Zariski y la Escuela Italiana

J.M. AROCA HERNÁNDEZ-ROS*

Plus ça change plus c'est la meme chose

Mi propuesta inicial a la Academia fue una conferencia sobre Oscar Zariski, pero el comité organizador del ciclo con muy buen acuerdo, añadió a ella la referencia a la Escuela Italiana. Efectivamente no se puede entender a Zariski sin la escuela italiana, y sin Zariski poco veríamos hoy de esa escuela. Normalmente se piensa en Zariski como la persona que terminó con la geometría clásica italiana, pero no fue él quien acabó con una escuela por la que toda su vida tuvo un enorme respeto y agradecimiento, fue el abuso de los métodos puramente geométricos y de intuición los que la llevaron a un final natural :

¿Que Vd. no lo ve? - Cuenta Andre Weil, que decía Enriques a un estudiante - *¿Qué significa que no lo ve?, yo lo veo tan claramente como a ese perro que esta allí.*

Lamentablemente la visión y la intuición tienen límites, la geometria de los hiperespacios (espacios de dimensión mayor que tres) cuya consolidación fue, paradójicamente, uno de los mayores logros de la escuela italiana, y la geometrización de la teoría de números, que llevó la característica positiva a la geometría algebraica, marcaron esos límites claramente. El propio Castelnuovo lo reconocía a posteriori:

"Los métodos de la geometría italiana habían alcanzado un callejón sin salida y eran inadecuados para progresar más en el campo de la geometría algebraica."

Así, y desde mi punto de vista, Zariski no es fin sino culminación de la escuela italiana, de hecho Zariski fue el último de los grandes geómetras italianos clásicos y el primero de los grandes geómetras modernos, fue además el vehículo por el que la escuela italiana ha llegado a ser de nuevo parte esencial de la geometría algebraica de hoy. En todo caso para Oscar Zariski, las matemáticas eran geometria y la geometría era la vida real.

* Académico Correspondiente. Catedrático de Geometría y Topología de la Universidasd de Valladolid.

En las páginas que siguen intentaremos dar una idea de lo que fue la vida de Oscar Zariski, de lo que fue la vida de la escuela italiana, no la de los matemáticos que la componían, y de lo que fue la vida real, es decir la geometría, de ambos juntamente. Para los datos biográficos de Zariski usaremos con libertad, probablemente excesiva, la magnífica biografía, verdadero modelo de biografías de matemáticos, que escribió Carol Parikh. "The unreal life of Oscar Zariski".[18]

1. El joven Zariski

Ascher Zaritsky nació el 24 de Abril de 1899 en Kobrin, una pequeña ciudad del entonces Imperio ruso, que en el periodo final de la revolución bolchevique, pasó a formar parte de Polonia. Judío por nacimiento, ruso por su cultura, con pasaporte polaco, educado en Italia y afincado en los Estados Unidos, fue un verdadero ciudadano del mundo, que, según sus palabras no se sentía más cómodo con una nacionalidad que con otra. Su apellido era completamente ruso, de hecho era el apellido de un conocido líder cosaco, y Zariski bromeaba sobre ello, *¿Quien sabe que sucedió? Sabe, puede que tenga sangre rusa, incluso mi nombre judío es ruso.*

La italianización de su nombre fue idea de Enriques:

"Veámoslo primeramente. "Ascher Zaritsky" . Su nombre ruso es muy difícil para los italianos. ¿Porque no acortarlo?. Omita la "t" y la "y" y hágalo Zariski. Para reproducir fonéticamente el sonido ruso de su nombre, necesitaría "tzky", por eso en italiano Zariski es mejor.

Y ahora "Ascher". Bien, es un nombre bíblico, pero en italiano no tenemos una letra "sha" similar a la letra "shi" hebrea. Los italianos lo escribirían "Ascer" y "sc" en italiano suena "sh" o "sk" dependiendo de la letra que vaya después. Por tanto ¿Porque no lo cambia por Oscar ?. Seria una cosa razonable."

Sexto de los siete hijos de un estudiante rabínico, muerto en 1901, Zariski recibió una educación judía tradicional hasta los once años, siempre bajo la tutela de su madre, mujer excepcional que marcó decisivamente el carácter del joven Oscar. Desde niño comenzó a interesarse por los problemas de matemáticas, compitiendo en la resolución de estos con su hermano mayor. Al ocupar Varsovia los alemanes en 1914. Zariski se traslado a Chernigov, a casa del hermano con quien competía, concluyendo allí sus estudios elementales. En 1919 ingresó en la Universidad de Kiev interesándose especialmente en álgebra y teoría de números. Los disturbios que acompañaron a la revolución rusa - por la que Zariski sentía enormes simpatías, pero que le impedían seguir su verdadera devoción, las matemáticas - motivaron la vuelta de Kobrin a Polonia , y, el que Zariski con su nuevo pasaporte polaco se trasladase a Italia en 1921.

¿Qué razones lo movieron a elegir Italia precisamente?. En ese momento no fue precisamente la geometría - el interés de Zariski estaba en la teoría de números - pero en Italia la vida era barata, la Universidad gratuita para los extranjeros y:

Yo tenía la misma idea romántica de Italia que tiene la mayoría de los rusos, el país de las canciones, el país de los poetas, el país de Galileo Galilei, y podría haber tenido incluso alguna idea acerca de italianas guapas

Así Zariski llega primeramente a Pisa atraído por la obra de Bianchi, pero encuentra muy bajo el nivel de sus cursos y además el Profesor Bianchi había dejado la Universidad. Por ello en otoño de 1921 deja Pisa y se inscribe en la Universidad de Roma. Allí en Roma:

La Geometría Algebraica era la reina suprema. Yo tuve la gran fortuna de encontrar en la facultad tres grandes matemáticos, cuyos nombres hoy simbolizan y están identificados con la geometría algebraica clásica. Guido Castelnuovo, Federigo Enriques y Francesco Severi. Dado que, incluso entre la trama clásica de la geometría algebraica, los fundamentos algebraicos eran evidentes, era inevitable que yo me sintiera atraído por este campo.

2. La Escuela Italiana

Con la muerte de Riemann en 1866, no quedó nadie en el panorama matemático mundial, con capacidad suficiente para continuar su enorme obra de síntesis. Sus continuadores se centraron en alguno de los muchos aspectos parciales de su trabajo y así las diversas escuelas de geometría algebraica comenzaron a divergir en un ambiente de mutua incomprensión [7]. Cada una de estas escuelas intentó representar y explotar en su lenguaje, los resultados de Riemann sobre la geometría birracional de curvas algebraicas, para luego intentar extender estos resultados a superficies. Hay que tener también en cuenta que además de la pugna entre las escuelas algebraicas y sintéticas por la herencia de Riemann, es la época de la discusión sobre el rigor, entre geómetras y analistas.

La escuela italiana de geometría reconoce su origen, por una parte en la célebre memoria de Brill y Noether sobre la teoría de funciones algebraicas y su significado geométrico y por otra en la geometría proyectiva francesa, aunque la influencia del programa de Klein, especialmente a través de Veronese pesó bastante en ella.

Todos los autores atribuyen la fundación de la Escuela Italiana a Luigi Cremona (1830 - 1903), nombrado profesor de geometría superior en Bolonia, en 1860. Al mismo tiempo que a Cremona se nombró un numeroso grupos de profesores de otras especialidades (otro matemático fue Beltrami), para relanzar la Universidad Boloñesa. Allí permaneció siete años, y, tras una breve estancia en Milán, pasó a la Universidad de Roma. Fue el creador de la teoría geométrica (sintética) de curvas planas y su estudio de las transformaciones birracionales del plano, mediante el análisis de las transformaciones cuadráticas asociadas a haces de cónicas fue definitivo; esas transformaciones se conocen hoy por transformaciones de Cremona.

Discípulos directos de Luigi Cremona fueron, entre otros Giuseppe Veronese y Eugenio Bertini. Por su influencia en la escuela hablaremos un poco del primero, ya que la geometría alemana entró en Italia a través de su trabajo.

