a formar parte del Consejo Universitario, en representación de la Facultad de Ciencias, en el que permaneció durante treinta y dos años, y el año siguiente (1910) es nombrado Vicerrector de Alumnos de Ciencias, época que él recuerda como la más feliz de su vida y que la Primera Guerra Mundial cortaría tristemente. Al finalizar la guerra dado que, como él recuerda, no podía seguir siendo feliz en la Escuela Normal Superior "debido a las nostalgias y los recuerdos de las numerosas personas queridas fallecidas", entre ellas su hijo adoptivo, se traslada a petición propia a la Cátedra de Cálculo de Probabilidades y Física Matemática de la Sorbona, manteniendo toda su vida una vinculación honorífica con la Escuela Normal Superior. Esta época de la vida de Borel se cierra con su elección como Académico en 1921 y numerosos viajes, incluyendo una estancia de cinco meses en China con su amigo y matemático Paul Painlevé.

En 1901 contrae matrimonio con Margarita Appel, hija mayor del matemático Paul Appel (quien entre otras distinciones consiguió en 1885 el Premio Bordin de la Academia de Ciencias de París por dar una de las primeras soluciones al conocido problema de los "déblais et rémblais" ("cutting and filling" en terminología inglesa de

* Profesora Titular de la UNED.
** Académico Numerario

la época y de la "transferencia (o transporte) de masas" o "Problema de Monge-Kantorovich" en terminología actual) que fue profesor de Borel en sus años de estudiante en la Escuela Normal Superior. El matrimonio Borel no tuvo hijos, adoptando a la temprana muerte de sus padres, a Fernand Lebeau, hijo de la hermana mayor de Borel, que fallecería posteriormente en la Primera Guerrra Mundial, como anteriormente hemos señalado.

Margarita Borel desarrolló, al igual que su marido, una intensa actividad. Escribió más de treinta novelas bajo el seudónimo de Camille Marbo, presidió la Société de Gens de Lettres y constantemente colaboró, ayudó y acompañó a su marido en sus variadas actividades. Las relaciones del matrimonio Borel con los ambientes culturales, científicos, industriales y políticos de la época, le llevó a mantener frecuentes contactos con figuras relevantes de la intelectualidad de su época como Paul Valery o el matemático y Presidente de la República Francesa Paul Painlevé, y contribuyó a diversificar grandemente sus intereses y actividades. Así, a la vez que Borel continúa con su creatividad matemática, desarrolla una intensa actividad política, primero como alcalde de su pueblo natal Saint-Affrique, con su esposa Margarita como presidente del Jurado de Mujeres, y luego como concejal del distrito de Aveyron, diputado en el parlamento francés durante doce años (1924-1936) y ministro de Marina durante los meses que duró la Presidencia de Painlevé. A su iniciativa se deben numerosas leyes de carácter científico y la fundación del Centro Nacional de la Investigación Científica, contribuyendo decisivamente a la creación en 1928 del Instituto Henry Poincaré, que dirigió hasta su muerte. Participó en las dos Guerras Mundiales, en la Primera trabajando en la Oficina de Defensa, mientras su mujer dirigía un hospital, y en la Segunda colaborando con la Resistencia en Aveyron, donde consigue volver en 1941 tras permanecer preso de los alemanes en Fresnes, durante un breve período de tiempo en 1941, bajo el régimen de Vichy.

En 1936 Borel se retira de la política activa y en 1940 lo hace de su cátedra de la Sorbona, aunque continúa escribiendo (cincuenta trabajos más, entre artículos y libros) y viajando. El 3 de Febrero de 1956 muere en París a los ochenta y cinco años de edad. Su intensa actividad le mereció numerosas distinciones y reconocimientos, como la Cruz de Guerra (1918), la Presidencia de la Academia de Ciencias (1934), la Medalla de la Resistencia (1945), la Legión de Honor (1950), la primera Medalla de Oro del Centro Nacional de la Investigación Científica, etc. .

La obra científica de Borel consta de más de trescientas publicaciones (ya en su primer año como alumno de la E.N.S. escribió dos artículos), entre las que se encuentran treinta y cinco libros. Además, contribuyó profusamente en revistas y periódicos, editó revistas (como "La revista del mes" (1906-1920)) y dirigió numerosas series de libros, como la "Colección de monografías sobre la Teoría de Funciones" (1898-1952), en la que aparecieron (publicados por Gauthier-Villars) cincuenta volúmenes, diez de los cuales se deben al propio Borel, "Cursos de Matemáticas" (1903-1912), compuesta por textos de carácter elemental, "Nueva colección científica" (1910-1922), de treinta y cinco volúmenes, "Biblioteca de educación por la ciencia" (1924-1946), de alta divulgación, de la que forman parte sus "Elementos de la teoría de conjuntos", "Colección de Física Matemática" (1928-1950) y la "Colección de monografías sobre el "Cálculo de Probabilidades y sus Aplicaciones", cuyo segundo fascículo "La teoría matemática del bridge" (1940), fue escrito por Borel en colaboración con un especialista en dicho juego llamado A. Cheron. Borel escribió además numerosas obras de divulgación, como "El juego, la ciencia y las teorías científicas modernas", "La evolución de la mecánica" y el "Valor práctico y filosofía de las probabilidades".

La investigación matemática de Borel se centra básicamente en dos áreas diferentes, notándose en ella la influencia de grandes matemáticos como su maestro Jordan, Cantor o Cauchy, por quien sintió una profunda admiración. Desde sus comienzos hasta más o menos la Primera Guerra Mundial, Borel se ocupa preferentemente de cuestiones relativas a la Teoría de Funciones, pasando posteriormente de forma gradual a interesarse por el Cálculo de Probabilidades y la Física Matemática, motivado por los problemas científicos planteados por la guerra.

En 1883, Poincaré había ideado un procedimiento para construir funciones analíticas en regiones del plano limitadas por contornos convexos con tangente y radio de curvatura en cada punto, que no pueden prolongarse analíticamente a través de su frontera. En su tesis doctoral, "Sobre algunos puntos de la teoría de funciones" (1894), publicada en el tomo 12 (1895) de los Anales de la Escuela Normal, Borel prueba que para funciones (definidas mediante series funcionales) del tipo de las construidas por Poincaré, se puede dar en ciertos casos una definición de prolongación analítica a través de contornos singulares, del tipo de los considerados por Poincaré. Para ello considera series de funciones racionales de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{\left(z - a_n\right)^{m_n}},$$

con $m_n \leq N$ (fijo), $\sum_{n=0}^{+\infty} |A_n| < +\infty$ y (a_n) una sucesión densa en el contorno, probando que estas funciones verifican muchas de las propiedades de las funciones analíticas, como por ejemplo el teorema de identidad. Las demostraciones de algunos de estos resultados sugirieron a Borel la importancia de dar una definición de medida que utilizase un número infinito de intervalos para cubrir el conjunto a medir. De esta forma, el punto de partida de Borel consiste en tomar como medida de un subconjunto abierto y acotado U de la recta real, el ínfimo de las sumas de las series $\sum_n |I_n|$, siendo $|I_n|$ la longitud del intervalo I_n, cuando $\{I_n\}$ recorre el conjunto de las familias numerables de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos, cuya unión es U, en lugar de utilizar cubrimientos finitos de U como era habitual, basándose en un resultado conocido desde Cantor según el cual todo abierto U de la recta real es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos.

En 1895, Borel publica un libro en colaboración con su amigo y compañero de la Escuela Normal Superior Jules Drach, basado en las conferencias dadas por Jules Tunnery en la Escuela Normal Superior sobre teoría de números y álgebra superior, en el que Drach al tratar el álgebra superior, emplea un método sin precedentes, al menos fuera de Francia, consistente en tratar un tema matemático partiendo de axiomas o postulados establecidos a priori, que iba a influir decisivamente en la manera de introducir Borel su teoría de la medida.

En su libro "Leçons sur la théorie des fonctions" (1898), Borel afirma que "hemos reconocido que una definición de medida sólo puede ser útil si ésta verifica ciertas propiedades fundamentales, nosotros hemos impuesto estas propiedades a priori y las hemos empleado para definir la clase de los conjuntos que hemos considerado como medibles. Esta forma de proceder presenta grandes analogías con el método introducido por el Sr. Drach en Álgebra y en la teoría de las ecuaciones diferenciales ... En cualquier caso, procede la misma idea fundamental: definir las nuevas propiedades, es decir, establecer qué propiedades son estrictamente indispensables para el razonamiento que se va a seguir...".

En este libro Borel establece las siguientes propiedades básicas que debe cumplir una medida:

i) Una medida es siempre no negativa.
ii) La medida de la unión numerable (o finita) disjunta de conjuntos debe ser igual a la "suma" de las medidas de dichos conjuntos.
iii) La medida de la diferencia entre dos conjuntos (un conjunto y un subconjunto suyo) es igual a la diferencia de sus medidas.
iv) Todo conjunto de medida no nula no puede ser (ni finito ni) numerable.

Añadiendo que "a los conjuntos para los cuales se pueda definir una medida que verifique las propiedades anteriores, les denominaremos conjuntos medibles".

