

Einstein

DARÍO MARAVALL CASESNOVES*

Es muy difícil hacer un ranking de los grandes científicos, lo que por otra parte es innecesario y hasta desagradable, pero si se hiciera por encuesta, seguramente Einstein ocuparía el primer lugar o al menos uno de los primeros. Pertenece a ese escaso número de físicos, de los que se puede hablar de la física antes de él y después de él. Llegó a ser un personaje muy popular, es el creador de la Teoría de la Relatividad, y sus aportaciones a la Mecánica Cuántica fueron de primera fila; su influencia en la Metodología y Filosofía científica fue muy grande y abrió nuevos horizontes a la Matemática, no solamente con sus investigaciones, sino también por el estímulo que despertó en otros matemáticos para dar respuesta a los nuevos problemas físicos que originaron sus teorías. Su personalidad humana y las circunstancias históricas que vivió fueron enormemente interesantes.

Einstein nació el 14 de Marzo de 1879 en Ulm, que entonces pertenecía al reino de Württemberg integrado en el imperio alemán recientemente creado el 18 de enero de 1871 en la Galería de los Espejos de Versalles. Ulm está en Suabia en el sudoeste alemán, lindante con Baviera, era una vieja ciudad con una catedral gótica del siglo XV, situada en la margen izquierda del Danubio, cerca de los Alpes suabos, con una población de unos 30.000 habitantes, de los que más de dos terceras partes eran católicos, y la otra casi tercera parte luteranos, y con sólo unos centenares de judíos. Ulm tenía historia; en los siglos XIII a XV, que fue la edad de oro de las ciudades alemanas, formó parte de la liga de Suabia que con la liga del Rin, ambas en el sur, y la Hansa del norte formaron las tres grandes ligas de ciudades alemanas. El 14 de marzo de 1647 Maximiliano de Baviera firmó en Ulm, por separado, con Francia y Suecia la paz, abandonando la causa del Imperio y de España, acontecimiento que condujo a la paz de Westfalia el 24 de octubre de 1648 que puso fin a la guerra de los treinta años en Alemania con grave quebranto para el Sacro Imperio Romano Germánico. De nuevo en 1805, Ulm volvió a ser importante en la Historia, el 19 de octubre el ejército austriaco capituló allí ante Napoleón, poco después tuvo lugar la batalla de Austerlitz el 2 de diciembre, y el 26 de diciembre por la paz de Presburgo el Emperador perdía todas sus posesiones alemanas e italianas y Baviera y Württemberg se convertían en reinos. El 1 de agosto de 1806 desaparecía finalmente el Sacro Imperio Romano Germánico. Contribuyó a este importante acontecimiento histórico no solamente las victorias de Napoleón sino también los intereses dinásticos de Francisco II de Habsburgo, porque por primera vez en la Historia, los católicos habían perdido la mayoría en el Colegio

* Académico Numerario

Electoral, por lo que el emperador Francisco II estableció el imperio hereditario de Austria el 11 de agosto de 1804, para asegurar la dignidad imperial, para él y sus sucesores. Por tanto en dos ocasiones en 1647 y en 1805 Ulm fue escenario de dos importantes hechos históricos trágicos para el Sacro Imperio.

La ascendencia de Einstein era toda judía, pero cuando él nació los judíos estaban muy integrados en el Imperio y la cultura alemana. La lectura de la Biblia era compartida con la de los grandes literatos alemanes Schiller, Lessing, Heine. La casa en que nació Einstein en Ulm fue destruida en un bombardeo en la segunda guerra mundial. De todas formas Ulm tuvo poca influencia en la vida de Einstein, porque al año siguiente de su nacimiento, sus Padres se fueron a vivir a Munich, donde se inscribieron como residentes el 21 de junio de 1880, allí nació su hermana Maja el 18 de noviembre de 1881.

En el Imperio alemán la enseñanza primaria estaba en manos de las Iglesias oficialmente reconocidas y como los Padres de Einstein no eran intransigentes de la religión mosaica, llevaron a su Hijo a una escuela pública católica, donde a pesar de ser el único niño judío de su clase, no tuvo problemas con sus compañeros y Profesores. En 1888 fue al Instituto (Gymnasium) Luitpold, donde allí ya se le instruía oficialmente en su religión. Los niños alemanes iban al Gymnasium de los 10 a los 18 años, pero Einstein no pudo completar su estancia en el mismo, porque en 1894 sus Padres se trasladaron a Italia, por asuntos económicos graves, y aunque él permaneció en Munich, lo abandonó en 1895 sin terminar el curso. Aunque Einstein tuvo una fase profundamente religiosa hacia 1890, ésta fue corta y nunca fue un hombre religioso. Le quedó un profundo descontento y malestar no solamente del militarismo alemán y del espíritu prusiano sino también de la práctica de la enseñanza secundaria en Alemania. Desde el principio se interesó por la Ciencia y se encuentran entre sus lecturas favoritas "libros populares sobre Ciencias Naturales" de Bernstein y "Fuerza y Materia" de Buchner, libros muy de moda en aquellos años, y le impresionó mucho a los doce años el estudio de un texto de geometría euclídea.

El Gymnasium Luitpold fue destruido por un bombardeo en la segunda guerra mundial, reconstruido después en otro sitio, recibió el nombre de Einstein.

Decide ingresar en la Escuela Politécnica de Zurich (EPZ) y en el otoño de 1895 no aprueba los exámenes de ingreso, a pesar de sus excelentes resultados en Matemáticas, por lo que decide obtener el diploma de estudios secundarios (el bachillerato) en la escuela cantonal de Aarau, para poder estudiar en la EPZ sin examen de ingreso. En Aarau quedó muy satisfecho de la enseñanza suiza y vivió en casa de uno de sus Profesores: Winteler, con cuya familia estableció lazos que duraron toda su vida; su hermana Maja, muy unida a él, se casó con un hijo de este Profesor, y el que fue su gran amigo el ingeniero italiano Miguel Ángel Besso, se casó con una hija de este Profesor. La correspondencia de Einstein y Besso duró toda su vida, ha sido publicada y constituye un importante documento de Historia de la Física. En esta época abandona la nacionalidad alemana (oficialmente el 28 de enero de 1896) y durante cinco años es apátrida.

De octubre de 1896 a agosto de 1900 estudia en la EPZ hasta obtener el diploma de Profesor de Física y Matemáticas de enseñanza secundaria (bachillerato). Esta institución docente es federal y goza de un gran prestigio entre las universidades de

lengua alemana. Allí tiene como Profesores a los grandes matemáticos: Hurwitz (cálculo diferencial e integral) y Minkowski (teoría de números y de funciones, ecuaciones diferenciales, mecánica racional). También tiene otros buenos profesores de matemáticas: Fiedler (geometría descriptiva) Geiser (Geometría analítica) Hirsch. No quedó satisfecho de su Profesor de Física Weber. Su Profesor Minkowski cuando conoció los primeros trabajos de Einstein sobre la Relatividad restringida, se quedó muy extrañado de que su antiguo alumno hiciera una obra de tal importancia, y el mismo poco después estableció el formalismo matemático en el espacio de cuatro dimensiones para explicar la Relatividad restringida. En su época de estudiante en la EPZ estudió por su cuenta la Física en los textos originales de los grandes maestros: Helmholtz, Kirchoff, Boltzmann, Hertz y Maxwell (éste último traducido al alemán). Su expediente académico fue brillante obteniendo una calificación media de 4,91 sobre un máximo de 6 obteniendo 5 en Física teórica, Física práctica y Astronomía, 5,5 en Teoría de Funciones, 4,5 en la tesina.