Veronese nació en 1859, estudió en un instituto politécnico de Venecia y a los dieciocho años marchó al de Zurich, donde Fiedler lo convenció de que se dedicase a las matemáticas. A sugerencia de este se dedicó a estudiar el hexagrama místico de Pascal:

Con vértice en seis puntos de una cónica, se pueden construir sesenta hexágonos distintos. Las ternas de puntos de corte de pares de lados opuestos están alineados (teorema de Pascal) así, aparecen sesenta rectas (rectas de Pascal). Las sesenta rectas de Pascal concurren por ternas en sesenta puntos (puntos de Kirkman). Aparecen en conexión con el hexágono numerosos nombres, veinte puntos de Steiner, quince rectas de Plücker, Cayley, Salmon, Cremona, etc. Sin entrar en detalles indiquemos que se conjeturaba que existía una polaridad entre las rectas de Pascal y los puntos de Kirkman, si bien Hesse probó que dicha polaridad no era la asociada a la cónica de partida. El joven Veronese demostró la falsedad de la conjetura probando que la configuración de los sesenta puntos y sesenta rectas se descomponía en seis configuraciones 10_3 , de modo que por grupos de diez puntos y diez rectas existe una polaridad respecto a una cónica, pero las seis cónicas son distintas.

Veronese envío su trabajo a Cremona a Roma, entusiasmando a este, que le consiguió un nombramiento de profesor asistente.

En Roma Veronese siguió cursos con Cremona y Bataglini, haciendo su tesis bajo la dirección del primero. Posteriormente trabajo en Lipsia con Felix Klein y allí, según C. Segre se gestó la teoría geométrica de los hiperespacios, es decir de los espacios de dimensión mayor que tres. Su memoria del Mathematische Annalen, escrita durante su estancia en Lipsia, contiene el primer estudio, perfectamente sistematizado y organizado, de los hiperespacios, elaborado como una verdadera teoría geométrica y no como un *análisis travestido* [22]. Severi, que coincidió en Padua con Veronese decía:

Así surge inicialmente (en Veronese) la idea de reducir el estudio de las propiedades de las figuras, invariantes por transformaciones birracionales, al de modelos proyectivos, en una palabra de geometrizar el álgebra, mejor que considerar la geometría como una sombra de esta.

Para Severi, los puntos, rectas, planos, etc. de un espacio de dimensión *n* eran:

Verdaderas entidades geométricas y no meros atributos de entidades analíticas. El espacio lineal de n dimensiones existe realmente, no se reduce a la sombra de una ficción lingüística.

Un tercer discípulo destacado de Cremona fue Enrico d'Ovidio, el primero (según Severi) que trabajó en Italia (en el período 1873-1876) con hiperespacios, incorporando así Italia a la rica geometría europea de fines del XIX. Corrado Segre fue discípulo de d'Ovidio y Francesco Severi, discípulo directo de Segre, profesor ayudante de d'Ovidio en Turín.

Corrado Segre es quien empieza un estudio sistemático de propiedades que envuelven transformaciones birracionales de figuras, comenzando con los procedimientos sintéticos que desde ese momento caracterizaron la geometría algebraica italiana.

Segre utiliza sistemáticamente argumentos de generación proyectiva y proyección desde hiperespacios para construir nuevas figuras tridimensionales y estudiar sus propiedades. Este hecho es enormemente innovador, ya que todavía en 1875 Darboux, afirmaba que :

Como no existe el espacio de cuatro dimensiones es absurdo tratar de extender los métodos de proyección a la geometría del espacio.

Como ejemplo del método de proyección de Segre podemos citar el siguiente: Geiser en 1869 había demostrado que la cuártica plana general se puede obtener como contorno aparente de una superficie cúbico por proyección desde uno de sus puntos. Segre extiende el método para estudiar los contornos aparentes, por proyección desde uno de sus puntos, de las tres - variedades cúbicas en el espacio de dimensión 4. Así describe de este modo numerosas superficies entre ellas la cuártica con 16 puntos dobles de Kummer

En 1887 en una breve nota C. Segre introduce aunque no con este nombre, la noción de serie característica de un sistema lineal de curvas planas (el nombre se lo dará después Castelnuovo en 1891). Con este concepto da contenido geométrico a resultados de carácter numerativo. En una nota de 1891, da carta de naturaleza al producto de variedades algebraicas mediante la descripción de lo que hoy se conoce por inmersión de Segre (vol. 1. [20])

En dos artículos escritos al final de su vida ([21],[22]) C. Segre fija su posición respecto a la situación de la matemática en Italia y marca los que el cree que son los objetivos fundamentales de la geometría algebraica italiana.

En primer lugar se manifiesta enormemente preocupado por la polarización de la matemática italiana hacia la matemática pura - que él divide en análisis y geometría - y más precisamente hacia la geometría, por ello, en el primero de estos artículos intenta convencer a los jóvenes del interés de dedicarse a otras ramas de las matemáticas especialmente a las más aplicadas sin dejarse deslumbrar por la brillante posición de la geometría italiana.

Insiste también en la enorme interconexión existente entre las distintas ramas de la matemática, por ejemplo entre los grupos continuos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales (Lie), entre la geometría de los entes algebraicos y la teoría de funciones algebraicas, entre la geometría proyectiva y el álgebra lineal. Se queja en cambio de que los jóvenes tienden a separar de modo muy neto la geometría y el análisis:

Un joven que quiera cultivar la geometría separándola del análisis, aunque tenga enorme el ingenio, no será jamas un geómetra completo. No poseerá el potente instrumento de investigación que es el análisis moderno para la geometría. Ignorara los muchos resultados geométricos que se encuentran, bien que implícitamente, en los escritos de los analistas, y no solo no podrá valerse de ellos en su trabajo, corre también el enorme riesgo de presentar como nuevas cosas en las que solo ha cambiado el lenguaje.

Advierte también, naturalmente, del riesgo recíproco para los analistas. Por ejemplo cita que Osgood en 1904 ya había observado un salto, cubierto con intuición geométrica en la teoría de funciones de Weierstrass.

Sobre la relación entre álgebra y geometría observa que muchos problemas muy difíciles, determinación de soluciones de sistemas por ejemplo, se pueden resolver con ayuda de la geometría numerativa, y que la geometría:

Debe recurrir al álgebra para las demostraciones de sus principios, para el tratamiento riguroso de las variedades algebraicas y de sus intersecciones.

Y tras referirse a los trabajos de Noether y sobre todo de Hilbert sobre la determinación algebraica de la postulación indica que es un campo *amplísimo, completamente abierto y digno de profundas investigaciones*.

Como vemos Segre era menos radical que sus discípulos inmediatos, no rechazaba en absoluto las técnicas puramente algebraicas en la geometría. Además y en contra de lo que a veces se ha dicho, manifestaba un enorme interés por el rigor, desde su peculiar punto de vista, que fue una constante a lo largo de su existencia. Segre marca además como objetivos de la Geometría:

1.- Caracterizar ciertas señas de identidad geométricas, siempre en el espíritu del programa de Erlangen (que no trataba tanto de dar un nuevo concepto de geometría como de deslindar la geometría de las otras ramas de la matemática). Así se pueden tomar como grupos de transformaciones los de transformaciones proyectivas, los de transformaciones birracionales del plano o el espacio etc. y estudiar las propiedades geométricas, es decir invariantes, respecto de la acción de estos grupos.

2.- Estudiar la Geometría sobre una curva o sobre una superficie

3.-Transformar entes, cuyas propiedades se conocen, en otros nuevos cuyas propiedades se conocerán automáticamente.

4.-Generar nuevas variedades como lugar de elementos invariantes por correspondencias algebraicas, como lugares de intersección o suma de elementos homólogos en estas correspondencias, y relacionar las propiedades de estas variedades con las de la correspondencia que las origina

En la descripción de este proceso y con un notable sentido del humor Segre dice:

Se toma un punto A, se lo conjuga con B, se toma la polar respecto a C, se interseca con D, se determina el homólogo respecto de E, etc. etc. Y finalmente desde A se habrá obtenido un punto, u otro elemento A´, entonces, a tales elementos corresponden tales otros, o si A (o A´) se mueven de tal modo A´(o A) se moverán de tal otro, de modo que un ente dado o una propiedad dada se transformarán en otra. Y todo ello sin ninguna dificultad, casi mecánicamente, con la misma regularidad con que un péndulo hace sus oscilaciones. Es por eso que mi maestro (d'Ovidio) solía caracterizar jocosamente este género de trabajo como tictac- geometría

A comienzos de siglo desaparece la generación de discípulos de Cremona y la geometría queda en la escuela de Segre, empieza la Escuela Italiana con mayúsculas, el centro de la geometría algebraica sintética. Simultáneamente se estudiaban en Francia e Italia las superficies algebraicas, Picard, Simart, Humbert, etc. van obteniendo por métodos trascendentes la teoría de funciones algebraicas de dos variables independientes, al tiempo que Enriques y Castelnuovo construyen geométricamente la teoría de sistemas lineales sobre una superficie y las correspondencias algebraicas sobre superficies y Severi comenzó a desarrollar la teoría de curvas sobre una superficie algebraica.