Borel se planteó la cuestión de construir una clase de conjuntos para los que se pudiera definir una medida que verificara los postulados anteriores, partiendo de la definición (antes mencionada) de la medida de los subconjuntos abiertos y acotados de la recta real, y extendiendo la definición de la medida a la clase de los conjuntos que se pueden obtener a partir de los conjuntos abiertos por iteración indefinida de las operaciones "unión contable" y "diferencia de conjuntos". No obstante, Borel no llegó a dar una descripción rigurosa de esta clase de conjuntos, que posteriormente establecería definitivamente Lebesgue en 1902, denominándolos "conjuntos B-medibles" y que actualmente conocemos como conjuntos de Borel o borelianos.

Por otra parte, cabe señalar que en su libro "Leçons sur la théorie des fonctions", Borel no relaciona su teoría de la medida con la teoría de la integración, señalando que "sería fructífero comparar la definición que hemos dado con las definiciones más generales dadas por el Sr. Jordan en su "Cours d'analyse". ... Además, el problema que nosotros investigamos aquí es totalmente diferente del resuelto por el Sr. Jordan...". Como vemos, Borel consideraba más general la definición de Jordan que la suya, probablemente por el hecho de existir "numerosos" conjuntos medibles Jordan que no lo son según Borel (debido a que en estos últimos se tiene en cuenta la estructura de los conjuntos a medir, cualidad que como el mismo Borel señala, él encuentra "filosóficamente atractiva" (1898)) aunque también existan "algunos" conjuntos no medibles Jordan que sí lo son según Borel. En todo caso, Borel no planteó en ningún momento su teoría como extensión o generalización de la teoría del contenido, siendo comprensible a la luz de lo anterior, que su teoría no pareciese apropiada para generalizar el concepto de integral, llegando a señalar Borel, refiriéndose a esta cuestión, que "la aplicación a las series que él tenía en mente distaba mucho de los problemas de la teoría de la integral".

Por otra parte, con objeto de estudiar minuciosamente los conjuntos (de números reales) de medida nula, que define como aquéllos que pueden ser recubiertos por una familia numerable de intervalos cuya suma de longitudes sea arbitrariamente pequeña, Borel introduce en 1949 el concepto de "raréfaction" ("enrarecimiento") basado en la idea fundamental de asociar a cada conjunto de medida nula diversas series convergentes de términos no negativos y estudiar la "rapidez" de la convergencia de dichas series, aunque no parece que consiguiese obtener resultados muy generales en esta línea.

Como acertadamente afirma su biógrafo Collingwood, en la tesis de Borel se encuentran ya las ideas básicas con las que puso los cimientos de las modernas teorías de las funciones de variable real, de las series divergentes, de la prolongación analítica y de la medida, de la probabilidad numerable, la aproximación diofántica y la teoría de la distribución métrica de valores de funciones analíticas. En ella se percibe claramente una gran influencia de las ideas de Cantor, en particular en lo relativo a los conjuntos numerables. Esta influencia es especialmente evidente en dos de los resultados más famosos de su tesis, la demostración de que todo conjunto numerable tiene medida cero, en la que subyace implícitamente la idea de la extensión de la medida de intervalos a una clase más amplia de conjuntos (la de los borelianos) y el teorema de recubrimiento (que en su versión actual conocemos como Teorema de Heine-Borel) que afirma que: "Si un conjunto cerrado (y acotado) de puntos de una línea puede recubrirse mediante un conjunto de intervalos tales que cada punto del conjunto sea un punto interior de al menos uno de dichos intervalos, entonces existe un número finito de intervalos con esta propiedad de recubrimiento" (e.d., existe un subrecubrimiento finito). Este teorema había sido ya anteriormente enunciado por Heine en 1872, aunque en términos diferentes, y permaneció prácticamente en el olvido hasta volver a ser enunciado por Borel.

Por otra parte, la aparición frecuente de series divergentes en la teoría de las funciones analíticas, llevó a Borel a estudiar en sus trabajos "Fundamentos de la teoría de las series divergentes sumables" (J. de Mathématique, 2 (1986), 103-122), "Memoria sobre las series divergentes" (Ann. de l'Ecole Normale, 16 (1899), 9-131) y "Lecciones sobre las series divergentes" (París, 1901), diversos procesos de sumación de estas series de forma que tuviesen sentido las distintas operaciones y relaciones en que aparecen involucradas estas series. Entre estos procesos destaca la sumabilidad exponencial, que es lineal y generaliza la suma usual de las series convergentes. De esta forma, define la suma generalizada de una serie $\sum_n a_n$ como

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \sum_n \frac{x^n}{n!} S_n ,$$

donde S_n denota la suma parcial n-ésima de la serie inicial, o también como

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\sum_n \frac{a_n x^n}{n!}\right)dx,$$

si el límite y la integral anteriores existen. Estos dos métodos de sumación son equivalentes bajo ciertas condiciones, como puede verse por ejemplo en el libro "Series divergentes" de G.H. Hardy (Clarendon, 1949).

Si bien es verdad que Cesaro fue el primero en proponer la suma convencional de series divergentes, fue Borel quien amplió la fuerza de estos procedimientos aplicándolos entre otras cuestiones a la prolongación de funciones definidas por series enteras complejas fuera de sus círculos de convergencia. Estos métodos de sumación fueron objeto de interés y estudio para un gran número de matemáticos durante las primeras décadas de este siglo, como Mittag-Leffler, Riesz, Töplitz y Banach, entre otros. Por otra parte, en relación con las series de Taylor, Borel estudia la influencia de la naturaleza aritmética de los coeficientes de una serie entera, en la naturaleza de su suma, estableciendo que una función meromorfa sólo admite una serie de Taylor con coeficientes enteros si se trata de una función racional, debiéndose además a Borel, el primer estudio probabilístico de las series enteras cuyos coeficientes sean números aleatorios independientes.

Destaquemos también el hecho de que Borel fue el primero en dar una demostración ("elemental") del Teorema grande de Picard (1879), sin la utilización de las propiedades de la función modular, en su trabajo "Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières" (Comptes Rendus de la Academia de Ciencias de Paris, 1896), que estableció nuevos métodos y campos en la teoría de las funciones complejas. Borel prueba además que en el caso de funciones regulares en el plano, el Teorema de Picard equivale a que la igualdad $P+Q+R=0$ no se verifique nunca cuando, P, Q y R son funciones enteras desprovistas de ceros. Por otra parte, Borel demuestra que la clase de las funciones monógenas (de Cauchy) es más amplia que la de las funciones analíticas (de Weierstrass) y mediante métodos de variable compleja introduce en 1912 las funciones reales cuasianalíticas que tienen la propiedad de estar determinadas en todo su intervalo de existencia mediante el conocimiento de su valor y el de todas sus derivadas en un punto, incluso si el círculo de convergencia del desarrollo en serie de Taylor de la función tiene radio nulo en dicho punto e incluso en todos ellos. El estudio de estas funciones que ha permitido extender considerablemente la teoría de las funciones analíticas, ha sido continuado por numerosos matemáticos como Denjoy, Carlemam, Mandelbrojt, Kolmogorov, Cartan, etc.

A partir de 1905, Borel se interesa cada vez más por el Cálculo de Probabilidades, en relación con sus investigaciones sobre la teoría de la medida, dando una definición rigurosa de la noción de probabilidad basada en la medida de conjuntos e introduciendo incluso el lenguaje probabilístico en el estudio de la medida de conjuntos. En su trabajo "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques" (Rend. Cir. Mat. Palermo, 1909) introduce la probabilidad de un conjunto numerable de sucesos, llenando así el hueco existente entre la probabilidad tradicional finita y la denominada continua o geométrica. Borel introduce implícitamente la noción de la convergencia casi segura y mientras que tradicionalmente los estudios se limitaban a las propiedades asintóticas de las probabilidades dependientes de un número finito (creciente) de pruebas, Borel consigue determinar los valores exactos de las probabilidades cuya realización depende de un número infinito (numerable) de pruebas, obteniendo la siguiente generalización del clásico Teorema de Bernouilli: "Si $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ es una sucesión de sucesos independientes de probabilidades respectivas $p_1, p_2, p_n, \ldots$, entonces la probabilidad de que una infinidad de estos sucesos se realice es nula si la serie de término general p_n es convergente y 1 si dicha serie es divergente". Mediante el teorema anterior, Borel consigue establecer la primera versión conocida de la "Ley fuerte de los grandes números" (en el contexto de los esquemas de Bernouilli), que afirma que: "dada una sucesión (x_n) de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas que toman (exclusivamente) los valores 0 ó 1 con probabilidad ½, se verifica que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ tiende a ½ con probabilidad uno cuando n tiende a infinito".