No consiguió al terminar sus estudios un puesto docente como ayudante en la EPZ, ni en otras Universidades. Solicitó este puesto entre otros a Ostwald en Leipzig y a Kammerling Onnes en Leiden, ambos premios Nobel en 1909 y 1913 respectivamente que no le aceptaron. El 21 de febrero de 1901 obtuvo la nacionalidad suiza. Pasó años difíciles desde que terminó la carrera el 27 de julio de 1900 hasta el 16 de junio de 1902, en que obtuvo un puesto de trabajo en la Oficina de Patentes de Berna, por recomendación de la familia de un compañero de estudios Grossmann, más tarde colaborador suyo en la Teoría de la Relatividad.

El 6 de enero de 1903 se casó con Mileva Maríc, discípula suya, que pertenecía a la minoría serbia del Reino de Hungría, dentro del Imperio Austrohúngaro, de la que se divorciaría en 1919, con la que tuvo un hijo que fue ingeniero de la EPZ y Profesor de Hidráulica en la Universidad de Berkeley. Sobre su primera mujer la yugoeslava Trbuhovic Gjunic escribió una biografía en la que relata la influencia decisiva de ella en los primeros trabajos de Einstein que le valieron el Premio Nobel en 1921. Un sector del movimiento feminista retomó esta idea, llegando incluso a considerarla coautora con Einstein de al menos la Relatividad restringida, pero esta tesis parece absurda e injustificada ya que no existen ni los más ligeros indicios de verosimilitud de la misma.

En 1903 con Habicht y Solovine funda en Berna, lo que festivamente llamaron Academia Olympja en la que discutían de Física y Filosofía, más tarde se incorporó Besso. Solovine fue después traductor al francés de Einstein y mantuvo con él una larga correspondencia que ha sido publicada y constituye un buen documento histórico. En aquel tiempo fueron lecturas favoritas de Einstein los textos de Hume, Mach y Kant, los dos primeros fueron los filósofos que más influyeron sobre Einstein.

Aunque ya había publicado algunos trabajos, la súbita aparición de Einstein tuvo lugar en 1905. En este aspecto este año en la vida de Einstein es comparable a 1666 para Newton, en que a los veinticuatro años tuvo simultáneamente sus grandes ideas básicas para el descubrimiento de la ley de la gravitación universal, del cálculo infinitesimal y de la naturaleza compuesta de la luz blanca.

1905 es año del *Sturm und Drang* mental de Einstein que se condensa en dos meses o poco más, aunque en realidad llevaba una década incubando su explosión científica. En 1905 del 17 de marzo al 19 de diciembre envía cinco trabajos a los *Annalen der Physik* sobre los cuantos de luz el primero, sobre el movimiento browniano el segundo y el último, y sobre la Relatividad restringida los otros dos; así mismo presenta su tesis doctoral sobre una nueva determinación de las dimensiones moleculares. Todos ellos son de una importancia excepcional.

En 1827 el botánico escocés Brown descubrió el movimiento que lleva su nombre, primero en una suspensión en agua de granos de polen, se trata de un movimiento caótico y en zig zag, que aumenta al disminuir el tamaño de las partículas en suspensión y la viscosidad del líquido y al aumentar la temperatura. El propio Brown, pronto se dio cuenta de que el movimiento browniano nada tiene que ver con pequeños seres vivos, porque también se observa en suspensiones de partículas inorgánicas. Posteriormente se comprobó que era independiente de perturbaciones mecánicas, acciones capilares, irradiación del líquido (cuando no hay aumento apreciable de la temperatura), existencia de corrientes de convección y gradientes de temperatura. Hacia 1860 se estimó que la causa del movimiento browniano era debida a colisiones de las partículas en suspensión con las moléculas de líquido, llegó a parecer que contradecía la segunda ley de la Termodinámica, pues parecía posible poder construir con él un *perpetuum mobile* de segunda especie. El propio Poincaré en 1904 en una conferencia sobre "la crisis de la Física Matemática" en el congreso de San Luis, consideró que a causa del movimiento browniano la segunda ley de la Termodinámica estaba en peligro, pues parecía que este movimiento se transformaba en calor por rozamiento e inversamente el calor se transformaba en movimiento, parecía que era la manera de actuar del famoso demonio de Maxwell.

Se observó el movimiento browniano en partículas en suspensión en un gas en 1908 por el Duque de Broglie (hermano del creador de la Mecánica Ondulatoria).

En 1906 y 1907 Einstein hace nuevas contribuciones al movimiento browniano y lo extiende a las fluctuaciones del potencial eléctrico entre las dos placas de un condensador. En 1908 escribió una exposición elemental de la teoría del movimiento browniano. En 1915 escribiría que el movimiento browniano aparte de permitir un cálculo muy exacto del número de Avogadro permite también ver la energía térmica de las moléculas del líquido como energía mecánica de las partículas en suspensión. Poco después de Einstein en 1906 Von Smoluchovski, Profesor de Física Teórica en Lemberg (hoy Lvov) publicó una teoría cuantitativa del movimiento browniano, ambos científicos se mantuvieron en buenas relaciones e intercambiaron varias cartas. También casi coincidieron en el tiempo en el análisis teórico de otro importante fenómeno el de la opalescencia crítica, en conexión con el azul del cielo al amanecer y el enrojecimiento al atardecer, fenómeno que ya Tindall en 1869 había explicado por la dispersión de la luz por partículas de polvo en el aire y del que se ocupó también Lord Rayleigh. En esto se adelantó Smoluchovski que en 1908 atribuyó este fenómeno a grandes fluctuaciones de densidad, que es lo que explica el fuerte incremento de la dispersión de la luz al atravesar un gas en las proximidades de la temperatura del punto crítico. El trabajo de Einstein es de 1910.

Tanto el movimiento browniano como la opalescencia crítica pertenece a la Física Estadística clásica. El movimiento browniano fue considerado en su día como la mejor prueba de la existencia de las moléculas, sobre todo después de los trabajos experimentales de Perrin (premio Nobel en 1926) y es prácticamente el punto final del largo debate entre atomistas y energetistas que negaban la existencia real de los átomos, que los consideraban como una hipótesis de trabajo. Fueron famosos antiatomistas entre otros Ostwald y Mach.