3. Zariski en Italia

Guido Castelnuovo fue el primero que reconoció el talento del joven Zariski. Este se habia inscrito en el primer curso de los estudios de matemáticas, ya que, aunque había estudiado matemáticas en Kiev, como se había inscrito en la facultad de filosofía por no haber plazas de matemáticas, sus estudios en esta materia no constaban oficalmente. Cuando Zariski se atrevió a decirle esto a Castelnuovo, éste, tras comprobar detenidamente sus conocimientos, examinándolo un día en un paseo tras de una clase, lo hizo avanzar dos cursos de golpe. Posteriormente fue su director de Tesis, proponiéndole como tema uno acorde con sus gustos algebraicos[2] . Planteado en términos de álgebra el problema es el siguiente:

Estudiar la solubilidad por radicales de la ecuación algebraica, dependiente linealmente del parámetro t :

$$f(x)+t.g(x)=0, f(x), g(x)\in k[x]$$

Este problema, que consiste esencialmente en extender el teorema de Abel, había sido propuesto con carácter general, para una dependencia arbitraria del parámetro, por Enriques en el Congreso Internacional de Zurich en 1897, y ya necesita una cantidad importante de precisión algebraica. No es posible encontrar paramétricas de una curva vía ramificación únicamente, se precisa introducir series formales, por tanto la necesidad de conocer con precisión la relación polinomios - series, tan presente en toda la obra de Zariski, se presenta aquí con absoluta claridad.

Este problema había sido resuelto independientemente por Chisini (1915) y Ritt (1922) cuando el grado en x de la ecuación era primo. Por cierto el no citar debidamente a Ritt, a gusto de este, causó problemas posteriormente a Zariski en su primera visita a Estados Unidos. Como él mismo observó ácidamente en una entrevista:

Tan pronto como oyó mi nombre, Ritt me atacó a causa de que en mis notas a la Academia dei Lincei yo no había puntualizado que él había tenido éxito, ...¡en ir detrás de Chisini!

Zariski considera la serie lineal g_1^n definida por la ecuación en la recta proyectiva y estudiando sus grupos de puntos múltiples, clasifica las que corresponden a ecuaciones resolubles por radicales. La misma técnica le sirve poco después para probar que no se pueden encontrar series g_1^n solubles, sobre la curva general de genero mayor que seis.

Federigo Enriques, fue para Zariski *el más cariñoso y abierto de todos los matemáticos de la Universidad de Roma.* Al contrario que Castelnuovo que se mantenía siempre distante de sus estudiantes, Enriques invitaba frecuentemente a Zariski, con quien hablaba indistintamente de matemáticas y filosofía (es de destacar que Enriques era reconocido internacionalmente como igualmente excelente en ambos campos). De

---

[2] Se ha citado muchas veces la frase de Castelnuovo: Zariski, usted está aquí con nosotros, pero no es uno de los nuestros.

su curso de curvas algebraicas Zariski guardó muchas anécdotas. Si alguien le indicaba que en alguna demostración faltaba algo, Enriques decía:

¡Ah, vamos!, eso es solamente dubbio critico (escrúpulos críticos)

Zariski le atribuía también la frase:

Los teoremas son aristocráticos, las demostraciones plebeyas.

La influencia de Enriques en la obra de Zariski, tanto directa como a través de Castelnuovo (que era además cuñado suyo) fue enorme y alcanza incluso a su última línea de trabajo, la equisingularidad.

Con el tercero de los grandes geómetras italianos, Francesco Severi, las relaciones de Zariski fueron menos fáciles, parece ser que a veces Severi decía a Zariski:

Yo lo quiero, Zariski, pero usted no me quiere a mí

Zariski no apreciaba el estilo docente de Severi en el que encontraba difícil distinguir suposiciones y afirmaciones, sospechas e hipótesis. Les separaban además sus ideas políticas, en aquel tiempo Zariski era marxista convencido y aunque Severi era socialista, sus preferencias comenzaban a inclinarse por Mussolini[3] . Sin embargo Severi siempre matuvo su cariño hacia Zariski y éste su respeto a Severi. En alguna ocasión Zariski encontró serios problemas en un artículo de Severi que le había sido enviado por el Mathematical Review y en lugar de exponerlos en la revista, se les comunicó por carta privadamente, e incluso tras la muerte de Severi, trató de disuadir a Mumford de atacar su obra.

Uno de los trabajos iniciales de Zariski, publicado en 1928 está directamente referido a la obra de Severi, ya que se dedica a corregir un "punto debil" en el razonamiento de un artículo suyo en el Mathematische Annalen [28]. En dicho artículo Severi intentaba probar una afirmación de Hurwitz:

Sólo pueden existir correspondencias singulares en curvas especiales, o lo que es lo mismo no las hay en la curva genérica de genero g.

Para probar esta afirmación Severi demostraba que la curva general en un sistema lineal de dimensión mayor o igual que dos trazado en una superficie regular, no tiene correspondencias regulares, si es lo suficientemente no degenerado. Este resultado aplicado a sistemas lineales de curvas planas con nodos como únicas singularidades le daba la afirmación de Hurwitz.

El artículo contiene dos demostraciones, cada una de ellas con una hipótesis adicional y un método distinto. En la demostración trascendente, Severi supone que cuando una curva del sistema adquiere un nuevo punto múltiple, éste es en general un nodo doble. En la demostración geométrica supone en cambio que el sistema lineal en que trabaja, que es de dimensión r, no contiene un subsistema $r-1$ dimensional de curvas reducibles. A continuación y como, en su opinión, las dos condiciones son independientes, concluye la validez del resultado sin ninguna restricción.

Sin embargo Zariski encuentra problemas en la demostración geométrica, remediados estos, formula el resultado correcto con toda precisión, caracterizando

[3] Posteriormente en 1933, cuando éste cerró la Accademia dei Lincei y creó la Academia d'Italia, que enseguida expulsó de ella a los miembros judíos, Severi fue uno de oos pocos que no dimitieron como protesta.

además completamente los sistemas lineales de curvas para los que es válido el teorema de Severi. Curiosamente, y es otro ejemplo más de los límites de validez de la intuición geométrica, estas condiciones se satisfacen en los sistemas tridimensionales.

Esta corrección parece ser que no hizo mucha gracia a Severi, que publicó inmediatamente la suya en las actas de la Lincei. La nota de Zariski se publicó en enero y la de Severi en febrero. Zariski, por entonces en Estados Unidos, escribía a su mujer Yole:

Yo no sé si él recuerda que le llamé la atención sobre el hecho de que uno de sus antiguos teoremas no es cierto, y que él mismo me animó a publicar una nota sobre ello.

En su periodo romano y a petición de Enriques, Zariski traduce al italiano dos libros de Dedekind, para la colección "Per la Storia e la Filosofía delle Matematiche", y publica varios artículos de divulgación, entre ellos una serie de cuatro en la Revista Matemática Hispano Americana de 1926 con el título: "El principio de la continuidad en su desarrollo histórico".

En 1926 obtiene una beca de la fundación Rockefeller viajando por primera vez a Estados Unidos[4] . A su vuelta, disgustado por la situación política italiana -Mussolini ejercía el poder absoluto desde 1925- decide dejar el país, a pesar de tener esposa y un hijo italianos. Intenta volver a Rusia, pero es rechazado por los soviets por *haber sacrificado siempre sus ideas políticas en aras de las matemáticas.* Solicita puestos que tampoco consigue en Jerusalén y Zurich. Finalmente recurre a Castelnuovo que consigue que Lefschetz le obtenga un puesto en la John Hopkins de Baltimore. Allí permaneció hasta su paso a Harvard en 1947.