En Teoría de Juegos, Borel puede ser considerado uno de los iniciadores de la teoría de juegos de estrategia (o estratégicos) que años más tarde desarrollaría Von Newmann mediante hipótesis próximas a las de Borel, dado que hasta la aparición de la nota de V.E. Zermelo (Proc. Fifth ICM, 1913) y la publicación en los C. Rendus de la Academia de Ciencias de Paris del trabajo de Borel "La teoría del juego y las ecuaciones integrales de núcleo simétrico" (1921) y de sus dos notas (sobre teoría de juegos) de 1924 y 1927 (aparecidas posteriormente también en la revista Econometrica de 1953), el estudio matemático de los juegos de azar se reducía al caso de que cada suceso tuviese una probabilidad determinada sin que la inteligencia del jugador influyese (como por ejemplo, juegos de cara o cruz, de dados, etc.). Borel tiene la audacia de querer establecer una teoría de juegos (estratégicos) en los que la inteligencia del jugador interniviese (como pasa en los juegos de damas o del bridge, por ejemplo), considerando mejores estrategias, estrategias mixtas, juegos simétricos y juegos infinitos, planteándose además su aplicación a cuestiones de Defensa y Economía. Entre otros resultados, Borel probó el teorema del minimax primeramente para tres estrategias y después para cinco, conjeturando en 1927 (un año antes de que Von Newmann probase el teorema general) su validez también para siete estrategias, en una nota aparecida en los C. Rendus, en la que manifiesta además el interés que tendría probar el teorema en el caso general.

A partir de 1906, Borel se interesa cada vez más por la Física Matemática, estudiando entre otras, cuestiones de la teoría cinética de los gases, dando una demostración probabilística de la Ley de Maxwell, basada en la teoría molecular de los gases.

Además, Borel dedicó más de cincuenta artículos a la filosofía y la historia de la ciencia, la psicología, la pedagogía y la economía política. Ferviente defensor de la concepción intuicionista de las matemáticas, insistió siempre en la necesidad de no perder de vista la realidad y la aplicabilidad de las mismas, llegando a afirmar que "las matemáticas no son un juego puramente abstracto del espíritu, sino que por el contrario están en estrecha conexión con la realidad concreta". Quizás esta sea la razón por la que Borel prefiere las definiciones constructivas a las descriptivas, ya que aquellas permiten pasar más fácilmente de la teoría a la práctica permitiendo además asegurar la existencia y la unicidad, en su caso, del elemento del que se habla. En particular, Borel experimentó una gran preocupación por la existencia de los entes matemáticos objeto de sus razonamientos, insistiendo mucho en las nociones de elementos "calculables" y de elementos "efectivamente definidos" (es decir, definidos mediante un número finito de palabras), comentando en su libro "Los números inaccesibles" (1952), que la mayor parte de los números reales deben ser "inaccesibles", ya que con un alfabeto finito podemos solamente nombrar a lo sumo una cantidad numerable de ellos.

Las ideas de Borel inauguran una nueva era en varias áreas de la Matemática, y en particular en el Análisis Matemático ya que sus trabajos junto con los de René Baire, que comentaremos posteriormente, son el punto de partida de numerosas investigaciones sobre la clasificación de los conjuntos y las funciones desde un punto de vista topológico, además de introducir nuevos métodos y abrir nuevos campos en la teoría de las funciones de variable compleja y de servir de base para la generalización de la integral llevada a cabo por Henri Lebesgue, de la que el propio Borel comenta en sus "Lecciones sobre la teoría de funciones" (1928) que: "Es conocida la extensión que el Sr. Lebesgue ha dado de mi definiciónn y la rica cosecha de resultados que se han obtenido a partir de ella ... . Sería feliz si esta nota VI pudiera servir, para muchos lectores, de introducción a las bellas investigaciones del Sr. Lebesgue, cuya importancia capital se comprende mejor cada día, y de las que las consecuencias que de ellas se pueden sacar está aún muy lejos de ser agotadas ...".

Terminamos esta breve nota sobre la obra de Emile Borel, con la selección de algunas de sus obras: "Sur quelques points de la théorie des fonctions" (Ann. de l'Ecole Normale, 12 (1895), 9-55), "Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières" (Comptes Rendus Acad. Sc., Paris, 122 (1896), 1045-1048), "Fondements de la théorie des séries divergentes sommables" (J. de Math., 2 (1896), 103-122), "Sur les zéros des fonctions entières (Acta Math., 20 (1897), 357-396), "Leçons sur la théorie des fonctions" (Paris, 1898), "Mémoire sur les séries divergentes" (Ann. de l'Ecole Normale, 16 (1899), 9-131), "Leçons sur les fonctions entières" (Paris, 1900), "Leçons sur les séries divergentes" (Paris, 1901), "Leçons sur les fonctions de variables réeles et les dévelopements en séries de polynomes" (Paris, 1905), "Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques" (Rend. Cir. Mat. Palermo, 27 (1909), 247-270), "Le hasard" (Paris, 1914), "I. Aggregates of zero measure. II Monogenic uniform non-analytic functions" (Rice Institute Pamphlet, 1 (1917), 1-52), "Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe" (Paris, 1917), "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique" (C.R. Acad. Sc. Paris, 173 (1921), 1302-1308), "Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions" (Paris, 1922), "La politique républicaine" (Paris, 1924), "Principes et formules classiques du calcul de probabilitées" (Paris, 1925), "Valeur pratique et philosophique des probabilités" (Paris, 1939), "Théorie mathématique du bridge à la portée de tous" (Paris, 1940, en colaboración con A. Cheron), "Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes" (Paris, 1941), "Sur l'emploi du théorème de Bernouilli pour faciliter le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème de l'attente à un quichet" (C.R. Acad. Sc. Paris, 214 (1942), 425-456). "Les probabilités et la vie" (Paris, 1943), "Les paradoxes de l'infini" (Paris, 1946). "Eléments de la thórie des ensembles" (Paris, 1949), "Les nombres inaccesibles" (Paris, 1952), etc. .

Réné Baire (1874-1932)

Réné Louis Baire nace en París el 21 de Enero de 1874, en el seno de una modesta familia de artesanos. Estudió primeramente en los liceos Lakanal (1886-1890) y Henri IV (1891) de París, hasta que en 1892 ingresa en la Escuela Normal Superior y en la Escuela Politécnica, eligiendo al igual que su amigo Borel, proseguir sus estudios en la Escuela Normal Superior. Al realizar en 1895 el examen para conseguir la "Agrégation" en Matemáticas (lo que equivale a una reválida de carrera) observa que la definición de continuidad que había aprendido era muy artificiosa y sin demasiadas referencias a la definición de función, lo que le lleva a interesarse por la idea general de función y la continuidad de las funciones. Posteriormente consigue una beca para estudiar en Milán con Vito Volterra, lo que influiría decisivamente en la orientación de sus investigaciones en teoría de funciones. El 24 de Marzo de 1899, Baire presenta su tesis doctoral "Sobre las funciones de variables reales" (realizada en Milán) ante un tribunal del que formaban parte Appel, Darboux y Picard.

Comenzó su carrera docente enseñando en los liceos de Troyes, Bar-le-Duc y Nancy hasta que en 1902 obtiene una plaza en la Universidad de Montpellier. En esta época escribe su trabajo "Teoría de los números irracionales, de los límites y de la continuidad" y en 1904, becado por la Fundación Peccot, dicta un curso de un semstre en el Collège de France sobre funciones discontinuas que recopila su discípulo A. Denjoy y se publica, en la colección de monografías sobre Teoría de Funciones que dirigía Borel, en el año 1905 bajo el título de "Leçons sur la théorie des fonctions discontinues".

En 1905 empeora su estado de salud, ya de por sí bastante delicado, y se traslada a Dijon, en cuya Facultad de Ciencias sustituye a Mèray en la Cátedra de Análisis. En 1906 aparece publicado en Acta Mathematica su artículo "Sobre la representación de las funciones discontinuas" y en 1914, debido al pregresivo deterioro de su salud, decide pedir la excedencia y trasladarse a Alésia y posteriormente a Lausanne, donde le sorprende el estallido de la Primera Guerra Mundial. Al finalizar la guerra es nombrado Miembro de la Legión de Honor y posteriormente Académico Correspondiente de la Academia de Ciencias de París (1922), falleciendo en Chambéry el 5 de Julio de 1932 a la edad de cincuenta y ocho años.

En su tesis doctoral "Sobre las funciones de variables reales" (1899), Baire se plantea la determinación de aquellas funciones que son límite puntual de una sucesión de funciones continuas, denominando funciones de clase cero a las funciones continuas, funciones de clase uno a aquellas funciones que no siendo de clase cero son límite puntual de funciones de clase cero, funciones de clase dos a las que no siendo de ninguna de las clases anteriores (cero y uno) son límite puntual de una sucesión de funciones de dichas clases y así sucesivamente. En general, mediante inducción transfinita, se denominan funciones de clase α (C_α), para cualquier ordinal α de primera o segunda clase, a las funciones que no pertenecen a ninguna de las clases precedentes y que son límite puntual de una sucesión de funciones pertenecientes a la unión de las clases precedentes.

A las funciones pertenecientes a la unión de las clases C_α cuando α recorre todos los números ordinales, de primera y segunda clase, se les denomina actualmente funciones de Baire y constituyen la menor clase de funciones que contiene a las funciones continuas y es cerrada para la convergencia puntual. Por otra parte, cualquier combinación lineal, producto y cociente (supuesto lógicamente que la función denominador no se anula) de funciones de clase no mayor que α es a su vez otra función de clase no mayor que α, y toda función que sea límite uniforme de una sucesión de funciones de clase no mayor que α es también de clase no mayor que α. Además, la clase de las funciones de Baire coincide con la de las funciones medibles Borel, y por tanto, son medibles Lebesgue, siendo además toda función medible Lebesgue equivalente a una función de Baire de clase no mayor que dos.