La ecuación fundamental del movimiento browniano de Einstein y Smoluchovski expresa que el desplazamiento medio cuadrático de la proyección del movimiento de una partícula sobre una recta es directamente proporcional a la temperatura, al tiempo de observación y a la constante de Boltzmann, e inversamente proporcional a la viscosidad y al radio de la molécula. En 1908 Langevin dio otro método para obtener esta ecuación a partir de la que lleva su nombre, y es el que habitualmente se sigue.

El origen de la teoría de los Cuantos está en la obtención por Planck en 1900 de la ley de la repartición espectral de la energía de la radiación del cuerpo negro. Para obtenerla Planck tuvo necesidad de hacer la hipótesis de que la energía radiante era absorbida o emitida por cantidades discretas que eran proporcionales a la frecuencia, siendo el coeficiente de proporcionalidad la constante h que lleva su nombre; que él calculó, y que es una de las constantes más importantes de la naturaleza. Planck no hizo ninguna hipótesis sobre la estructura de la energía de la radiación en el intervalo del tiempo que media entre su emisión y su absorción, la estructura discontinua de la radiación se refería exclusivamente a los mecanismos de emisión y absorción.

El trabajo de Einstein de 1905 lleva por título "Sobre un punto de vista heurístico referente a la generación y transformación de la luz" y para dar una explicación teórica del efecto fotoeléctrico totalmente incomprensible dentro del marco de la naturaleza ondulatoria de la luz, Einstein retoma el punto de vista corpuscular y supone que la luz está formada por corpúsculos (cuantos de luz) que poseen una energía $h\nu$ que es el producto de la constante h de Planck por la frecuencia de la luz, ν de modo que los cuantos de luz azul poseen más energía que los de la luz roja; halló de esta manera la fórmula que lleva su nombre, muy sencilla desde el punto de vista matemático, que expresa la energía E de los fotoelectrones dependiendo linealmente de la frecuencia

$$E = h(\nu - \nu_0) \quad (1)$$

donde ν_0 es un umbral de frecuencias. Por tanto si la luz incidente tiene una frecuencia inferior a ν_0 , no hay emisión de fotoelectrones. Es la segunda aparición de la constante h de Planck en la Física.

El efecto fotoeléctrico era conocido desde hacía unos veinte años, lo descubrió Hertz en 1888 en sus experiencias que demostraron la naturaleza electromagnética de la luz, confirmando las ecuaciones de Maxwell. Hertz observaba la descarga de chispas entre dos superficies metálicas generadas por una diferencia de potencial, al aumentar la distancia entre las superficies metálicas desaparecían las chispas, pero al iluminarlas con la luz procedente de un arco eléctrico reaparecían las chispas, llegó a la conclusión

de que para obtener el fenómeno de la producción de las chispas por la luz, ésta tenía que ser ultravioleta.

En 1888 Hallwachs siguiendo a Hertz, observó que al irradiar con luz ultravioleta cuerpos metálicos descargados, estos adquirirían una carga positiva.

Fue J.J. Thomson el primero en observar que el efecto fotoeléctrico es debido a la emisión de electrones, determinando el valor del cociente e/m de la carga eléctrica por la masa y obteniendo el mismo valor que para los rayos catódicos, pero hasta 1897 no pudo medir por separado los valores de e y m , comprobando que e tiene el mismo valor que la carga del átomo de hidrógeno en la electrólisis de las soluciones. Por esta razón se atribuye a Thomson el descubrimiento del electrón y se fija la fecha en 1897. En 1906 obtuvo el premio Nobel. Su hijo lo obtendría en 1937 con Davisson por obtener, por separado, la difracción de electrones por cristales. Davisson realizó sus experiencias con Germer.

Lenard en 1902 demostró que la energía de los fotoelectrones es independiente de la intensidad luminosa, depende solamente de la frecuencia. En 1905 recibió el premio Nobel.

Einstein por tanto se apoyó en las investigaciones teóricas de Planck y las experimentales de Lenard. Es curioso señalar que estos dos físicos estuvieron durante toda su vida muy ligados a Einstein. Planck fue un buen amigo suyo y le apoyó mucho, mientras que Lenard por motivos políticos fue siempre un tenaz enemigo de Einstein y de la Relatividad.

Einstein dio otras aplicaciones de su principio heurístico como son: a) la regla de Stokes que afirma que en la fotoluminiscencia la luz emitida no puede tener una frecuencia superior a la de la luz incidente; b) en la fotoionización la energía del electrón emitido no puede exceder de $h\nu$, donde ν es la frecuencia de la luz incidente. En 1906 analizó el efecto Volta que es el fotoefecto inverso, en 1909 la generación de rayos catódicos secundarios mediante rayos X y en 1911 predijo el límite de alta frecuencia para el *Bremsstrahlung* (radiación de frenado).

Con posterioridad a 1905 varios físicos estudiaron profundamente el efecto fotoeléctrico comprobando la ecuación (1) de Einstein. En 1915 Millikan obtuvo para la constante de Planck utilizando la ecuación de Einstein el valor

$$h = 6,57 \times 10^{-27} \text{ erg. seg}$$

Planck en 1901 había obtenido para su constante el valor:

$$h = 6,55 \times 10^{-27} \text{ erg. seg}$$

El valor moderno es

$$h = 6,63 \times 10^{-27} \text{ erg. seg}$$

En 1915 Duane y Hunt obtuvieron experimentalmente el límite que lleva su nombre en la generación de rayos X que había sido predicho por Einstein.

Los trabajos de Einstein sobre Relatividad restringida de 1905 llevan fechas de 30 de junio y 27 de septiembre, suponen no solamente una auténtica revolución en la Física, sino como diría Bergson en 1922 una nueva forma de pensar. Se cambian radicalmente nuestras ideas sobre el espacio y el tiempo, sobre la simultaneidad de sucesos, la manera de medir distancias y duraciones, se fija la velocidad de la luz en el vacío como el límite máximo de las velocidades, y se establece la equivalencia de masa y energía mediante la ecuación:

$$E = mc^2 \quad (2)$$

en la que E es la energía correspondiente a la masa m en reposo y la c la velocidad de la luz en el vacío. Se abre la posibilidad de la aniquilación de la materia por transformación en energía radiante y de la materialización de la energía, que es el fenómeno inverso.

El camino hacia la Relatividad fue largo y difícil. Einstein tuvo precursores entre los que destacaban Lorentz y Poincaré, le fue allanado el camino por la crítica filosófica de la mecánica newtoniana hecho por Mach y por el experimento Michelson-Morley.