Al año de su marcha, en 1928, vuelve a Italia para presentar una comunicación en el congreso internacional de Bolonia. Allí es recibido por sus maestros con enorme cariño:

Hoy Castelnuovo dio una conferencia; Fue, de lejos, la mejor y causó una enorme impresión a todo el mundo. Tanto por su contenido como por su elegante estilo era una auténtica obra de arte. Me hizo el gran honor de interrumpir la conferencia en un cierto momento, para anunciar a la audiencia que en mi comunicación yo había hecho un avance importante en la solución de un problema abierto fundamental. Puesto que hay cientos de estas comunicaciones breves, puedes entender lo significativo que ha sido este reconocimiento.

La comunicación presentada en Bolonia contenía el germen de una importante serie de artículos sobre el grupo fundamental en geometría algebraica. En la introducción de la comunicación Zariski explica, claramente, las razones de su interés por el grupo fundamental en conexión con el estudio del lugar de ramificación de una función algebraica de dos variables.

Si se considera el polinomio mínimo de la función, se calcula su discriminante y se elimina la proyección de las curvas múltiples de la superficie, se obtiene la curva de ramificación, *D*, que goza de la propiedad de que:

---

[4] Antes de partir ya había conocido en Roma a Andrè Weil, desplazado allí para estudiar análisis funcional con Vito Volterra.

Cuando el punto (x,y) describe un circuito unidimensional, las ramas de la función se reproducen, si el circuito se puede reducir a un punto sin que encuentre más puntos de la curva D, en lugar de ello,si dicha reducción es imposible, experimentan generalmente una permutación.

Entonces podemos preguntarnos si dada una curva *D*, se puede construir una superficie que la tenga por curva de ramificación, pero el problema así planteado, carece de sentido si no se fija de modo preciso cómo se permutan las ramas cuando nos movemos en el plano en torno a un punto del discriminante. Para ello es necesario estudiar previamente el grupo fundamental del complemento de *D*. De este modo la razón geométrica para el estudio del grupo de Poincaré del complementario de una curva algebraica, queda claramente de manifiesto.

En su comunicación, Zariski, utiliza resultados de Enriques y Lefschetz para calcular los grupos fundamentales, del complemento de una curva simple irreducible, del de una curva con varias ramas simples con cruzamientos normales y del de una curva irreducible con nodos como únicas singularidades. Señalemos que estos resultados están basados en un resultado "intuitivo" de Enriques y que la corrección de este resultado por Abyankhar produjo un alejamiento de varios años entre Abyankhar y Zariski, ya que éste, según Abyankhar, no aceptó de buen grado la corrección del error de su maestro y en consecuencia del suyo. El teorema general no ha sido completado hasta los años ochenta (por Deligne y Fulton), después de resultados esenciales de Abyyankhar.

Nueve años después y tras su crisis de algebraización, Zariski termina la etapa de estudio del grupo fundamental iniciada en esta comunicación con el célebre teorema de las secciones planas: Si V es una hipersuperficie en un espacio proyectivo y H un hiperplano genérico, el grupo fundamental del complemento de V en el espacio ambiente, es naturalmente isomorfo al del complemento en H de $H \cap V$.

La demostración de Zariski es incompleta y el autor de estas líneas tuvo ocasión de seguir un seminario en Harvard, en que Lê Dung Trang expuso ante Zariski una demostración completa usando estratificaciones y métodos trascendentes. Zariski apreció considerablemente la demostración pero se lamentó de que no fuese puramente algebraica, dado que la naturaleza del teorema lo era.

En sus cuatro primeros años de Estados Unidos, el carácter de la obra de Zariski es eminentemente topológico, indudablemente pesaba sobre él la influencia de Lefschetz, y al final de este periodo escribe su artículo sobre la topología de las variedades algebroides, que ha marcado sensiblemente buena parte de la geometría algebraica de los años ochenta.

A partir de 1932 prepara su magnífico libro sobre superficies algebraicas que supone una recapitulación sobre su idea de las matemáticas, lo aparta tres años de las revistas científicas y hace surgir al Zariski moderno. Como él mismo cuenta en el prologo de sus obras completas:

La ruptura (o iluminación, según se mire) vino mientras yo escribía mi monografía "Algebraic Surfaces"para los Ergebnisse. Por entonces acababa de nacer el álgebra moderna (por medio de la obra de Emmy Noether y el importante tratado de B.L. Van der Waerden). Pero, aunque había sido aplicada por éste a la fundamentación de la Geometría Algebraica, en su serie de artículos "Zur algebraischen Geometrie", *los aspectos más profundos de la geometría birracional (como el problema de reducción de singularidades, las propiedades del lugar fundamental y las variedades excepcionales de las transformaciones birracionales, cuestiones relativas a sistemas lineales completos de curvas y superficies etc.) eran en mucha medida o completamente, territorio virgen en lo que concierne a la exploración algebraica. En mi monografía de las Ergebnisse, yo puse lo mejor de mi parte para presentar las ideas subyacentes a los ingeniosos métodos geométricos y a las demostraciones que los geómetras italianos utilizaban para manejar estos aspectos más profundos de la teoría de superficies, con toda probabilidad tuve éxito, pero a un precio. El precio para mí fue la pérdida del paraíso geométrico en que había vivido felizmente.*

4. Los fundamentos de la Geometría Algebraica

Zariski continua diciendo:

Comencé a sentirme netamente infeliz con el rigor de las demostraciones que estaba resumiendo (sin perder en lo mas mínimo mi admiración por el imaginativo espíritu geométrico que empapaba esas demostraciones). Y me convencí de que la estructura geométrica podía rehacerse por métodos puramente algebraicos.

Hay que tener en cuenta que, como hemos señalado antes, el origen de la escuela geométrica italiana en el último cuarto del siglo XIX coincide con el punto culminante del debate analisis - geometría en torno al rigor. Todavía Hilbert en su célebre conferencia del congreso internacional de 1900 en París protestaba enérgicamente contra la opinión de que sólo el análisis, y no la geometría fuese susceptible de un tratamiento riguroso.

Así desde los inicios de la escuela italiana, la polémica análisis - geometría, tanto sobre el rigor como sobre la herencia de Riemann estaba presente y cada uno de los especialistas en cada área se encerraba en la exclusividad de su campo. Segre escribía [21]

El periodo, por llamarlo así, heroico, de la geometría sintética, en el que no se trataba solo de darle a la ciencia nuevos resultados, sino que, de Poncelet a Steiner, de Chasles a Staudt, todos debían combatir para demostrar la utilidad y validez del método geométrico a los analistas, que no querían reconocerlas, ese periodo ha pasado y hoy la lucha no es necesaria....... Para hacer una investigación original, no hay que ser un simple traductor desde el análisis (La mayor parte de los resultados sobre la geometría birracional de curvas algebraicas habían sido establecidos por Riemann, en términos de análisis, sin utilizar lenguaje geométrico y sólo en ese momento, Brill, Roch, Noether etc. estaban empezando el proceso de geometrizacion) *pero tampoco hay que limitarse a los métodos puramente geométricos, ya que, en fin, a la ciencia lo que le importa son los resultados.*

Por otra parte, la geometría estaba atada a la necesidad de una axiomática en el sentido de la de Euclides. Eso producía problemas para considerar los objetos tridimensionales como proyecciones o secciones de figuras de espacios de dimension superior, ya que, para ello, había que admitir la existencia de puntos fuera del espacio ordinario, y eso sin axiomas que los controlasen. El álgebra lineal y la geometría analítica, como las entendemos hoy, no existían y había que utilizar trucos y ficciones para representar espacios de dimensión mayor que tres en forma lógicamente aceptable. Esta fue una de las razones de la progresiva pérdida de rigor de la geometría y de la sustitución del razonamiento por la intuición.

Dentro de la misma Italia salta a veces la polémica, es conocida la de Segre y Peano, el primero afirmaba que [21]:

Cuando se trata sólo de descubrir una verdad, la pureza del método pasa a segunda línea... Acontece frecuentemente que en una primera investigación debe sacrificarse el rigor

Peano como director de la revista en que aparece el trabajo de Segre, publica un artículo de respuesta a continuación del de éste, y en él dice:

La falta de rigor en el trabajo matemático no se puede en modo alguno, ni defender ni excusar. Una proposición es falsa si se le puede encontrar una excepción, y un resultado no se ha obtenido realmente hasta que está completamente demostrado.