En su tesis doctoral, Baire hace un detallado estudio de las funciones de clase uno definidas en la recta real, extendiendo su estudio también a funciones de varias variables reales, para lo que considera funciones continuas respecto a cada una de las variables. Entre otras cuestiones, Baire caracteriza las funciones de clase uno como aquellas que son puntualmente discontinuas sobre cada cada conjunto perfecto y estudia los subconjuntos densos y diseminados ("densos en ninguna parte") de los conjuntos perfectos e introduce los conjuntos de primera categoría (que son aquellos que son unión de una familia numerable de conjuntos diseminados) y los de segunda categoría (que son aquellos que no son de primera categoría), probando que el conjunto de los puntos de discontinuidad de la restricción de cualquier función de clase uno sobre un conjunto perfecto, es de primera categoría, propiedad mediante la que también caracteriza a las funciones de clase uno. Además Baire prueba que toda función B-medible es continua salvo un conjunto de primera categoría y que una función es representable por polinomios si y sólo si es de clase cero o uno y que en general es de clase n si y sólo si es representable por una serie múltiple de orden n cuyos términos son todos polinomios.

El propio Baire formuló ejemplos concretos de funciones hasta de clase tres, Keldych obtuvo funciones de cualquier clase finita, Borel demuestra la existencia de funciones de clase cualquiera en sus "Lecciones sobre las funciones reales" (1928) y Lusin obtiene en 1930 la caracterización de las funciones de clase α, para cualquier ordinal α.

Entre sus aportaciones a la Topología destaquemos el hecho de que en la tesis de Baire aparecen (creemos que por primera vez) el concepto y la denominación de "conjunto abierto", definiendo las esferas abiertas y los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ tal y como se hace actualmente en los espacios métricos. Unos años más tarde Lebesgue afirma en su tesis doctoral (1902), sin mencionar a Baire, que "Se puede incluso decir que la medida exterior de E es la medida del conjunto de sus puntos interiores, conjunto éste que "es abierto", es decir no contiene ningún punto de su frontera, y tiene por complementario un conjunto cerrado y por consiguiente medible (B)", afirmando en una nota a pie de página que "Todos los puntos de un conjunto de esta forma son interiores al conjunto".

En la recopilación de sus "Lecciones sobre las funciones discontinuas" impartidas en el Collège de France (1905), aparece el teorema que hoy lleva su nombre y que afirma "que la intersección de cualquier familia numerable de subconjuntos abiertos y densos de un espacio métrico completo, es densa en dicho espacio". El teorema anterior puede enunciarse también diciendo que "el complementario de cualquier subconjunto de primera categoría de un espacio métrico completo, es denso en dicho espacio".

Al desarrollar en sus famosas Lecciones los conceptos de las funciones semicontinuas (superior e inferiormente), Baire se plantea el hecho de prescindir de la intuición y emplear un razonamiento abstracto, llegando a afirmar que "en general, en el marco de las ideas que aquí nos conciernen, cada problema planteado en teoría de funciones nos lleva a ciertas cuestiones de la teoría de conjuntos, y en la medida en que estas últimas sean resueltas o capaces de resolverse, será posible resolver el problema de partida más o menos completamente". En esta línea, Baire caracteriza a las funciones (reales de variable real) semicontinuas superiormente (respectivamente, inferiormente) como aquellas funciones f para las que el conjunto de los puntos x tales que $f(x) \geq r$ (respectivamente, $f(x) \leq r$) es un conjunto cerrado, de donde se sigue que estas funciones son de clase uno.

En sus Lecciones leemos también que «desde el punto de vista de los conjuntos derivados que nos interesa aquí, se puede decir que si α es un número de primer tipo, entonces P^{α} es el conjunto derivado del $P^{\alpha-1}$ y que si α es de segundo tipo, P^{α} es por definición el conjunto de los elementos pertenecientes a $P^{\alpha'}$ para cualquier α' menor que α. Independientemente de cualquier consideración abstracta proveniente del simbolismo de Cantor, P^{α} representa un objeto completamente determinado. Nada más que un lenguaje conveniente se contiene en el uso que estaremos haciendo del término "número transfinito" » . La profusa utilización del concepto de número transfinito en los trabajos de Baire (de la que parece que Borel no era muy partidario) inaugura una nueva época en la metodología de la investigación matemática.

Después de que Cantor probara la posibilidad que existe de establecer una correspondencia unívoca entre los puntos de dos espacios cualesquiera, Weierstrass plantea a Luroth el interés de demostrar la imposibilidad de establecer una correspondencia a la vez continua y unívoca, en los dos sentidos, entre los puntos de dos espacios de dimensiones *m* y *p*, diferentes. Luroth probó el resultado anterior para $p = 1$ ó 3 y $m = 2$ ó 4.

En Junio de 1910, el matemático alemán L.E.J. Brower (1881-1966) presenta para su publicación en el Mathematische Annalen, su artículo "Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl" (aparecido en 1911) en el que se da la demostración del teorema general que conocemos como de la invarianza (del número) de la dimensión. En el verano de 1910, mientras veraneaba en el pequeño pueblo de Merlemont, próximo a Beauvais, Lebesgue conoce a través del entonces editor del Mathematische Annalen, Otto Blumenthal (1876-1944), el resultado de Brower y en su carta del 10 de Octubre de 1910, escribe a Blumenthal una sencilla demostración de ese teorema basada en el siguiente teorema (de recubrimiento): "Si cada punto de un dominio en n-dimensiones pertenece por lo menos a uno de un número finito de conjuntos cerrados $E_1,...,E_p$, y si estos conjuntos son suficientemente pequeños, entonces hay puntos comunes por lo menos a $n+1$ de estos conjuntos". En esa carta Lebesgue añade que" ... se podría presentar la demostración precedente de manera menos artificial, pero he buscado ante todo ser breve, ya que un método de demostración natural... ha sido indicado por R. Baire (1907). Sin duda el Sr. Baire no ha desarrollado su demostración pero me parece que si se tienen en cuenta las indicaciones dadas por el Sr. Baire, no faltan más que cuestiones de detalle poco importantes".

Por su parte, Blumenthal afirma en su carta a Hilbert, de fecha 27 de Octubre de 1910, que "Él (refiriéndose a Lebesgue) está muy interesado y me dijo que tiempo atrás había dado no una sino varias demostraciones del teorema de la invarianza que Brower había probado en el Annalen. Me ha enviado una de esas demostraciones para publicarla en Annalen, una que parece muy clara...". Señalemos que efectivamente, la demostración de Lebesgue es sencilla y clara, aunque tiene ciertas lagunas (como el propio Brower puso de manifiesto) que fueron subsanadas por él mismo en posteriores trabajos. Por su parte la demostración dada por Brower es elegante aunque ciertamente no tan sencilla.

¡La polémica entre Baire, Brower y Lebesgue estaba servida!, entre otras cuestiones por el carácter intuitivo de las ideas de Lebesgue, como puede verse en sus artículos "Sur la non-applicabilité de deux domaines apartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions" (Math. Annalen, 70 (1911), 166-168), "Sur la non-applicabilité de deux espaces d'un nombre different de dimensions" (C.R. Soc. Math. de France, 39 (1911), 20), "Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées" (C.R. Acad. Sc. Paris, 152 (1911), 841-843), "Sur les correspondences entre les points de deux espaces" (Fund. Math., 2 (1921), 256-285) y "Sur le théorème de Schoenflies" (Fund. Math., 6 (1924), 96-99).

En una nota presentada a la Academia de Ciencias de París en su sesión del 11 de Febrero de 1907 ("Sur la non-applicabilité de deux continues à n et $n+p$ dimensions", C. Rendus Acad. Sc. Paris, 144 (1907), 318-321), Baire expone en grandes líneas un método para demostrar la invarianza de la dimensión que posteriormente detallaría en un trabajo más extenso aparecido en el tomo 31 (1907) del Bulletin des Sciences Mathématiques. Se trata de un método directo, basado en el dominio de invariancia y en los teoremas de separación de Jordan para n dimensiones, de los que uno de ellos, básico en la demostración, queda sin probar, por lo que el desarrollo resulta incompleto. En concreto Baire deduce la invariancia de la dimensión de los espacios euclídeos (que él denota por G_i) de los siguientes teoremas:

Teorema I. No puede haber aplicación entre dos conjuntos cerrados E de G_n y F de $G_{n+p} (p \geq 1)$, si F contiene todos los puntos de un dominio esférico de $n+p$ dimensiones.

(Entendiendo en el teorema anterior "aplicación" como homeomorfismo).

Siguiendo un método similar al usado por Jürgens (1879) y Schoenflies (1899), Baire deduce el Teorema I del siguiente teorema sobre la invariancia del dominio:

Teorema II. Sean en G_n los conjuntos P y Π aplicables el uno sobre el otro (e.d. homeomorfos en terminología actual), siendo P un dominio esférico, entonces todo punto de P no frontera para P (e.d., interior) tiene por imagen un punto no frontera para Π.