Galileo había puesto fin a la Física aristotélica y Newton culminó la obra que dio origen a la Física nueva, había establecido como absolutos el espacio y el tiempo. Para él el espacio era infinito, adaptado a la geometría euclídea, no era afectado por la materia que contenía, ni por el acontecer de los fenómenos físicos, y servía como sistema de referencia para situar en él los cuerpos materiales. El tiempo es infinito, transcurre uniformemente, su estructura matemática es la del número real, no es afectado por la materia ni por el movimiento, ni por el lugar del espacio en que se mide. El espacio es como una caja y el tiempo como un río. Newton apoyaba su concepción del espacio absoluto en su célebre experimento de la rotación de un cubo cilíndrico lleno de agua, decía que al comenzar el movimiento de rotación del cubo, la superficie del agua está plana, pero luego el agua comienza a subir por las paredes del cubo hasta formar una superficie parabólica, debido a la fuerza centrífuga. Al principio el agua está en reposo, gira solamente el cubo, existe por tanto un movimiento relativo entre el cubo y el agua. Al final cuando la superficie del agua toma la forma de un paraboloides de revolución, el agua se mueve con el cubo, ya no hay movimiento relativo entre ambos, están en reposo relativo, el sistema cubo-agua está en movimiento de rotación absoluto respecto al espacio absoluto.

En la mecánica newtoniana el movimiento de un punto o de un sistema material se estudia en relación a un cuerpo real o supuesto, que puede ser sustituido por tres ejes de coordenadas invariablemente ligados a él, que constituyen lo que se llama un sistema de referencia o referencial, respecto al cual se fija la posición de cualquier punto mediante sus coordenadas, y el tiempo es una variable universal, independiente del espacio. Dentro de los referenciales son notables los llamados inerciales o de Galileo, son aquellos en los que es válido el principio de la inercia, según el cual un punto material sobre el que no actúa ninguna fuerza está en reposo o se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo, o más generalmente un referencial en el que es válida la ley newtoniana de que la aceleración de un punto material multiplicada por la

masa es igual a la fuerza aplicada. Existe al menos un referencial inercial que es el de Copérnico formado por un triedro con su vértice en el centro de gravedad del sistema solar (casi en el centro del Sol) y con sus aristas dirigidas hacia tres estrellas fijas (hoy tres galaxias). Se demuestra por el principio de la relatividad de Galileo que todo referencial animado de un movimiento uniforme y rectilíneo respecto a un referencial inercial es también inercial. Cualquier referencial que se mueva de otra manera respecto a uno inercial, no es inercial, y en él el producto de la masa por la aceleración de un punto material es igual a la suma de las fuerzas aplicadas y de inercia (fuerzas centrífugas y centrífugas compuestas). Por ejemplo el péndulo de Foucault que demuestra la rotación de la Tierra, se estudia en un referencial no inercial.

En la Mecánica newtoniana las fuerzas obraban instantáneamente y a cualquier distancia (teoría de la acción a distancia), pero el desarrollo de la Óptica y de la Electrodinámica obligó a los físicos a llenar el espacio vacío con el éter y sustituir la acción a distancia por la acción por contacto, que se transmitía entre puntos contiguos y tardando un tiempo en transmitirse, noción básica es el concepto de campo introducido por Faraday y perfeccionado por Maxwell. Hubo muchas teorías sobre el éter: de Fresnel, Cauchy, Stokes, Neumann., Kelvin, Hertz; había un éter para la luz, otro para el calor, la electricidad, el magnetismo, el cual llenaba el espacio vacío.

En 1881 Michelson y en 1887 Michelson y Morley realizaron un experimento crucial para averiguar si un rayo de luz que se propaga en el mismo sentido que la traslación de la Tierra alrededor del Sol, lo hace con velocidad distinta que otro que se propaga en sentido contrario. El resultado del experimento fue que los dos rayos de luz llevaban la misma velocidad, lo que estaba en contradicción con el teorema de la adición de velocidades de la Mecánica clásica. El resultado de este experimento fue teóricamente demostrado con el teorema de la adición de velocidades de Einstein de 1905, de acuerdo con la nueva Mecánica Relativista.

Por otra parte los nuevos sistemas filosóficos de Mach y Poincaré muy de moda a fines del siglo XIX y principios del XX también facilitaron el advenimiento de la Relatividad restringida. La crítica de Mach a la Mecánica newtoniana fue decisiva. Para Mach las leyes de la Física son resúmenes de observaciones presentadas en la forma más simple, estableció el criterio de la economía de pensamiento, según el cual el criterio para la valoración de una teoría física está en sintetizar en el menor número posible de principios el mayor número posible de hechos observados. Con ello sentó las bases del neopositivismo que exige emplear únicamente proposiciones que puedan deducirse de la observación de los fenómenos físicos. Para Mach no había en la Mecánica newtoniana ningún elemento que fuese por sí mismo evidente para la inteligencia humana, y el espacio y el tiempo absolutos no pueden ser definidos en términos observables, su definición está fuera de toda observación. Hay que sustituir el espacio absoluto por las estrellas fijas, así el principio de inercia hay que enunciarlo en el sentido de que cuando no actúa ninguna fuerza sobre un punto material, su movimiento con relación a las estrellas fijas (referencial de Copérnico) es rectilíneo y uniforme. En su crítica del experimento del cubo de agua de Newton, considera que el movimiento no es en relación con el espacio absoluto, sino relativo a las restantes masas del universo, que es en lo que reside la causa de la fuerza centrífuga. El principio de Mach afirma que "la masa inercial no es una característica intrínseca de un móvil, sino

una medida de su acoplamiento con el resto del universo". Las fuerzas de inercia en los referenciales no inerciales son una consecuencia de este acoplamiento. La influencia de la filosofía de Mach en la Teoría de la Relatividad y en la Mecánica Cuántica ha sido muy grande.

Otra dirección en la crítica de la Mecánica newtoniana distinta de la de Mach, haciendo notar que los postulados de la Mecánica newtoniana no son exigencias de la razón humana, es la de la Filosofía de Poincaré, para quien las leyes generales de la Física son libres creaciones de la mente humana. Su doctrina filosófica ha sido denominada convencionalismo, y según ella las proposiciones generales de la ciencia no son exposiciones de realidades sino como deben de ser empleados determinados conceptos en la Ciencia, son libres creaciones del espíritu humano sobre las que no tiene sentido preguntarse si son verdaderas o falsas, sino si son útiles o no. El empleo de estos conceptos está justificado si por medio del experimento se pueden comprobar los fenómenos a los que nos referimos con tales conceptos. Por ejemplo la ley de la inercia se puede enunciar diciendo que "cuando un cuerpo se mueve sin ser influido por ninguna fuerza, su movimiento se llama rectilíneo y uniforme". También la filosofía de Poincaré influyó en el nacimiento de la nueva Física del siglo XX.

En 1909 Philip Frank introdujo el nombre de grupo de Galileo para designar el conjunto formado por las transformaciones de Galileo T_g que son las transformaciones de coordenadas para pasar de un referencial inercial a otro. Las transformaciones euclídeas son un subgrupo del grupo de Galileo. Se sabía de mucho antes que las transformaciones del grupo de Galileo dejan invariantes las ecuaciones de la mecánica, o lo que es lo mismo que por fenómenos mecánicos no podemos darnos cuenta del movimiento rectilíneo y uniforme, que no hay posibilidad de distinguir un referencial inercial de otro. Es lo que hoy se llama principio de relatividad de Galileo.