Como casi todas las polémicas, ésta surge de una lectura parcial. En el artículo atacado por Peano, Segre añade un paréntesis diciendo, entre sacrificio y rigor "que es mucho más grave tratándose de Matemáticas" y en una nota al pie añade "No hay que confundir la falta de rigor en el procedimiento con errores en los razonamientos o el resultado, producto en general de la premura en publicarlos"

Gaetano Scorza contó a Severi que en 1899, cuando, ya licenciado, seguía un curso de Segre sobre la geometría de curvas, éste le advirtió, antes de entrar en clase, de que había una laguna en la demostración del Restsatz dada por Noether. Sin embargo hizo la demostración falsa sin decir nada a los alumnos. Despues aclaró a Scorza que, no habiendo podido eliminar la laguna, había estimado didácticamente inoportuno poner a los estudiantes en una situación de incomodidad, sobre todo teniendo en cuenta que el teorema era evidentemente cierto y que ninguno de los estudiantes tenía la finura intelectual suficiente para percibir el error. El teorema presuntamente evidente fue probado definitivamente por Van der Waerden en 1931.

Así la geometría italiana se mantenía en un difícil equilibrio entre el rigor y la intuición, que como señalamos antes fue relativamente bien, mientras se podían usar métodos trascendentes para comprobar la validez de los resultados, lo cual era posible si se trabajaba sobre el cuerpo complejo. La entrada en escena de la característica positiva, de la mano de la aritmética, llevó a los italianos a un callejón sin salida. No obstante, a veces las intuiciones de la escuela italiana eran absolutamente geniales y abrían nuevos y sorprendentes campos para la geometría. Por ejemplo Severi, en su estudio sobre el principio de conservación del número considera una correspondencia entre variedades U y V, es decir una subvariedad W de la variedad producto $U \times V$, supone que U es irreducible y que al punto genérico ξ de U le corresponde un conjunto finito $\eta_1, \eta_2 \dots \eta_n$ de puntos de V. Cuando el punto ξ tiende a un punto x, los puntos η_i tienden a unos puntos límite y_i, si un total de a de los puntos η tienden al mismo punto y, Severi dice entonces que y tiene multiplicidad a. Suponiendo ahora que el número de puntos de la variedad W que define la correspondencia que yacen sobre cada punto de U es finito, Severi establece sin demostración, que: las multiplicidades están bien definidas, que si la correspondencia es irreducible, todo punto de W yace sobre al menos uno de U, y, que la suma de todas las multiplicidades de los puntos y correspondientes a un punto x es constante e igual al número de puntos de W que yacen sobre el punto genérico de U. En un artículo posterior de 1932, añade la hipótesis adicional de que el punto específico x debe ser punto simple de U.

Con esta hipótesis las tres afirmaciones de Severi son ciertas, pero cuando las escribió por primera vez en 1912, no existían las técnicas algebraicas necesarias para probarlas, y además establece un concepto local como es la multiplicidad, en términos globales. Pese a ello, y con una intuición correcta, dió la buena definición de multiplicidad, que, algebraicamente, no es en absoluto trivial, estableció correctamente sus propiedades, y enunció de paso de modo irreprochable el controvertido principio de conservación del número.

Pero no todas las intuiciones eran correctas, el mismo Van der Waerden de quien [27] están tomadas las líneas anteriores escribe:

La escuela italiana, liderada por Segre, Castelnuovo, Enriques y Severi, erigió una estructura admirable, pero sus fundamentos lógicos eran inestables, las nociones no estaban bien definidas y las demostraciones eran insuficientes.

En su tarea de dar fundamentos sólidos a esta geometría. Van der Waerden comienza por la idea de punto genérico, obviamente es aquél que no tiene propiedades no deseadas respecto al objeto que queramos estudiar. Por ejemplo un plano genérico para una curva y un punto, no puede ser tangente a la curva ni pasar por el punto. ¿Es posible entonces encontrar en una variedad U un punto que no tenga ninguna propiedad algebraica especial salvo aquellas comunes a todos los puntos de U?.

Si U es el espacio completo, decia Van der Waerden, es fácil, basta tomar un punto cuyas coordenadas sean todas, indeterminadas algebraicamente independientes. Como una propiedad algebraica se expresa siempre con la anulación de una función polinomica, nuestro punto genérico no verificaría ninguna propiedad, que es lo que sucede con todos los puntos del espacio, no tienen propiedad común. Si ahora U es una variedad irreducible, hay que tomar como punto genérico de U un punto ξ tal que para un polinomio F con coeficientes constantes $F(\xi) = 0$ si y sólo si F se anula sobre todos los puntos de la variedad. En este punto los resultados de E. Noether sobre la obra de uno de sus alumnos Hentzelt, muerto en la primera guerra mundial, dieron a Van der Waerden la solución, existen un número d y un sistema coordenado, tales que si se reemplazan las d primeras coordenadas por indeterminadas, se pueden determinar las n-d restantes coordenadas, de un punto cualquiera de U, como funciones algebraicas de dichas indeterminadas en una extensión del cuerpo base. El punto así obtenido era exactamente lo que Van der Waerden necesitaba, más aún puesto que el cuerpo extensión se podía calcular directamente como cuerpo de cocientes del anillo de polinomios módulo el ideal de la variedad, es innecesaria la complicada construcción de E. Noether, y el par de cuerpos determina de modo natural al punto genérico.

Los pasos al límite de un punto genérico a uno especial, en la geometría italiana se pueden substituir por las especializaciones, un punto ξ es especialización de otro η, si todo polinomio F con coeficientes constantes que se anule en el segundo, se anula en el primero. Desde aquí Van der Waerden sienta las bases algebraicas de la geometría italiana y sienta el punto de partida de la obra de Zariski y de los Fundamentos de Andre Weil. El lector avisado, verá también lo cerca que pasó Van der Waerden de la noción de punto genérico de Grothendieck.

El paso siguiente a la serie de artículos que con el titulo: “Zur algebraischen Geometrie” I a XV publicó Van der Waerden en los Mathematische Annalen entre 1933 y 1938[5] es la publicación de los “Foundations of Algebraic Geometry” de Andre Weil en 1946. El objetivo de Weil en este libro es:

Presentar un tratamiento detallado y completo de las propiedades de la multiplicidad de intersección, que incluya todo aquello necesario y suficiente para legitimar el uso de estas multiplicidades hecho en la geometría algebraica clásica, especialmente en la escuela italiana....... Se ha prestado una atención especial al lenguaje y a las definiciones. Naturalmente todo matemático tiene derecho a su propio lenguaje - al riesgo, claro está, de no ser entendido - y el uso de este derecho hecho a veces por nuestros coetáneos, casi sugiere que se está preparando para las matemáticas el mismo glorioso destino de otra de las más grandes obras de la humanidad, la torre de Babel.

Weil reconoce paladinamente la indudable influencia de Zariski a lo largo de toda su obra, no solo por sus escritos sino por su contacto personal. Este contacto proviene de una estancia conjunta de ambos durante un año (1945) en Sao Paulo, fruto de un programa político de intercambio que les permitió a ambos trabajar y discutir sin obligaciones docentes. Zariski hablaba de esta época diciendo que en Sao Paulo tuvo una soberbia audiencia .. de uno solo.

Weil introduce en su tratado la noción local de multiplicidad de intersección, llevando así este concepto a su marco adecuado, ya que, tanto el concepto establecido por Severi, como la formalización de Van der Waerden eran, inadecuadamente, de naturaleza global. La idea de Weil es muy simple, se trata de medir la multiplicidad de una componente C de la intersección de dos subvariedades A y B, de una variedad U, cuando el punto genérico de C es simple en U. La primera etapa es un proceso de reducción que permite considerar una de las variedades como lineal, y consiste en intersecar la variedad producto $A \times B$ con la diagonal L del producto por si mismo del espacio ambiente, esta es lineal y, la diagonal de $C \times C$ está contenida en $(A \times B) \cap L$ y es una componente propia de esta intersección, la multiplicidad de esta componente es exactamente la de C en la intersección de A y B. A continuación y por intersección con un complementario lineal genérico Weil reduce el caso de la multiplicidad de una componente en la intersección de una variedad algebraica con una lineal, a la multiplicidad en un punto. Y esta es capaz de describirla por medio de su teoría de multiplicidad de especialización. El único problema está en la unicidad de la multiplicidad así definida. El trabajo de Zariski sobre variedades normales (teorema principal) resuelve el problema, ya que permite probar la unicidad de la multiplicidad de interseccion de dos variedades en una interseccion aislada común.

En la conferencia dada por Zariski en el congreso internacional de 1950 sobre las ideas fundamentales de la geometría algebraica abstracta[6], está contenido un

[5] Luego se prolongó la serie, que llegó hasta el XX en 1971.