La demostración que Baire da del Teorema II se basa en una generalización del teorema de la curva de Jordan, denominado Teorema de separación de Jordan n-dimensional, que Baire enunció como sigue:

Teorema III. Sea Σ una superficie cerrada simple de $G_n (n \geq 2)$:

1. Σ tiene un interior I y un exterior E. Cada punto de I (respectivamente, de E) es el centro de un dominio esférico cuyos puntos pertenecen a I (respectivamente a E).
2. La distancia entre dos puntos cualesquiera de I es menor que el supremo de las distancias entre los pares de puntos de Σ.
3. Todo camino continuo que va de un punto de I a un punto de E, contiene al menos un punto de Σ.
4. Si una superficie cerrada simple Σ varía de manera continua en función de un parámetro t que toma todos los valores de un intervalo (a,b), entonces un punto fijo M de G_n que no está en Σ para ningún valor de t, está constantemente en el interior de Σ o constantemente en el exterior.

Baire prueba claramente en su trabajo de 1907, cómo de su Teorema III (de separación de Jordan n-dimensional) se deduce su Teorema II (De invarianza del dominio n-dimensional) y cómo de éste se deduce su Teorema I (de la invarianza de la dimensión), pero no dió nunca una demostración de su Teorema III, que prometió dar en un trabajo futuro. En esa época (1907) Baire sufrió un gran deterioro de su delicada salud, por lo que quizás nunca llegó a dar dicha demostración, que él pensaba que se podía obtener siguiendo las líneas de la demostración del Teorema de la curva de Jordan (en el plano), según afirma en sus cartas a Fréchet y Brower.

Fréchet trató de probar el Teorema III (de Baire), como lo prueban las cartas de Baire a Fréchet del 1 de Junio y del 2 de Julio de 1909, pero Fréchet tampoco publicó nunca una demostración de este teorema, manifestando en su artículo "Les dimensions d'un ensemble abstrait" (Mathematische Annalen, 68 (1910), 145-168), que en aquella época no estaba en situación de continuar la línea de pensamiento de Baire.

A Baire se debe además otra importantísima contribución a la teoría de la dimensión. En su trabajo "Sobre la representación de las funciones discontinuas. Segunda parte" (Acta Math., 32 (1909), 97-176) escrito entre 1904 y 1906, introduce el espacio de las sucesiones de números enteros positivos, que denomina "espacio de dimensión 0", y definiendo una noción de "elemento límite", consigue dotar al espacio de una estructura topológica. Según él, "una sucesión de elementos del espacio (de dimensión 0) $A_1 = [(a_1),(a_2)_1,\ldots,(a_n)_1,\ldots],\ldots, A_\nu = [(a_1)_\nu,(a_2)_\nu,\ldots,(a_n)_\nu \ ,\ldots],\ldots,$ tiene al elemento $A_0 = [(a_1)_0,(a_2)_0,\ldots,(a_n)_0,\ldots]$ como elemento límite, si para cada n existe un entero h tal que para $\nu > h$ se tiene que $(a_i)_\nu = (a_i)_0$ para $i = 1,2,\ldots n$". Nótese que Fréchet introdujo los espacios métricos (que él denominó (E) clases) en su tesis doctoral (1906).

Baire prueba que este espacio de dimensión cero es homeomorfo (él emplea el término "aplicable") al conjunto de los números irracionales (como subespacio topológico de los reales) y que además el espacio de dimensión cero es homeomorfo al conjunto de todos los puntos de coordenadas irracionales de un espacio euclídeo n-dimensional para cualquier n (considerando implícitamente la topología inducida por $\mathbb{R}^n$). También probó que el discontinuo de Cantor es homeomorfo a un subconjunto del espacio de dimensión 0 dándose perfecta cuenta de la profunda relación existente entre los espacios euclídeos n-dimensionales y el espacio de dimensión 0, lo que le llevó a denotarlo por G_0 (recordemos que como ya se ha señalado anteriormente, denotaba por G_n a dichos espacios euclídeos), reconociendo (en terminología actual) que poseían propiedades topológicas comunes y la diferencia existente relativa a la conexión.

La introducción del espacio de dimensión cero por Baire vino motivada por sus investigaciones sobre el dominio de las funciones discontinuas, aunque su posterior desarrollo efectuado por Urysohn y Menger, tuviese un papel importantísimo en la teoría de la dimensión.

La investigación matemática de Baire, a la que por motivos de salud tan sólo pudo dedicar unos pocos periodos de tiempo, distribuidos a lo largo de una docena de años, se encuentra recogida básicamente en las siguientes obras: "Sur la théorie analytique de la chaleur" (Paris, 1895), "Sur les fonctions de variables réelles" (Faculté des Sc., Paris, t. 977, 1899), "Sur les séries à termes continus et tous du même signe" (Bull. Soc. Math. France, 32 (1904), 125-128), "Leçons sur la théorie des fonctions discontinues" (Paris, 1905), "Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité" (Paris, 1905), "Sur la représentation des fonctions discontinues" (Acta Math., 30 (1906), 1-48 y 32 (1909) 97-176), "Sur la non-applicabilité de deux continues à n et $n+p$ dimensions" (Bull. Sc. Math., 31 (1907), 94-99), "Leçons sur les théories générales de l'analyse" (Paris 1907) y "Origine de la notion de semi-continuité" (Bull. Soc. Math. de France, 55 (1927), 141-142).

Henri Lebesgue (1875-1941)

Henri León Lebesgue nace en Beauvais (Francia) el 28 de Junio de 1875, en el seno de una familia modesta, siendo su padre (que murió muy joven) tipógrafo de profesión. Desde 1894 a 1897 estudia en la Escuela Normal Superior (de Paris) donde al terminar sus estudios permanece dos años más trabajando en la Biblioteca. En 1899 comienza a enseñar en el Liceo Central de Nancy, donde permanece hasta 1902, mientras prepara su tesis doctoral.

En el año 1902 presenta su trascendental tesis doctoral "Integral, longitud y área" en la Sorbona, y comienza su carrera docente universitaria en las universidades de Rennes (1902-1906) y Poitiers (1906-1910). En 1910 obtiene una plaza de "Maître de Conférences" de Análisis Matemático en la Sorbona, que ocupa hasta obtener en 1919 la Cátedra de Geometría Aplicada al Análisis de dicha universidad. En 1921 es nombrado catedrático del Colegio de Francia ingresando al año siguiente (1922) en la Academia de Ciencias (de París) y en numerosas academias extranjeras. Además, por su labor como matemático, Lebesgue recibió importantes premios como el Haullevigne (1912), el Poncelet (1914), el Saintour (1917) y el Petit d'Ormay (1919), entre otros. El 26 de Julio de 1941 muere en París, en plena ocupación alemana, durante la Segunda Guerra Mundial.

En sus primeros artículos aparecidos en los Comptes Rendus de la Academia de Ciencias de París durante los años 1899-1901, Lebesgue trata el problema de la medida de "superficies" del plano acotadas por curvas simples, proponiendo el problema de "asociar a cada superficie un número llamado área, de forma que dos superficies iguales tengan áreas iguales y que una superficie formada por la unión de un número finito o infinito de superficies que teniendo porciones de frontera comunes, no se solapan entre sí, tenga por área la suma de las áreas de sus superficies componentes...". Aparentemente, Lebesgue acepta ya en esta época el punto de vista de Borel sobre la aditividad numerable de las medidas, notándose además una clara influencia de Borel y Drach, en cuanto al método postulacional empleado, y de Hadamard, quien había propuesto ya en 1898 un problema análogo, referido a las áreas de polígonos, aunque considerando sólo la aditividad finita. Lebesgue observa que el interior de una región D, acotada por una curva simple cerrada, se puede expresar como unión numerable de polígonos que no se solapan. Así, mediante el postulado de la aditividad numerable, define el contenido interior $c_i(D)$ siguiendo las ideas de Jordan. Posteriormente, extiende sus resultados al caso tridimensional mediante la definición de una integral de superficie basada en su definición de área de "superficies" en el plano. Estos artículos, que fueron presentados en los Comptes Rendus por Picard, fueron recibidos con ciertas reticencias por algunos matemáticos de la época, como por ejemplo Hermite, quien en una carta a Stieltjes fechada en 1905, escribe "estoy horrorizado por esta lamentable plaga de funciones que no tienen derivada", lo que muestra claramente el gran giro y las nuevas tendencias que surgieron en las Matemáticas a comienzos de este siglo.

En su tesis doctoral (que recoge las ideas contenidas en los cinco artículos anteriormente mencionados), Lebesgue comienza por precisar y desarrollar las ideas de Borel sobre las medidas, planteándose la definición de una medida no negativa y no idénticamente nula, definida en los subconjuntos acotados de la recta real, de manera que fuese contablemente aditiva e invariante por traslaciones. Para ello, a similitud del método de Peano-Jordan, define la medida exterior $m_e(A)$ de un subconjunto $A \subset \mathbf{R}$ como el ínfimo de las sumas $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n)$, donde el ínfimo se toma sobre todas las familias numerables de intervalos $\{I_n\}$ que recubren el conjunto (e.d. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \supset A$) y $l(I_n)$ denota la longitud del intervalo I_n. Posteriormente, Lebesgue define la medida interior $m_i(A)$ de un subconjunto acotado $A \subset \mathbf{R}$ como la diferencia entre la longitud $l(I)$ de un intervalo (cualquieraa) *I*, que contenga al conjunto *A*, y la medida exterior de *I-A* (e.d. $m_i(A) = l(I) - m_e(I - A))$, y la medida interior de un subconjunto cualquiera A de $\mathbf{R}$ como el supremo de las medidas interiores de los subconjuntos acotados de A.