Se sabía también que las transformaciones del grupo de Galileo no dejan invariante la ecuación de propagación de las ondas, y que el experimento Michelson-Morley para verificar el movimiento de la Tierra en el éter había dado resultado negativo. Ello condujo a que varios Físicos intentasen por una parte eliminar el éter como medio material, y por otra sustituir las transformaciones del grupo de Galileo, por otras que dejasen invariante la ecuación de propagación de las ondas. Estas nuevas transformaciones son las de Lorentz (TL).

En 1887 Voigt obtuvo por primera vez las TL salvo un factor de escala constante. En 1889 FitzGerald introdujo la hipótesis de la contracción de los cuerpos en movimiento (contracción longitudinal en el sentido del movimiento) para explicar el experimento Michelson-Morley. Larmor mostró la relación entre las TL y la hipótesis de la contracción y dio la forma exacta de las TL en 1898.

Lorentz en 1892 de manera independiente llegó a la hipótesis de la contracción longitudinal, en 1894 por carta a FitzGerald reconoció que su idea era posterior. En 1895 dio las fórmulas de transformación del campo electromagnético y de la polarización eléctrica para las TL salvo un factor de escala constante, y la forma de la fuerza de Lorentz que ejerce un campo electromagnético sobre una carga eléctrica. En 1899 obtuvo las TL salvo un factor de escala constante y en 1904 dio la forma exacta de las TL.

Poincaré en 1899 cuestiona el significado objetivo del concepto de simultaneidad en su artículo "La medida del tiempo". En 1900 y 1904 vuelve sobre estos temas en forma cualitativa, pero es en 1905, el 5 de junio en comunicación a la Academia de Ciencias de París, el 30 de junio en un trabajo publicado en los *Annalen der Physik* y en julio en un trabajo publicado en 1906 en los *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, donde simultáneamente con Einstein profundiza en la Teoría de la Relatividad, demuestra que las TL forman grupo, obtiene el mismo teorema de adición de velocidades de Einstein, y demuestra la covariancia de las ecuaciones de Maxwell y la invariancia para las TL de la expresión

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \quad (3)$$

El tercer trabajo de Poincaré de los últimamente antecitados es el más completo y el que contiene los resultados antes descritos, es posterior en pocas semanas al trabajo de Einstein.

Einstein en su trabajo de junio de 1905 llega a su Teoría a partir de los dos postulados: "las leyes de la Física toman la misma forma en todos los referenciales inerciales" (principio de la Relatividad restringida) y "en cualquier referencial inercial la velocidad de la luz es la misma, tanto si es emitida por un cuerpo en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme".

Mientras que para Lorentz y FitzGerald la contracción longitudinal es un efecto dinámico, debido a que las fuerzas moleculares en un cuerpo en reposo y en un cuerpo en movimiento son distintas, para Einstein es una consecuencia necesaria de sus dos postulados. Encuentra que sucesos que son simultáneos en un referencial inercial no lo son en otro. Define el instante de un suceso como la lectura de un reloj que está en el mismo lugar y en reposo respecto al suceso.

Dedujo las TL para asegurar la invariancia de la expresión (3) y demostró su estructura de grupo. Halló el teorema de la adición de velocidades. De las TL dedujo la contracción longitudinal y la dilatación del tiempo, la expresión relativista de la aberración de la luz en el cenit, la ley de transformación de las frecuencias luminosas, con lo que descubre el efecto Doppler transversal, la covariancia de las ecuaciones de Maxwell, la ley de transformación de la energía de un rayo de luz.

En su trabajo de septiembre de 1905 obtiene la equivalencia entre masa y energía (2). Seguramente la primera aplicación de esta relación (2) de Einstein fue el cálculo de la masa equivalente a la energía de ligadura molecular para el agua en 1907 hecho por Planck, que fue el primer físico que escribió sobre Relatividad después de Einstein y que en 1906 estableció la relación entre momento (cantidad de movimiento) y velocidad, las leyes de transformación del momento y de la energía, y el principio variacional. También demostró Planck la invariancia relativista de la acción y de su constante h .

Es curioso señalar que en 1907 Stark le invitó a redactar un resumen de la Relatividad para el anuario (*Jahrbuch*) de Radiactividad y Electrónica, encargo que cumplió Einstein, con este motivo se cursaron amables cartas entre ambos sabios. Stark era un físico experimental famoso, conocido por el efecto que lleva su nombre, que

recibió el premio Nobel en 1919. Posteriormente Stark y Lenard fueron enemigos declarados de Einstein, y sólidos apoyos de la Cultura Nazi, y de lo que se llamó el movimiento de la Física alemana en contraposición a la Física judía.

En noviembre de 1906 Einstein completó su comunicación sobre los calores específicos de los sólidos, que es el primer trabajo sobre la teoría cuántica del estado sólido, se publicó en 1907 en los *Annalen der Physik*. En 1802 Dulong y Petit enunciaron su ley de origen empírico que afirma que "a la temperatura ambiente el calor atómico a volumen constante de los sólidos simples (desde el punto de vista atómico) tiene un valor constante, aproximadamente 6 calorías por átomo-gramo y por grado Celsius". Obtuvieron este valor para muchos metales y el azufre. Esta ley durante muchos años fue utilizada para la determinación de los pesos atómicos. Otros muchos físicos investigaron sobre el calor específico de otras muchas sustancias, y comprobaron que había desviaciones importantes de la ley de Dulong y Petit en varios casos, entre ellos para el diamante para el que el valor era 1'8. En 1870 Weber, quien fue Profesor de Física de Einstein en la EPZ de Zurich, se planteó por primera vez la dependencia del calor específico con la temperatura, observando que entre 0° y 200° C el valor para el diamante variaba en un factor 3 y en 1875 realizó mediciones para el caso del boro, silicio, grafito y diamante para valores de la temperatura hasta 1000° C y llegó a obtener la conclusión de que a medida que baja la temperatura el calor específico tiende al valor de Dulong y Petit. Por la misma época Dewar confirmó las experiencias de Weber y mostró que para temperaturas muy bajas el valor del calor específico es muy pequeño. Boltzmann trató de explicar teóricamente la ley de Dulong y Petit, utilizando el teorema de equipartición de la energía de la mecánica estadística clásica, y obtuvo para el calor específico el valor $3 R$ (R constante de los gases perfectos) muy aproximado al de Dulong y Petit, pero la explicación era incorrecta por obtener un valor independiente de la temperatura.

Einstein, utilizando la ley de Planck de repartición espectral de la energía del cuerpo negro, obtuvo una fórmula bastante satisfactoria que para T (temperatura absoluta) tendiendo a cero, el calor específico tiende a cero, y para T tendiendo a infinito tiende a $3 R$. En 1912 utilizando la teoría cuántica Debye mejoró notablemente los resultados de Einstein.

La fórmula de Einstein está de acuerdo con la tercera ley de la Termodinámica que en su forma moderna se enuncia así: "La entropía de todo sistema en equilibrio termodinámico a la temperatura del cero absoluto es igual a cero" lo cual implica que si T tiende a cero, el calor específico tiende a cero.