[6] Muchos años después Zariski afirmaba: lo que yo entonces llamé abstracto resulta ser hoy una de las ramas más concretas de las matemáticas.

resumen de sus trabajos sobre los fundamentos de la geometría; en dicha conferencia afirma:

Los pasados 25 años han contemplado un cambio notable en la geometría algebraica, un cambio debido al impacto de las ideas y métodos del álgebra moderna. Lo que ha sucedido, es que este viejo y venerable sector de la geometría ha sufrido y sigue experimentando un proceso de aritmetización, esta nueva tendencia ha causado consternación en algunos lugares. Se la ha criticado o como una deserción de la geometría o como una subordinación de ésta al rigor. Yo afirmo que esta crítica es injustificada y proviene de una confusión acerca del objetivo de la geometría algebraica moderna, este objetivo no es exilar la geometría ni la intuición geométrica, sino equipar al geómetra con las herramientas más precisas y los medios de control más eficaces. Es cierto que la falta de rigor en geometría algebraica ha creado un estado de cosas que no puede ser tolerado indefinidamente. Los medios de control del vuelo libre de la imaginación son completamente necesarios y la única posible solución es una completa reparación y aritmetizacion de la geometría algebraica. Este proceso puede decirse ahora que se ha cumplido en lo más esencial.

Zariski hace observar cómo se ha modificado incluso el concepto conjuntista de variedad con la introducción de los puntos genéricos. En lugar de trabajarse con un cuerpo de coeficientes y un cuerpo de coordenadas adaptado a la variedad, se hace lo siguiente:

Partiendo de un cuerpo base podemos tomar coordenadas en una extensión trascendente de grado de trascendencia infinito (dominio coordenado universal), esto permite estudiar, secantes, correspondencias, etc. mediante la consideración de tantos puntos genéricos independientes como se desee. Una vez que se fija el dominio universal K de coordenadas sólo se pueden utilizar cuerpos de coeficientes, k, que son subcuerpos de éste, y sobre los cuales tiene grado de trascendencia infinito. Trabajamos en el espacio proyectivo sobre el dominio universal y todas las variedades están sumergidas en ese espacio. Si una variedad V tiene un sistema de ecuaciones con coeficientes en k , k se llama un cuerpo de definición de V, naturalmente una misma variedad puede tener muchos cuerpos de definición distintos. Una propiedad de V es entonces absoluta o relativa según dependa o no del cuerpo de definición. Por ejemplo la irreducibilidad es una propiedad relativa, aunque se puede hablar obviamente de irreducibilidad absoluta. En cambio la dimensión, como grado de trascendencia sobre el cuerpo de definición del cuerpo de funciones relativo a él es un concepto absoluto.

No obstante las evidentes ventajas de este planteamiento, las propiedades de las subvariedades se pueden leer directamente en sus puntos genéricos, la teoría de correspondencias tiene un marco perfecto etc. Zariski encuentra que hay demasiados puntos genéricos para su gusto (Grothendieck corrige perfectamente este defecto) y ofrece posibles soluciones, como identificar puntos isomorfos sobre el cuerpo base.

En la variedad hay una topología natural, asociada al cuerpo de definición k, aquella en que la base de cerrados son las intersecciones de V con las variedades definidas sobre k (Topología de Zariski), en esta topología un punto general de una subvariedad es todo aquel cuyo cierre es la subvariedad, y un punto es especialización de otro si pertenece a su cierre. Zariski prefiere usar general en vez de genérico, porque el viejo concepto italiano incluye no solo condiciones de naturaleza algebraica, que son las incluidas en la nueva noción, sino maneja indistintamente las analíticas y las trascendentes

5. El algebra local y la geometría algebraica

La noción de anillo local se debe esencialmente a Grell y Krull, que a partir de 1927 comenzaron a trabajar con este tipo de anillos pero sin ninguna conexión con la geometría, Krull en 1938 publica un trabajo sobre anillos locales noetherianos, en el que aparecen los anillos regulares, este es de hecho el origen de lo que podemos llamar algebra local. Zariski se dá cuenta de la enorme aplicabilidad de las construcciones de Krull a la geometría y es el primero que introduce en geometría algebraica el álgebra local.

Así, al hablar de puntos simples utiliza el concepto de anillo local regular, descubriendo que en característica positiva y sobre un cuerpo base no perfecto, hay dos conceptos distintos de punto simple, el punto regular en el sentido de que su anillo local lo es, y el punto liso en el sentido del criterio jacobiano. El segundo significa algebraicamente la condición de regularidad cuando se amplia el cuerpo de definición al cierre algebraico del cuerpo de coeficientes (obsérvese aquí la relatividad de la noción de regularidad). Zariski prueba que el conjunto de puntos regulares es abierto (resultado que no se extiende a esquemas), y utiliza sus resultados algebraicos para probar los teoremas clásicos de Bertini sobre la irreducibilidad y las singularidades genéricas de los sistemas lineales de divisores sobre una variedad. El primero de estos resultados es válido en cualquier característica[7], pero el segundo, según prueba Zariski es cierto solamente en característica cero.

Los tres conceptos más importantes de álgebra local introducidos por Zariski en la geometría algebraica son los de cierre íntegro, anillo de valoración y compleción de un anillo. El primero le lleva a desarrollar la teoría de variedades normales, el segundo a dar un tratamiento algebraico a la teoría de condiciones base impuestas por puntos infinitamente próximos y el tercero al desarrollo de la teoría de funciones formales holomorfas. Con ellos completa un enorme cuerpo de resultados que le permiten abordar con éxito los puntos que su escuela italiana no había podido resolver en la teoría de superficies algebraicas.

Los conceptos de elemento entero sobre un anillo y anillo íntegramente cerrado, fueron introducidos por Krull y E. Noether a partir de 1927 inspirándose en resultados de Dedekind. Una variedad irreducible se dice normal, si su anillo local en cada punto es íntegramente cerrado. La normalidad es una propiedad relativa y fue introducida inicialmente en conexión con el problema de reducción de singularidades, ya que en una variedad normal el lugar singular tiene codimensión mayor o igual que 2.

Como para toda variedad V existe una normalización, es decir una variedad normal birracionalmete equivalente a V y tal que sobre cada punto de V yace un número

---

[7] Mumford [15] observa que en una de sus demostraciones Zariski pasa a la característica cero, pero luego remedia el fallo en un artículo posterior.

finito de puntos de su normalizada, por paso a la normalización, se reducen automáticamente las singularidades de codimensión uno.

Un resultado fundamental de Zariski para variedades normales es el llamado "teorema principal" que establece que en una transformación birracional entre una variedad normal V y otra variedad W a un punto de V, Q, le corresponde más de un punto de W, entonces Q es fundamental, es decir le corresponden infinitos puntos y además el conjunto de puntos de W que corresponden a Q es una variedad algebraica, todas cuyas componentes tienen dimensión estrictamente mayor que cero. Este resultado lleva consigo que en el caso de variedades normales si hay una especialización aislada, es única, suministrando así el ingrediente de la unicidad a la teoría de multiplicidades de Andre Weil.

Este resultado ha sido ampliado, localizado y ampliamente utilizado por Grothendieck y Deligne entre otros. Una variedad normal queda además completamente caracterizada por el hecho de que las hipersuperficies de orden n suficientemente alto la cortan segun un sistema lineal completo $|n.C|$ donde C es una sección hiperplana de la variedad. La demostración de Seidemberg, posteriormente mejorada por Zariski, de que la sección hiperplana genérica de una variedad normal es también normal, permite probar que el género aritmético virtual de Zariski y Muhly es invariante por transformaciones birracionales regulares. En este punto Zariski vuelve de nuevo a sus maestros italianos, ya que lo que hace es dar una versión para variedades normales de cualquier dimensión, y sobre cuerpos de característica arbitraria, del Lema clásico de Enriques - Severi punto central en la forma italiana de entender el teorema de Riemann - Roch para superficies.

Zariski introduce la compleción en geometría algebraica también para aritmetizar una idea clásica italiana. El principio de degeneración había sido formulado por Enriques en la forma siguiente:

Si una variedad irreducible V varía continuamente y degenera en el límite a una variedad reducible W, la variedad límite W es conexa.