A partir de los conceptos anteriores, Lebesgue define los conjuntos medibles como aquellos subconjuntos de la recta real cuyas medidas interior y exterior coinciden y son finitas, definiendo la medida de un conjunto medible como el valor común de sus medidas interior y exterior (e.d. $m(A) = m_i(A) = m_e(A))$. La noción de medibilidad la extiende al caso de conjuntos de medida exterior infinita considerando que en este caso un conjunto es medible cuando lo es su intersección con cada intervalo acotado (en el sentido anterior). Lebesgue prueba que la unión numerable de conjuntos medibles es medible y que la medida que define es contablemente aditiva e invariante por traslaciones. Además, partiendo de que $c_i(A) \le m_i(A) \le m_e(A) \le c_e(A)$, donde $c_i(A)$ y $c_e(A)$ son respectivamente los contenidos interior y exterior del conjunto *A*, prueba que la clase de los conjuntos medibles que él define, contiene a la de los medibles según Jordan y que en esta última su medida coincide con la de Jordan. Lebesgue prueba también que lo mismo sucede con la clase de los conjuntos de Borel, verificándose además que un conjunto A es medible (Lebesgue) si y sólo si existen dos conjuntos de Borel B_1, B_2 tales que tienen igual medida y $B_1 \subset A \subset B_2$ (y, por tanto, $m(B_1 - B_2) = 0$, $m(B_1) = m(A) = m(B_2)$). Por otra parte, Lebesgue probó algo que Borel parece no haber sospechado, la existencia de conjuntos no medibles, como por ejemplo aquellos cuya medida interior es nula y su medida exterior vale uno.

La tradicional concepción de la integral definida $\int_a^b f(t)\,dt$ de una función acotada y positiva *f*, como el área limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, insinuaba una extensión inmediata de la integral de Riemann a todas aquellas funciones para las que la medida del conjunto precedente estuviese definida. Así, en el segundo capítulo de su tesis, Lebesgue define para aquellas funciones acotadas $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ tales que su recinto de ordenadas E_f sea medible, la integral de la función f en $[a,b]$ como $m(E_f^+) - m(E_f^-)$ (e.d. $\int_a^b f(t)\,dt = m(E_f^+) - m(E_f^-))$, donde E_f^+ y E_f^- representan respectivamente los recintos de ordenadas positivas y negativas de la función *f* (y cuya medibilidad resulta de la de E_f).

Más adelante, también en su tesis doctoral, Lebesgue da una definición más analítica de la integral, siguiendo la idea de las sumas de Riemann pero considerando particiones medibles en la imagen de la función en vez de en el intervalo de la definición. Así, si $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ es una función acotada y $C_1 \le f \le C_2$, para cada partición $P \equiv \{C_1 = a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_n = C_2\}$ del intervalo $[C_1, C_2]$, Lebesgue considera los conjuntos $E_i = \{x \in [a,b]: a_i \le f(x) \le a_{i+1}\}$ y las sumas $\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(E_i)$ y $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\, m(E_i)$, en el caso de que los conjuntos E_i sean medibles. Como

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\, m(E_i) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, m(E_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, m(E_i) \le \|P\|\,(b-a),$$

resulta que los límites de dichas sumas cuando el diámetro de la partición tiende a cero, existen y coinciden, definiendo la integral como dicho límite común:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, m(E_i) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\, m(E_i)$$

Partiendo del hecho de que para todo conjunto medible E existen dos conjuntos de Borel B_1 y B_2 tales que $B_1 \subset E \subset B_2$ y sus medidas coinciden, y de que la intersección de un subconjunto medible Borel con una recta paralela a cualquiera de los ejes de coordenadas, es un conjunto medible Borel, Lebesgue prueba que del hecho de que el recinto de ordenadas E_f de la función f sea medible, se deduce la medibilidad del conjunto de los puntos en los que el valor de la función es mayor que un número real cualquiera, de donde se sigue la medibilidad de los conjuntos E_i. Esto le lleva a definir las funciones medibles, que primeramente denominó "sumables", como aquellas funciones (acotadas o no) tales que el conjunto de los puntos x tales que $c < f(x) < d$ es medible, para cualesquiera que sean los números reales c y d. Resultando por tanto que toda función medible y acotada es integrable. Por otra parte, la definición (de la integral) anterior permite introducir inmediatamente la integral sobre conjuntos medibles arbitrarios y determinar las propiedades de la integral indefinida como función de conjuntos.

Para definir la integral de funciones no acotadas, Lebesgue supone que la función toma valores finitos salvo a lo sumo en un número finito de puntos y considera particiones $P, \ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, de la recta real con diámetro finito, considerando como función integrable a aquellas funciones medibles para las que existe una partición del tipo anterior tal que la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i\, m(E_i)$ sea absolutamente convergente, lo que equivale a que también lo sea la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{i+1}\, m(E_i)$, donde los conjuntos E_i se definen de manera análoga al caso de funciones acotadas. En este caso, define la integral como el límite de las sumas de las series cuando los diámetros de las particiones tienden a cero. Claramente, una función es integrable si lo es su valor absoluto y Lebesgue demuestra además que si una función f es integrable en un intervalo $[a,b]$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto medible $E \subset [a,b]$ tal que

f es acotada en E y la integral de la función $|f|$ en $[a,b]-E$ es menor que ε. Resultado que le permite extender las propiedades de la integral para funciones acotadas a la de funciones no acotadas.

En su tesis, Lebesgue pone ejemplos de funciones no acotadas que no son integrables para su integral, como la función definida en $[0,1]$ que toma el valor $2x \text{ sen}\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$ y cero si $x = 0$, que no es integrable en $[0,1]$ aunque es continua en $[\varepsilon,1]$ para todo $0 < \varepsilon < 1$. En cuanto a la existencia de funciones acotadas no integrables, afirma no conocer "ninguna función acotada que no sea sumable, no sé si existe. Todas las funciones que se pueden definir mediante operaciones aritméticas y paso al límite son sumables. Todas las funciones integrables en el sentido de Riemann son sumables y las dos definiciones de integral conducen al mismo valor...". Esto se debió en gran parte, al hecho de que Lebesgue no consiguiese encontrar ejenmplos de conjuntos no medibles (aunque sí probase su existencia, como ya dijimos). En 1905 Vitali da un ejemplo de un conjunto no medible Lebesgue y que por tanto, su función característica no es integrable Lebesgue.

Destaquemos que la originalidad de Lebesgue no reside en la idea de esta extensión de la integral, ya que en cierto sentido, después de los trabajos de Jordan y Borel, la generalización de Lebesgue era "inevitable", como prueba el hecho de que W.H. Young y G. Vitali, independientemente entre sí y también Lebesgue, introdujeran sendas extensiones de la teoría de la medida de Jordan, definiendo Young una integral esencialmente coincidente con la de Lebesgue. El mérito indiscutible de Lebesgue radica en el reconocimiento de su integral como instrumento capaz de solucionar gran parte de las dificultades que plantea la integral de Riemann y en su descubrimiento del paso al límite (que obtuvo como consecuencia de la aditividad numerable de su medida), que asegura que "si (f_n) es una sucesión de funciones medibles, uniformemente acotadas sobre un conjunto medible E, que converge puntualmente sobre E a una función f, entonces f es integrable y $\int_E f(t)\,dt = \lim_n \int_E f_n(t)\,dt$". Del teorema anterior, que hoy conocemos como "Teorema de la convergencia acotada" resulta inmediatamente la medibilidad (Lebesgue) de las funciones de Baire, cuyos trabajos sobre las funciones que son límite puntual de funciones continuas probablemente influyeron en el establecimiento del resultado anterior por parte de Lebesgue.

En 1902, Lebesgue es elegido para impartir el curso Peccot en el Colegio de Francia durante los cursos 1902-1903 y 1904-1905, época en la que cerró diversas cuestiones que habían quedado abiertas en su tesis doctoral. Sus conferencias en estos cursos aparecieron publicadas en sus monografías "Leçons sur líntégration et la recherche des fonctions primitives" (Paris, 1904) y "Leçons sur les séries trogonométriques" (Paris, 1906), que contribuyeron grandemente a la difusión de sus ideas. En la primera de ellas Lebesgue plantea, en la línea de Borel y Drach, "el problema de la integración" como el problema de asignar a cada función acotada

$f:[a,b]\to \mathbf{R}$ un número real $\int_a^b f$ de forma que se verifiquen las siguientes condiciones:

$$1)\ \int_a^b f(t)\,dt = \int_{a+h}^{b+h} f(t-h)\,dt, \qquad 2)\ \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$$

$$3)\ \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad 4)\ \int_a^b f \geq 0 \text{ si } f \geq 0 \text{ y } b > a$$

$$5)\ \int_0^1 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad 6)\ \lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f,$$

si la sucesión (f_n) es monótona creciente y converge puntualmente a f.