Pero cuando Einstein obtuvo su fórmula del calor específico la tercera ley de la Termodinámica aún no era conocida en esta forma tan precisa, solamente se conocía la forma que le había dado Nernst en 1905 que decía: "la diferencia de entropía entre dos modificaciones de una sustancia química homogénea tiende a cero si T tiende a cero", lo cual implica que el calor específico sea cero para T igual a cero. posteriormente en 1910 Nernst después de un amplio programa de medición de calores específicos a bajas temperaturas pudo observar que los calores específicos tomaban valores muy bajos de acuerdo con la fórmula de Einstein.

En 1908 Einstein inició su carrera académica, fue Privatdocent en la Universidad de Berna desde el 28 de febrero hasta el 6 de julio de 1909 en que renunció a este

puesto y al que tenía en la Oficina de Patentes. El 8 de julio recibió su primer doctorado honoris causa de la Universidad de Ginebra y el 15 de octubre fue nombrado Profesor en la Universidad de Zurich, el equivalente a nuestros Profesores Titulares, donde permaneció hasta el 1 de Abril de 1911, en que fue nombrado catedrático de la Universidad alemana de Praga. En Praga permaneció hasta ser nombrado en febrero de 1912 catedrático en la Escuela Politécnica de Zurich, donde vivió hasta el 6 de abril de 1914 en que se trasladó a Berlín.

La Universidad de Zurich era cantonal y tenía menos prestigio que la Escuela Politécnica que era Federal. Cuando quedó vacante allí la plaza que ocupó Einstein por motivos políticos el consejo cantonal de la Universidad donde tenían mayoría los socialdemócratas propuso a Victor Adler, hijo de un importante líder de este partido en Viena, pero al conocer Adler que le habían preferido a Einstein, de quien era amigo, generosamente renunció a favor de éste. Durante la guerra Adler asesinó al jefe del gobierno austriaco, fue condenado a muerte y conmutada la pena por cadena perpetua por el Emperador Francisco José, como físico fue contrario a la relatividad de Einstein.

La Universidad de Praga era la más antigua del Centro de Europa, fue fundada por el emperador Carlos IV en 1348, mientras que las de Cracovia y Viena fueron fundadas en 1364 y 1365 respectivamente. Al principio alemanes y checos estuvieron juntos en la Universidad hasta que en 1888 fue desdoblada en dos universidades, una alemana y otra checa. El primer rector de la universidad alemana fue Mach. Aunque Einstein fue propuesto en primer lugar para ocupar la vacante, tenía un informe muy favorable de Planck, por ser Einstein extranjero, fue elegido Jaumann, quien al enterarse de que Einstein había sido propuesto en primer lugar, renunció a favor de él.

Cuando Einstein llegó a Praga, alemanes y checos, aunque tenían sus roces, convivían bastante bien. La minoría alemana era de un 5% de la que la mayoría eran judíos, pero históricamente alemanes y judíos alemanes se habían llevado bien, haciendo causa común en la defensa de sus intereses frente a la mayoría checa. Los odios raciales comenzaron mucho después. En el Imperio Austro-Húngaro para ser catedrático había que pertenecer a una de las religiones oficialmente reconocidas y aunque Einstein no pertenecía a la comunidad religiosa judía, se declaró de fe mosaica para poder ser nombrado en la Universidad. A Einstein le sucedió en la cátedra Philip Frank, uno de sus principales biógrafos. En primer lugar Einstein recomendó para su sucesor a Ehrenfest, quien no pudo ser nombrado por no querer hacer público su credo religioso y en segundo lugar a Frank. Ehrenfest sucedió a Lorentz en Leiden.

Einstein en Praga tuvo como colega a un matemático llamado Pick, quien le sugirió que para profundizar en sus investigaciones sobre la Teoría de la Relatividad le convenía estudiar a fondo el Cálculo Tensorial y el Cálculo Diferencial Absoluto de Ricci y Levi Civita, consejo que siguió Einstein y a su vuelta a Zurich se especializó en esta materia con la ayuda de su discípulo y posterior colaborador científico Grossmann hasta llegar a ser un consumado maestro.

Es anecdótico señalar que durante su estancia en Praga el literato Max Brod, que se hizo amigo suyo, escribió una novela titulada "La redención de Tico Brahe" en la que describe los últimos años de la vida de este astrónomo y el contraste de su carácter con el de su colaborador el astrónomo Kepler, mucho más joven. Se decía que Max Brod se había inspirado en Einstein para su personaje Kepler, hasta el punto de que Nernst al

leer la novela le dijo a Einstein "este Kepler es usted". Einstein vivió contento en Praga a pesar de que no le gustaba mucho el ceremonial del viejo Imperio, aunque tampoco le molestaba.

En estos años desde que inicia su carrera académica hasta su llegada a Berlín, su obra científica se centra principalmente en lo siguiente: el principio de equivalencia, las dos conjeturas sobre los principios de complementariedad y de correspondencia, la opalescencia crítica (antes descrita), la curvatura de la luz, el corrimiento hacia el rojo y los inicios de la teoría relativista de la gravitación con el empleo de los tensores y la colaboración de Grossmann. Los principios de correspondencia y complementariedad fueron formulados con precisión y rigor científico por Bohr. El primero es anterior a la Mecánica Cuántica moderna y expresa el enlace que debe existir entre las fórmulas clásicas y cuánticas, el segundo expresa la doble naturaleza ondulatoria y corpuscular de la materia y la radiación como aspectos complementarios de la realidad, de modo que cuando se manifiesta una no aparece la otra.

Las primeras ideas sobre el principio de equivalencia las tuvo Einstein en 1907, aun en la Oficina de Patentes de Berna mientras redactaba el artículo para el Jahrbuch que le había encargado Stark. Las calificó del "Pensamiento más feliz de mi vida", se cuestiona si el principio de Relatividad se puede extender a sistemas que están acelerados unos respecto a otros y escribe "para un observador que cae en caída libre no existe (al menos en su entorno inmediato) el campo gravitatorio "es decir que para él los cuerpos que caen también en caída libre están en reposo o se mueven con movimiento rectilíneo uniforme. La igualdad de las aceleraciones de caída de todos los cuerpos independientemente de sus masas, hace que el observador no puede verificar que se encuentra en un campo gravitatorio y sugiere la posibilidad de extender el principio de Relatividad a referenciales no inerciales.