El principio, que parece evidente, ya que irreducible implica conexo y la imagen de un conexo es conexo, va acompañado de la suposición implícita de que a variación continua corresponde una deformación continua, lo que ya es más discutible. El problema de la algebraizacion de este principio está precisamente en la substitución de la variacion continua y el límite por conceptos algebraicos.

La conexión, incluso la conexión absoluta no son problema porque contamos con la topología de Zariski, esta noción se puede extender fácilmente a ciclos efectivos, es decir a combinaciones lineales de variedades absolutamente irreducibles con coeficientes enteros positivos. Entonces la familia continua se transforma en un sistema irreducible de ciclos r - dimensionales y el principio se transforma en :

Si el ciclo general de un sistema algebraico irreducible sobre k, M es absolutamente irreducible, entonces todo ciclo de es absolutamente conexo.

Ahora bien, el sistema lleva asociada una correspondencia algebraica, que lleva cada punto al ciclo al que pertenece y el princípo se traduce en un teorema de correspondencias algebraicas, el teorema de conexión en correspondencias algebraicas de Zariski que es una generalización del teorema principal. En la demostración de este teorema Zariski tiene necesidad de funciones en una variedad V definidas y "holomorfas" a lo largo de una subvariedad W. Las construye localmente como:

Ciertos elementos específicos del producto directo de las compleciones de los anillos locales de V en los puntos de W. Son exactamente aquellos elementos del producto que pueden ser representados por un numero finito de sucesiones de elementos del cuerpo de funciones, de tal modo que:

1) Cada sucesión converge uniformemente en algun abierto U de W
2) Los abiertos U cubren W

Obsérvese que es un procedimiento perfecto, de definir el límite proyectivo, que hoy usamos en esta construcción, y de hacernos ver la forma precisa en que el concepto de límite proyectivo deriva del principio de prolongación. Esta construcción tiene un mérito especial teniendo en cuenta que los elementos que "pega" Zariski no son ya funciones ni gérmenes de funciones. Si el cuerpo base es el complejo, Zariski está pegando series que pueden ser divergentes, usando para ello aproximación uniforme de series por funciones, estamos pues ante un resultado puramente algebraico de análisis asintótico.

Las funciones así construidas forman un anillo O_w^* que caracteriza la conexión de W, ya que si V es analíticamente irreducible en cada punto de W, W es conexa (siempre respecto a un cuerpo de definición dado) si y solo si O_w^* es un dominio de integridad. Como se vé las funciones así construidas están definidas sólo a lo largo de W y por tanto si W tiene varias componenetes conexas se pueden construir funciones que se anulen en cada una de ellas sin importar la conexion de V. El punto clave de la teoría es de nuevo un resultado de análisis asintótico esta vez global, el anillo de funciones holomorfas a lo largo de W es un invariante por transformaciones racionales. Esta es una versión funcional del principio de degeneración, y su prueba algebraica es verdaderamente difícil.

Zariski añade tres problemas abiertos relativos a la estructura del anillo O_w^*: los dos últimos han sido resueltos tras una cantidad enorme de publicaciones de Artin, Grauert, Harsthorne, Hironaka, Matsusaka etc, el primero, carácter noetheriano de este anillo, continua abierto [1].

Grothendieck ha transformado estos resultados en herramienta común de la geometría algebraica y son de enorme aplicación dondequiera que se pretenda pegar datos formales, por ejemplo, en los problemas actuales de interpolación en la resolución asintótica de ecuaciones diferenciales.

Por último el tercer instrumento que Zariski lleva a la geometría, fiel a su idea de dotar al geómetra de las mejores herramientas, son los anillos de valoración, que habían sido la base de la teoría de números p-adicos de Hensel y de sus aplicaciones a la teoría de números algebraicos [7], y habían sido extendidas a cuerpos cualesquiera y grupos de valores arbitrarios por Krull en 1931.

El propio Zariski explica perfectamente las razones que le llevaron a introducir este concepto en geometría :

La teoría ordinaria de especializaciones se aplica sólo a conjuntos finitos,y no hace todas las cosas que la continuidad puede hacer en geometría clásica (Es decir la topología de Zariski es insuficiente porque carece de la finura suficiente como para abordar desde ella los problemas de contacto) *ya que no contiene nada que corresponda a la noción de rama, sea algebraica o trascendente, no nos dice nada de las diferentes maneras de aproximarse a un punto en una variedad,y no permite tampoco estudiar los aspectos diferenciales más finos de la geometría local. Lo que necesitamos es una teoría que nos permita tratar con todas las especializaciones simultáneas de todas las funciones racionales en una variedad, es decir una teoria trascendente de especializaciones, y esto es precisamente lo que proporciona la teoría de valoraciones generales de Krull.*

De este modo Zariski substituye el entorno de un punto Q en la topología usual, por las formas de acercarse a Q en la variedad, es decir por las valoraciones del cuerpo de funciones centradas en Q. Entonces la conjetura clásica de que un entorno de Q se puede representar por un numero finito de series de potencias se traduce en : Toda valoracion con centro Q se puede uniformizar con respecto a V, es decir:

Existe un transformado birracional W de V, tal que :

1) El centro de la valoración en W es un punto simple P
2) El anillo local de V en Q está contenido en el anillo local de W en P

Como prueba de que las valoraciones describen la verdadera topología de la variedad, Zariski extiende la idea de superficie de Riemann de una curva y es capaz de construir la superficie de Riemann de un cuerpo de funciones algebraicas arbitrario, dotando para ello de una topología natural al conjunto de valoraciones de dicho cuerpo. Con esta topología la superficie de Riemann es, como no podía ser menos, compacta, y ello abre el camino de la globalización de la uniformización local. Este ha sido el camino que ha seguido M. Spivakovsky para resolver el problema de uniformización y abordar la reducción de singularidades en cualquier dimensión y característica.

No tocaré aquí ni la equisingularidad, que es un problema de hoy, ni la reducción de singularidades, ya que, la introducción escrita por Hironaka al volumen 1 de las obras completas de Zariski explica, mucho mejor y más claramente de lo que yo podría hacerlo, la enorme aportación de Zariski a este problema y a la uniformización local. Su trabajo abrió el camino de Hironaka para la reducción general en característica cero y ha abierto el nuevo de Spivakovsky para la característica positiva.

Hironaka cuenta que cuando indicó a Zariski su interés por dedicarse al problema general de resolución, Zariski le dijo "*Va a necesitar fuertes dientes para morderlo*". Y respecto a la actitud de Zariski una vez que lo resolvió, Mumford dijo a C. Parikh :

Fue quizás esta vez, más que ninguna otra, cuando Oscar se dio cuenta de que uno de sus estudiantes había hecho algo que a él le gustaría haber hecho, pero para él habría sido imposible resolver el problema general con las herramientas de que disponía en su época. Desarrolló la mitad del instrumental abstracto necesario pero se quedó corto en algunas direcciones. Y respecto a los métodos de Grothendieck, cuando *se dio cuenta de lo que Hei (Hironaka) había hecho con ellos, fue muy feliz, pero prefirió quedarse al margen*

6. Final

Las lineas anteriores no son completamente justas acerca de la actitud de Zariski respecto de los nuevos métodos de la geometría. Yo no creo las palabras sobre ello, o al menos no les doy el mismo sentido, que su biógrafa C. Parikh pone en boca de uno de sus "jovenes colegas" (es casi la unica cita de la que no dice el autor) *"Me estan devolviendo lo que yo hice a mis maestros italianos"*.

Zariski sabía perfectamente, él mejor que nadie, que lo único que hizo a sus maestros italianos, fue respetarlos, defenderlos a ultranza, y preservar sus conocimientos y enseñanzas de la mejor manera posible, no momificándolos en un mausoleo, sino haciéndolos crecer, adaptándolos a los nuevos tiempos y transmitiéndolos a las nuevas generaciones. Claro está que eso es también esencialmente lo que hace Grothendieck con la obra de Zariski, por ello no veo en las palabras citadas que, si alguna vez fueron pronunciadas lo fueran con amargura y menos con espiritu de culpabilidad.

La verdad es que Zariski se adaptó bastante bien a los nuevos tiempos. Cuando uno tiene las ideas claras, y él las tenía muy claras, no lo despistan los cambios de lenguaje. Así su informe [34] del Bulletin de la Sociedad Matemática Americana de 1956 comienza diciendo:

Los métodos cohomológicos, en conexión con la poderosa herramienta que son las integrales harmónicas, son notablemente efectivos en la solución de problemas globales en la geometría algebraica compleja. Es natural preguntarse si los métodos cohomologicos serán igualmente efectivos en geometría algebraica abstracta, donde las integrales harmónicas no son utilizables.