Como de las condiciones anteriores se deduce que si $E \subset [a,b]$ es un conjunto medible entonces necesariamente $\int \chi_E = m(E)$, con las notaciones de la definición (analítica) de integral dada por Lebesgue (anteriormente mencionada), resulta que

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(E_i) \quad \text{y} \quad \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(E_i)$$

y por ser

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i\, m(E_i) \leq \int_a^b f \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(E_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) m(E_i) \leq \|P\|(b-a),$$

de 4) resulta inmediatamente que el único valor posible de $\int_a^b f$ es la integral (de Lebesgue) de la función (medible) f en $[a,b]$, teniendo por tanto el problema de la integración una única solución para las funciones integrables.

Por otra parte, Lebesgue prueba en relación con la integral de Riemann, que una función acotada es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de sus discintonuidades tiene medida nula, lo que le permite probar que la clase de las funciones integrables, introducida por él, es estrictamente más amplia que la de las funciones Riemann integrables, mediante ejemplos como el siguiente: "Sean f y g dos funciones continuas definidas en un intervalo $[a,b]$, tales que g no se anula nunca, y S un subconjunto denso de $[a,b]$ de medida nula. Si se considera la función F en $[a,b]$ de forma que F coincida con f en S y f sea igual a $f+g$ en $[a,b]-S$, entonces la función F no es integrable Riemann, por ser discontinua en casi todo punto". En particular, del resultado anterior se deduce que la función (característica del conjunto de los números racionales) de Dirichlet (que Baire había probado que era de clase dos) es integrable Lebesgue y su integral vale cero, no siendo integrable Riemann.

Con la generalización de la integral introducida por Riemann se plantea de manera natural la cuestión de saber si la correspondencia clásica entre integral y primitiva, válida para funciones continuas, continuaba siendo válida para funciones más generales. Por una parte, es fácil encontrar ejemplos de funciones Riemann integrables f tales que su integral $\int_a^x f(t)\,dt$ no es derivable en ciertos puntos y por otra Volterra había probado en 1881 que una función podía tener derivada acotada en un intervalo sin que dicha derivada fuese integrable Riemann (en dicho intervalo).

El capítulo segundo de su tesis doctoral lo concluye Lebesgue afirmando que "para que una generalización de la integral sea útil, debe continuar verificando las condiciones básicas de la integral, incluyendo el hecho de que resuelva el problema fundamental del cálculo: encontrar una función conociendo su derivada...". En este sentido, Lebesgue prueba que "si f es una función integrable (Lebesgue) en un intervalo $[a,b]$ entonces la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y su derivada coincide con f en casi todo punto de $[a,b]$" y que recíprocamente, "si una función g es derivable en un intervalo $[a,b]$ y su derivada g' es una función acotada, entonces g' es integrable (Lebesgue) y $\int_a^b g'(dt) = g(b) - g(a)$". Lebesgue probó este segundo resultado aplicando su teorema de paso al límite (anteriormente enunciado), mientras que para demostrar el primero utiliza un procedimiento de gran fertilidad, que empleó en numerosas ocasiones, consistente en probar primeramente el resultado para funciones características de conjuntos medibles y utilizar posteriormente la densidad de las funciones simples para establecer el resultado general.

Si en el resultado anterior no se impone la acotación de la función g' entonces no se puede asegurar en general su integrabilidad, planteándose de manera natural el problea de determinar las funciones continuas cuya derivada existe en casi todo punto y es integrable. Suponiendo que una de las derivadas de Dini es finita, Lebesgue prueba que "si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y una de las cuatro derivadas de Dini Df es finita, entonces esta derivada Df es integrable en $[a,b]$ si y sólo si la función es de variación acotada, y en este caso $\int_a^b Df(t)\;dt = f(b) - f(a)$". Como consecuencia del teorema anterior, Lebesgue demuestra posteriormente que toda función continua de variación acotada, posee derivada finita en casi todo punto. La noción de propiedad "en casi todo punto" (que en cierto modo se corresponde con la frase de Harnack "en general") aparece por primera vez en las "Lecciones sobre la integración y la investigación de las funciones primitivas" de Lebesgue, existiendo ya un precedente en su tesis doctoral, en la que aparece la frase "haciendo abstracción de un conjunto de medida nula".

La construcción por H. Hahn (1905) de dos funciones con igual derivada pero que no difieran en una constante, conduce a Lebesgue a reconsiderar su Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y tratar de extenderlo al caso de derivadas no sumables, para lo que introduce una integral tipo Hölder. Posteriormente, Arnaud y Denjoy darían una tal extensión de dicho teorema.

Tratando de caracterizar las funciones que son integrales indefinidas de funciones integrables, Lebesgue prueba en 1907 que "una función F es absolutamente continua en un intervalo $[a,b]$ si y sólo si existe una función integrable f en $[a,b]$ tal que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in [a,b]$". Este resultado lo había enunciado Lebesgue con anterioridad sin demostración, en una nota a pie de página, debiéndose a Dini la primera demostración del mismo, que es sensiblemente más compleja que la dada por Lebesgue.

Con motivo de la aparición de la teoría de conjuntos (infinitos) y en particular, debido a ciertos contraejemplos como los dados por Ludwing Scheeffer a finales del siglo XIX, se revisan diversas cuestiones relacionadas con el problema de la rectificación de curvas, perdiendo vigor las ideas de Paul du Bois-Reymond, quien había relacionado ya en 1879 esta cuestión con la integración pensando que ésta constituía una herramienta insustituible para el tratamiento de la rectificación y longitud de las curvas. Estas cuestiones interesaron vivamente a Lebesgue, quien aplicando sus descubrimientos en teoría de la integración, estableció la fórmula usual $\left(L = \int_a^b (1+(f')^2)^{1/2}\right)$ de la longitud de un arco de curva para funciones (f) de variación acotada, por medio de una integral, restableciendo la credibilidad en las ideas de du Bois-Reymond acerca de la enorme relación existente entre los conceptos de longitudes de curvas y la integral. Por otra parte, el teorema de Lebesgue anteriormente mencionado acerca de la integral de las derivadas de Dini $\int_a^b Df$ le permitió mejorar sustancialmente los resultados de su tesis sobre la longitud de las curvas llegando a probar que "si C es una curva continua definida por $x = x(t), y = z(t)$ para $a \le t \le b$, y si x, y, z tienen derivadas de Dini acotadas entonces x, y, z son sumables y x', y' y z' existen en casi todo punto y la longitud de C viene dada por $(*)\ \int_a^b [(x')^2 + (y')^2 + (z')^2]^{1/2}$, donde (*) indica la integración sobre todos los puntos t para los que x', y' y z' existen simultaneamente.

En 1910 Lebesgue aborda la extensión de la teoría de la integración a $\mathbf{R}^n$ en su memoria "Sobre la integración de las funciones discontinuas", en la que intentando abstraer las propiedades de la integral de la dimensión asocia a cada función integrable f la función de conjunto $\mu(E) = \int_E f(x)\,dx$, definida sobre la familia de los subconjuntos medibles de $\mathbf{R}^n$, que generaliza el concepto de integral indefinida, poniendo de manifiesto que esta función de conjunto es contablemente aditiva, de variación acotada (en el sentido que posteriormente comentaremos) y absolutamente continua (en el sentido de que $\mu(E)$ tiende a cero al hacerlo la medida del conjunto E). Lebesgue prueba además mediante un teorema de recubrimiento de Vitali (que sustituye a su "cadena de intervalos" de $\mathbf{R}$), que toda función de conjunto con las propiedades anteriores, es una integral indefinida (de una función integrable Lebesgue), resultado del que poco después Radon daría la versión abstracta que conocemos actualmente como teorema de Radon-Nikodym. Como hemos visto, Lebesgue señala que la noción de función de variación acotada se puede generalizar considerando funciones F definidas en la clase de los conjuntos medibles, contablemente aditivas tales que sea finito el supremo de las sumas $\sum_n |F(E_n)|$ cuando (E_n) recorre la familia de las particiones numerables medibles. Todas estas cuestiones preludian claramente la noción general de medida que posteriormente definiría Radon en 1913.