En 1911, ya en Praga, vuelve de nuevo a temas que le ocuparon en 1907; el principio de equivalencia, la detectabilidad de la curvatura de la luz y el corrimiento al rojo, y publicó sus nuevas investigaciones en los *Annalen der Physik*. En la Mecánica newtoniana la masa juega un doble papel, yo diría triple, de un lado es el coeficiente por el que hay que multiplicar la aceleración para obtener la fuerza (masa inerte) por otro lado (masa gravitatoria) es generador de un campo gravitatorio que actúa sobre las restantes masas del mismo (sujeto activo) y es también el coeficiente por el que hay que multiplicar la intensidad del campo gravitatorio generado por las restantes masas del universo para obtener la fuerza que actúa sobre dicha masa (sujeto pasivo). El hecho observado por Galileo de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en el campo de la gravedad terrestre, hizo que Newton al formular la ley de la gravitación universal hiciera iguales las masas inerte y gravitatoria. Se hicieron experiencias para comprobar la igualdad de las dos masas, entre las que destacan las realizadas a fines del siglo XIX por Eötvös, que establecieron la equivalencia entre las dos masas con una aproximación de 10^{-9} (1895). Más modernamente utilizando también la atracción solar además de la terrestre se han realizado nuevas experiencias que han confirmado los resultados de Eötvös con una aproximación de 10^{-21} (Dicke en 1964 y Braguinsky en 1971). Einstein dice que se ha registrado el hecho de la igualdad de las dos masas pero que no se ha interpretado, que es lo que él hace con su experimento mental del ascensor en caída libre que ya había diseñado en 1907, y en el que el observador dentro del

ascensor no puede descubrir si se encuentra en un campo gravitatorio uniforme o si se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, y de aquí la extensión del principio de Relatividad a referenciales uniformemente acelerados. A esto Einstein le llamó el principio de equivalencia de las fuerzas de gravitación y de las fuerzas de inercia.

En la Mecánica newtoniana la gravedad no influía sobre los rayos luminosos, pero Einstein aplicó su principio de equivalencia a los fenómenos ópticos en un ensayo de 1911 que lleva por título: "la influencia de la gravedad sobre la propagación de la luz". Einstein del hecho de que un rayo de luz paralelo al piso del ascensor (su laboratorio) deja de ser paralelo al acelerar el ascensor, deduce que un rayo de luz es desviado por un campo gravitatorio y admitiendo el valor de la fuerza de gravedad de Newton calcula que la luz procedente de una estrella fija al rozar el borde del Sol se desvía 0'83 segundos de arco. Valor equivocado, el verdadero es el doble, que calcularía exactamente años después. Einstein escribe "como las estrellas fijas en la parte próxima al Sol, se hacen visibles en un eclipse total, es posible comprobar esta conclusión teórica mediante experimentos". En 1914 se preparó una expedición alemana para efectuar estos experimentos en Rusia, pero por el estallido de la primera guerra mundial los expedicionarios alemanes fueron hechos prisioneros por los rusos y los experimentos no se pudieron realizar.

El prestigio internacional de Einstein fue creciendo y en 1911 se convocó el primer congreso Solvay de Física, al que fue invitado y se le encomendó la conferencia de clausura cuyo tema fue "el estado del problema actual de los calores específicos".

En 1908 Minkowski, que había sido Profesor de Einstein en Zurich, era Profesor en Gotinga, pronunció una conferencia en Colonia con el título "Espacio y tiempo" y poco después publicó un trabajo en el que desarrolla en el continuo tetradimensional espacio-tiempo el formalismo matemático de la Relatividad restringida, utilizando el Cálculo Tensorial, donde se habla por primera vez de vectores de tipo espacial o temporal, conos de luz, líneas de universo; se muestra que las transformaciones de Lorentz son pseudorrotaciones en este espacio de Minkowski; era la nueva forma matemática de tratar la Relatividad restringida. Minkowski murió en enero de 1909. La introducción del espacio-tiempo tetradimensional dio origen a muchas discusiones entre los físicos, para unos era un auxiliar matemático, que no existe en la realidad, mientras que para otros (entre ellos Minkowski) los únicos acontecimientos reales son los que tienen lugar en el espacio tetradimensional (el espacio-tiempo) mientras que toda representación en el espacio tridimensional es una visión subjetiva de la realidad.

En la primavera de 1913 Planck y Nernst fueron a Zurich a visitar a Einstein, para invitarle a trasladarse a Berlín donde se le nombraría académico de la Academia de Ciencias, profesor en la Universidad y director de un Instituto de Física, todavía no creado, de la Sociedad Kaiser Wilhelm. Einstein aceptó y se trasladó a Berlín el 6 de abril de 1914. El emperador Guillermo II en cumplimiento de sus promesas de tiempos de esplendor para los alemanes, que se fueron a pique con el fin de la primera guerra mundial, quería transformar a Berlín en el primer centro cultural, creó la Sociedad que llevaba su nombre, dentro de la cual iba a estar el Instituto cuya dirección había sido prometida a Einstein.

Einstein vivió en Berlín desde 1914 hasta 1932, poco antes de la llegada al poder de Hitler (el 30 de enero de 1933). Dividiremos la época de su vida en Berlín en dos etapas: hasta el final de la primera guerra mundial y caída del Imperio y desde esta fecha hasta su exilio definitivo con la caída de la República de Weimar.

La obra científica de Einstein durante la primera guerra mundial se centra principalmente en: completar la teoría de la Relatividad general, calcular los efectos astronómicos de la misma, iniciar la Cosmología relativista, una nueva deducción de la Ley de Planck, la asignación de un momento lineal ($h\nu/c$) a los cuantos de luz, la teoría de la emisión espontánea y estimulada de la radiación, y el efecto giromagnético.

En 1912 y 13, aún en Zurich en colaboración con Grossmann, describe por primera vez la gravitación mediante el tensor métrico, pero creen erróneamente haber demostrado que las ecuaciones de campo no pueden ser covariantes. En noviembre de 1915 retorna al problema de la covarianza, con restricciones al principio, hasta que el 25 de noviembre elimina estas restricciones y completa la estructura lógica de la Relatividad general. Antes, el 18 de noviembre, calcula la precesión del perihelio de Mercurio y obtiene el valor correcto de 43 segundos de arco por siglo. En 1859 Le Verrier descubrió el avance del perihelio de mercurio y dio un valor bajo para el mismo de 38 segundos de arco por siglo. En 1882 Newcomb dio el valor de 43 segundos muy próximo al actual. En esas fechas también obtuvo Einstein el valor correcto de la desviación de la luz en el borde solar, doble del que había calculado antes en Praga. El 20 de marzo de 1916 envía a los *Annalen der Physik* la primera exposición sistemática de la Relatividad general que es publicada ese mismo año como su primer libro.

En diciembre de 1916 termina otro libro, el más conocido y traducido a muchos idiomas, sobre la Relatividad general y restringida.

En junio 1916 publica su primer trabajo sobre ondas gravitacionales, en el que se menciona por primera vez lo que hoy se llama el gravitón; actualmente el gravitón se define como una partícula hipotética de intercambio en la interacción gravitatoria, de spin 2 (es un bosón). En febrero de 1918 publica su segundo trabajo sobre ondas gravitacionales que contiene la fórmula cuadripolar. En febrero de 1917 inicia la Cosmología relativista e introduce la constante cosmológica que abandonará en 1931 y calificará del "error más grande de mi vida". En su Cosmología el espacio plano o euclídeo de la física clásica se transforma en un espacio curvo, en el que la curvatura (su métrica) es consecuencia de la distribución de la materia.