Y hay que decir en su honor que en él resulta mucho mas fácil comprender y manejar los haces coherentes que en el trabajo de Serre (F.A.C.) sobre el que versa esencialmente el informe. Esta es otra de las facetas fundamentales de Zariski, su enorme capacidad para transmitir. Su libro de álgebra conmutativa escrito con P. Samuel sigue siendo 36 años después de su publicación una referencia obligada, y un libro imprescindible para quienes quieren estudiar geometría algebraica. Sus artículos son profundos pero a la vez extraordinariamente claros, y están llenos de ideas siempre nuevas.

A la vez fue un maestro excepcional, su nómina de discípulos o personas sobre las que tuvo una influencia decisiva es impresionante, Rosenlicht, Gorenstein, Nagata, Igusa, Falb, Abhyankar, Artin, Hironaka, Mumford, Lipmann, Harsthorne, Kleimann, Teissier,Spivakovski, etc.

¿Cual fue la sensación que quedó en Italia a raíz del proceso renovador de Zariski? Está muy bien recogida por Salmon.[19]

La refundación de Weil no tuvo eco en Italia,los matemáticos italianos atados por sus prejuicios, no encontraban fácil discernir, en los trabajos de Zariski, lo que era pura teoría de ideales y lo que era geometría, lo cual pensaban que era una trampa que *alejaría hacia el álgebra a los geómetras. El peso del inmediato y glorioso pasado, que suponían Castelnuovo Enriques y Severi era inmenso, la esperanza de que los métodos tradicionales de la escuela italiana pudieran dar todavía frutos se encontraba con una realidad que transformaba el deseo en ilusión, a la admiración por la Geometría algebraica se le sobreponía siempre pena y nostalgia y se trabajaba en temas marginales. Así quedaba severamente restringida la difusión de las nuevas ideas y no existía la necesaria revisión crítica que permitiese el relanzamiento de la geometría algebraica*

Sin embargo, fueron, la presión ambiental por el debate análisis - geometría, y la pugna por buscar sus señas de identidad, entre las dos escuelas geométricas que recibieron la herencia de Riemann, lo que llevó a la escuela italiana, en contra de las ideas de C. Segre, a la geometrización exagerada, y fue Zariski quien hizo de puente, llevándola a sus orígenes por una parte y a su estado actual por otra. Zariski fue en suma, el que, para buscar las esencias más puras y tradicionales de su geometría, la recondujo al rigor a traves del algebra. Zariski entendió que es necesario podar el árbol para conservarlo, quitó de él el follaje innecesario y nos dio a los matemáticos de hoy la geometría, es decir la vida real.

Bibliografía

[1] ARTIN M. MAZUR B. *Zariski Topological and Other Early Papers.* En O. Zariski "Collected papers". Vol 3 M.I.T. Press Boston 1978.

[2] BRIGAGLIA A. *La matematica italiana dell'inizio del secolo e le sue proiezioni all'esterno.* Rend. Circ. Mat. Palermo. 1993. pp 393 - 407.

[3] CASTELNUOVO G. *Memorie Scelte.*N. Zanichelli. Bologna 1937.

[4] CASTELNUOVO G. *La Geometria Algebraica e la scuola italiana.*Actas congreso internacional de Bolonia de 1928. Vol 1.

[5] CILIBERTO C. *A few coments on some aspects of the mathematical work of F. Enriques.* En "Geometry and Complex Variables " Editado por S. Coen. Marcel Dekker.N.Y. 1991.

[6] COEN S. *Geometry and Complex Variable in the work of B. Levi.*En "Geometry and Complex Variables " Ed. S. Coen. Marcel Dekker. N.Y. 1991.

[7] DIEUDONNE *Cours de Géométrie Agébrique.*P. U. F. Paris 1974.

[8] DOLGACHEV I. *Enriques Surfaces, old and new.* En "Geometry and Complex Variables"Ed. S. Coen. Marcel Dekker. N.Y. 1991.

[9] ENRIQUES F. *Le superficie algebriche.*N. Zanichelli. Bolonia 1949.

[10] ENRIQUES F. *Sulla construzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di dirramazione*. Ann. Mat. Pura e Appl. IV, Vol 1. 1923.

[11] ENRIQUES F. Chisini O. *Teoria Geometrica della equazioni e delle funzioni algebriche*.Ed. N. Zanichelli. Bologna 1915.

[12] GARIO P. *Singolarità e Geometria sopra una superficie nella Corrispondenza di C. Segre a G. Castelnuovo*. Arch. for the History of Ex. Sci. 43, 1991, n. 2, pp 145 - 188.

[13] HIRONAKA H. *Zariski papers on resolution of singularities*. En O. Zariski "Collected papers". Vol 1 M.I.T. Press Boston 1972.

[14] LIPMAN J. TEISSIER B. *Zariski papers on Equisingularity*. En O. Zariski "Collected papers". Vol 3 M.I.T. Press Boston 1979.

[15] MUMFORD D. *Zariski papers on the foundations of Agebraic Geometry*. En O. Zariski "Collected papers". Vol 1 .I.T. Press Boston 1972.

[16] MUMFORD D. *Zariski papers on Linear Systems*. . En O. Zariski "Collected papers". Vol 2 .I.T. Press Boston 1976.

[17] MUMFORD D.*Lectures on curves on an Agebraic Surface*. Princeton Univ. Press 1964.

[18] PARIKH C. *The unreal life of Oscar Zariski*. Academic Press Boston 1991.

[19] SALMON P. *Le origini dell'algebra conmutativa in Italia*. Rend. Sem. Mat.Univ. Pol. Torino. Vol 48, 4, 1990. pp 431 - 438.

[20] SEGRE C. *Opere* . Ed. Cremonese, Roma. Vol I, 1957. Vol II, 1958. Vol III, 1961. Vol IV 1963. Prefacios de F. Severi, A. Terracini, B. Segre, E.G. Togliati.

[21] SEGRE C. *Su alcuni indirizi nelle investigazioni geometriche*. Rivista di Mat. I .1891, pp 42 - 66.

[22] SEGRE C. *La geometria d'oggidi e i suoi legami coll'analisi*. Rend. Circ. Mat. Palermo. T. XIX, 1905, pp81 - 93.

[23] SEGRE C. *Commemorazione del socio nazionale Giusseppe Veronese*. Atti RealAcad. Lincei. Ser. V, vol XXVI , 1917, pp249 - 258.

[24] SEVERI F. *Vorlesungen uber Algebraische Geometrie*. Teubner. Leipzig 1921.

[25] SEVERI F. *Introduzione alla Geometria Algebrica*. Geometria Numerativa. De. Univ. Roma 1947.

[26] SEVERI F. *Le corrispondeze singolari fra i punti di una curva variabili in un sistema lineare sopra una superficie regolare*. Math. Ann. vol 74. 1913.

[27] VAN DER WAERDEN B.L. *The foundations of Algebraic Geometry from Severi to André Weil*. Arch. Hist. Exact Sci. 7, 3. 1971. pp 171 - 180.

[28] WEIL A. *Œuvres Scientifiques*. Springer 1980 (2ª Ed.).

[29] WEIL A. *Foundations of Algebraic Geometry*. A. M. S. Col. Pub. Vol XXIX. Providence R.I. 1962.

[30] ZARISKI O. *Collected Papers*. 4 Volumenes. M.I.T. Press. Boston. Vol 1,1972. Vol 2, 1976. Vol 3, 1978. Vol 4, 1979.

[31] ZARISKI O. *Algebraic Surfaces.*Chelsea Pub. New York. 1948.

[32] ZARISKI O. *The fundamental Ideas of abstract Algebraic Geometry.* Actas del Congreso Internacional de Matematicas de 1950. Cambridge Mass.Vol 2 . pp 77 - 89. Reimpreso en Coll. papers Vol 3.

[33] ZARISKI O. *Applicazioni geometriche della teorie delle valutazioni.* Rend. di Mat. e delle sua Apl. Ser V, Vol XIII, Fasc. 1-2. Roma 1954.pp 1- 38. Reimpreso en Vol 3 C.P.

[34] ZARISKI O. *Algebraic Sheaf Theory.* Bull. Amer Math. Soc. Vol 62. 1956. pp117 - 141.