En su tesis doctoral, Lebesgue estudia la relación existente entre las integrables dobles y las integrales iteradas, probando que aunque *f* sea una función sumable sobre un conjunto medible del plano, las funciones $x \to f(x,y)$ e $y \to f(x,y)$ no tienen por qué ser medibles, lo que le lleva a introducir las integrales superior e inferior para estas funciones no necesariamente medibles como el ínfimo (rep. el supremo) de las integrales sobre el conjunto de las funciones sumables mayores (resp. menores) que la función, probando el siguiente teorema de integración reiterada. "Si $f(x,y)$ es acotada y medible en un rectángulo *R* definido por $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$, entonces

$$\int_R f(x,y)dR = \underline{\int}_c^d dy\left[\underline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\right] = \underline{\int}_a^b dy\left[\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dx\right] =$$
$$= \overline{\int}_c^d dy\left[\overline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\right] = \overline{\int}_a^b dy\left[\overline{\int}_c^d f(x,y)\,dx\right]\text{"}$$

Resultado que extiende inmediatamente para funciones acotadas definidas sobre conjuntos medibles *E* contenidos en rectángulos *R*, haciendo $g = f$ en E y $G = 0$ en *R-E*. Lebesgue observó además que si la función *f* del teorema anterior es medible Borel, entonces las funciones $x \to f(x,y)$ e $y \to f(x,y)$ también son medibles Borel y, por tanto, sus integrales superiores e inferiores se convierten en integrales ordinarias (en sentido de Lebesgue). Esta observación junto con su teorema sobre la integración reiterada y la observación de Hobson acerca de la integración de funciones definidas en casi todo punto, sugirió a Fubini en 1907, el teorema sobre la integración reiterada para la integral de Lebesgue, que conocemos hoy como teorema de Fubini.

A partir de 1902 aparecen un gran número de trabajos del propio Lebesgue, de Riesz, Fatou, Ficher y otros, que ponen de manifiesto las numerosas aplicaciones de la integral de Lebesgue en diferentes ramas de las Matemáticas. El mismo Lebesgue aplicó sus descubrimientos en teoría de la medida e integración al estudio de las series de Fourier, lo que no es en absoluto sorprendente dado que el desarrollo de la teoría de la integración, y en concreto de la integral de Riemann, está íntimamente ligado al estudio de las series trigonométricas. En su primer trabajo de 1903 dedicado a estas cuestiones, Lebesgue afirma que "mi objetivo principal ha sido demostrar la utilidad que la noción de integral que introduje en mi tesis, puede tener en el estudio de las funciones discontinuas de variable real". En 1906 aparecen sus "Lecciones sobre las series trigonométricas" en donde estudia entre otras cuestiones relativas a las series trigonométricas, la multiplicación, la integración término a término y la convergencia de dichas series. Lebesgue consigue extender y probar de manera sencilla, el resultado de Paul du Bois-Raymond acerca de que los coeficientes de una serie trigonométrica que representa a una función acotada son efectivamente los coeficientes de Fourier, lo que P. du Bois-Raymond justificó para la integral de Riemann mediante un complicado argumento que le permitiese evitar la integración término a término, y que Fourier había establecido imponiendo la integración término a término de las series, lo que ya a finales del siglo XIX se sabía que no era cierto ni siquiera para series convergentes uniformemente acotadas, ya que la función definida por la suma de la serie puede no ser integrable Riemann. Como las series trigonométricas son límite de sucesiones de funciones continuas son medibles, y si son acotadas entonces son integrables, por lo que Lebesgue al disponer de la integración término a término, pudo obtener el resultado con gran rapidez. Señalemos que un paso decisivo en la determinación de la primitiva y de los coeficientes de Fourier de una función, se conseguiría unos años más tarde con la introducción en 1912 por Denjoy del concepto de "totalización".

En 1905, Lebesgue aplica su teoría de la integral al estudio de las medias aritméticas correspondientes a las sumas parciales de las series de Fourier de una función $\sigma_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_n(f,x)$. La media aritmética había sido introducida por Cesàro en 1890 y fue aplicada al estudio de las series de Fourier por el matemático húngaro Leopold Fejér (1880-1959). Fejér había probado para funciones Riemann integrables que

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{nk}\int_0^{\pi/2} g_x(t)\frac{\operatorname{sen}^2 nt}{\operatorname{sen} t}\,dt,$$

con $g_x(t) = f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)$, y que $\sigma_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$ para todo x que sea un punto de continuidad de f. Lebesgue extiende el resultado de Fejér a funciones sumables probando que $\sigma_n \to f$ en c.t.p. si $F_x'(0) = 0$ c.t.p., siendo $F_x(u) = \int_0^u |g_x(t)|\,dt$.

En 1909, Lebesgue introduce las constantes

$$L_n = \sup\left\{\int_0^{2\pi} |S_n(f,x)|\,dx : f \text{ integrable, periódica de período } 2\pi \text{ y } \int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt \le 1\right\},$$

siendo $S_n(f,x)$ la suma parcial n-ésima de la serie de Fourier de la función f. Mediante estas constantes, que Fejér denominaría "constantes de Lebesgue", Lebesgue obtiene diversos resultados sobre la divergencia de las series de Fourier de ciertas funciones continuas, descubriendo un tipo de singularidad concerniente a las funciones continuas cuya serie converge pero no uniformemente. Mediante el empleo de estas constantes Lebesgue prueba que $\max_x |R_n(f,x)| \le (L_n + 1)E_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$, siendo $R_n(f,x)$ el resto n-ésimo de la serie de Fourier de una función continua y periódica de período 2π, L_n la constante n-ésima de Lebesgue y $E_n(f)$ el error correspondiente a la mejor aproximación uniforme mediante polinomios trigonométricos de grado n. La desigualdad anterior puede extenderse a sistemas ortonormales arbitrarios utilizando unas definiciones adecuadas del concepto de "mejor aproximación" y de las constantes de Lebesgue (que son un caso particular de las funciones de Lebesgue (introducidas también por él) cuando el sistema ortonormal empleado es el sistema trigonométrico).

Dejando aparte otros muchos aspectos de la obra de Lebesgue, como por ejemplo, sus interesantes resultados acerca de la representación analítica de funciones, que no podemos comentar aquí por no alargar excesivamente este trabajo, resaltemos además de la gran influencia de su obra en la evolución de las Matemáticas, su gran vocación docente a la que debemos numerosas exposiciones originales de cuestiones de carácter elemental.

La obra de Lebesgue consta de alrededor de ciento cuarenta artículos en revistas especializadas y numerosas monografías y libros, de los que para terminar, destacamos los siguientes: "Intégrale, longueur, aire" (Ann. Mat. Pura et Applicata, 7 (1902), 231-359), "Leçons sur l'intégration et la récherche des fonctions primitives" (Paris, 1904), "Récherches sur la convergence des séries de Fourier" (Math. Ann., 61 (1905), 251-280), "Leçons sur les séries trigonométriques" (Paris, 1906), "Sur les intégrales singuliéres" (Ann Fac. Sci. Math. et Phys. Univ. Toulouse, 1 (1909), 25-117), "Sur l'intégration des fonctions discontinues" (Ann. Sc. Ecole Normale Supérieur, 27 (1910), 361-450), "Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des spaces à n et $n+p$ dimensions" (Math. Ann., 70 (1911), 166-168), "Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un space et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées" (C.R. Acad. Sci. Paris 152 (1911), 841-843), "Sur les correspondances entre les points de deux espaces" (Fund. Math. 2 (1921), 256-285), "Sur le théorème de Schoenflies" (Fund. Math. 6 (1924), 96-99), etc.

Referencias

[1] BHUL, A. y G. BOULIGAND: *"En mémoire de Réne Baire"*, L'Enseignement Math. 31, números 1 y 3 (1932).

[2] BOMBAL, F.: *"La teoría de la medida: 1875-1925"*. Sem. Historia de la Mat. I, Univ. Complutense, Madrid, 1991, pp. 107-143.

[3] BOREL, E.: *"Selecta"*. Jubilé scientifique de M. Emile Borel. Paris, 1940.

[4] BOREL, E.: *"Notice sur les travaux scientifiques"*. Paris, 1912.

[5] BOREL, E.: *"Documents autobiographiques"*. Organon 1 (1936), 34-42. También *"Allocution"*, Notices et discours de l'Academie des Sci. 2 (1949), 350-359.

[6] BROGLIE, L. de: *"Jubilé scientifique de M. Emile Borel"*. Notices et discours de l'Académie des Sciences, 2 (1949), 324-359.

[7] DALEN, D. van y A.F. MONNA: Sets and integration: an outline of development. Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1972.

[8] FELIX, L.: *"Message d'un mathématicien: Henry Lebesgue"*. Albert Blanchard, Paris, 1974.

[9] FRECHET, M.: *"La vie et l'óeuvre d'Emile Borel"*. Enseignement Mathématique, 11 (1965), 1-95.

[10] HAWKINS, T.: *"Lebesgue's theory of integration"*. Chelsea, New York, 1975.

[11] JIMÉNEZ GUERRA, P.: *"Evolución de la integral en el siglo XIX"*. En Historia de la Matemática en el siglo XIX (2ª parte), R. Acad. Ci., Madrid, 1994, pp. 57-78.

[12] JOHNSON, D.M.: *"The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology"*. Arch. History of Exact Sc. 25 (1981), 85-267.

[13] LOEVE, M.: *"Integration and measure"*. Encyclopedia Britannica, 1965.

[14] MAY, K.O.: *"Biographical sketch of Henri Lebesgue"*, K.O. May, San Francisco, 1966.

[15] PESIN, I.N.: *"Classical and modern integration theories"*. Academic Press, New York, 1970.

[16] SCRIBNER, C.C.: *"Lebesgue"*. Dictionary of scientific biography. New York, 1981.

[17] TARRES, J.: "Historia de la Teoría de la Dimensión". Sem. Historia de la Mat. I, Univ. Complutense, Madrid, 1991, pp. 59-95.