El camino seguido por Einstein que le llevó de la Relatividad restringida a la general duró una década y tuvo errores hasta conseguir la forma final correcta en 1915-16. En 1915 el principio de Relatividad general puede ser enunciado así: "si R es un referencial acelerado respecto a otro inercial, si hay cuerpos materiales que crean en R un campo gravitatorio determinado G, entonces R dotado de G es un referencial inercial". En consecuencia hay que sustituir el universo tetradimensional de Minkowski (pseudoeuclídeo) por un universo riemanniano (curvo) en los que los puntos materiales libres de fuerzas, describen líneas geodésicas. La presencia de materia lo que hace es deformar el espacio euclídeo y transformarlo en riemanniano y modificar así las trayectorias rectilíneas uniformes de los puntos materiales, sobre los que no actúan fuerzas (ley de inercia) en geodésicas.

Así como Poincaré se había aproximado mucho a Einstein en la Relatividad restringida en 1905, otro gran matemático Hilbert se aproximó mucho a Einstein en 1915 en la Relatividad general.

En junio-julio de 1915 Einstein dio un seminario en Gotinga donde estuvo en contacto con Hilbert y Felix Klein, ello antes de que el 25 de Noviembre estableciese las ecuaciones de campo que ligan los tensores contraído de Riemann-Christoffel y de energía-momento, pero sin duda en esa fecha no debía conocer las identidades de Bianchi (descubiertas por éste en 1902) porque no se dio cuenta de que de sus ecuaciones se derivaban las leyes de conservación de la energía y del momento e impuso estas leyes a su teoría de modo innecesario. Cinco días antes, el 20 de noviembre, Hilbert daba ecuaciones idénticas, a partir de un principio variacional y enunciaba sin demostración un teorema que implicaba las leyes de conservación, sin darse cuenta de que así era; tampoco debía conocer las identidades de Bianchi. Como en el caso de Poincaré, también Einstein se anticipó en unas semanas a Hilbert por una comunicación a la Academia de Ciencias de Berlín, como declaró Einstein a Hilbert en una carta de 18 de noviembre. Cuando Einstein y Hilbert obtuvieron estos resultados, todavía no se conocía el teorema de Noether que afirma que "toda ley física invariante en una transformación, implica la existencia de una magnitud conservativa" que hoy es de gran uso en Física, y que hubiera demostrado las leyes de conservación. Emmy Noether es seguramente la matemática más distinguida, es la Mme Curie de las Matemáticas.

Einstein volvió de nuevo en 1916 y 1917 a la teoría cuántica y en sus investigaciones sobre el equilibrio termodinámico entre radiación electromagnética y un gas molecular asignó por primera vez un momento lineal ($h\nu/c$) al cuanto de luz, lo que abrió el camino a la transformación del concepto de cuanto de luz en el de una partícula elemental el fotón, que hoy se define como la partícula de intercambio de la interacción electromagnética, es un bosón de spin 1 y masa nula.

En 1917 Einstein realizó el cálculo de los coeficientes de absorción y de emisión en la emisión espontánea y estimulada de la radiación y como consecuencia de una nueva deducción de la ley de Plack, estos cálculos de Einstein son básicos en los modernos máser y láser por la importancia que tiene la emisión estimulada en la producción de radiación coherente.

En 1915 las experiencias de Barnett muestran que una barra de hierro cilíndrica se imanta si se la hace girar alrededor de su eje. Ese mismo año Einstein con de Haas, yerno de Lorentz, descubrieron el efecto inverso que consiste en hacer girar una barra cilíndrica de hierro en un campo magnético dirigido según su eje. Einstein erróneamente creía que esta rotación inducida por magnetización probaba la existencia de las corrientes moleculares de Ampère quien en 1820 había enunciado la conjetura de que el magnetismo es generado por la electricidad en movimiento. Hoy se sabe, entonces todavía no, que el paramagnetismo y el ferromagnetismo se explican por los movimientos de spin de los electrones y no por los orbitales.

Einstein vivió en Berlín durante la primera guerra mundial y aunque no colaboró en ella, tampoco fue molestado durante la misma. El 5 de mayo de 1916 sustituyó a Planck en la presidencia de la Sociedad alemana de Física, el 1 de octubre de 1917 comenzó a funcionar el Instituto de Física Emperador Guillermo, que él dirigía y en

febrero de 1918 no aceptó un ofrecimiento conjunto de la Escuela Politécnica y de la Universidad de Zurich a pesar de lo que le gustaba la vida en dicha ciudad. No firmó el manifiesto de los noventa y dos en el que muy importantes representantes del arte y de la cultura alemana salían en defensa de su Patria en la guerra, manifiesto que terminaba con las palabras "la cultura alemana y el militarismo alemán son idénticos".

En cambio si firmó el manifiesto a los europeos, el primer documento político que firmó en su vida, de carácter pacifista e internacionalista que no tuvo consecuencias prácticas. La nacionalidad suiza a la que no renunció, le amparaba en su neutralidad. En aquel tiempo hay que recordar que la sede de las organizaciones sionistas estuvo de 1910 a 1914 en Berlín, y que muchos judíos colaboraron activamente con la causa alemana; un ejemplo destacado es el de Haber que en 1918 recibió el premio Nobel, fue director del Instituto de Química Física Emperador Guillermo; descubrió un procedimiento para obtener amoníaco por síntesis del nitrógeno atmosférico, lo que fue de vital importancia para Alemania durante la guerra, por carecer del suministro de este gas tan importante para la fabricación de explosivos y fertilizantes. También descubrió varios gases tóxicos de uso militar, al igual que Nernst recibió el título de comandante honorario del ejército alemán, los dos figuraron en la lista de criminales de guerra, lo que pasó en aquella guerra es que este hecho no tuvo consecuencias. Hubo alemanes judíos o de origen judío que hicieron por la causa alemana en la guerra más que muchos Junkers y Sthalhelm.

En 1919 se divorció de Mileva y se casó con su prima Elsa, también divorciada, fue el año del gran triunfo de Einstein. Los ingleses enviaron dos expediciones una al norte de Brasil y otra a la isla Príncipe del Golfo de Guinea para verificar durante un eclipse total las predicciones de Einstein de la desviación de los rayos luminosos por un campo gravitatorio, el resultado fue favorable y produjo una gran conmoción universal. De repente Einstein alcanzó una gran fama y se convirtió en un gran personaje internacional, quizás en el hombre de ciencia más popular. El 6 de Noviembre en una reunión conjunta de la Royal Society y de la Real Sociedad Astronómica en Londres, el Presidente de la primera J.J.Thomson hacía público el anuncio de la confirmación de la teoría de Einstein y por tanto de la curvatura del espacio. La conmoción en la prensa fue enorme, así como el sensacionalismo de los reportajes periodísticos. Nace la leyenda de Einstein.

A partir de esta fecha cambia la vida de Einstein, viajó por todo el Mundo pronunciando conferencias y recibiendo una lluvia de títulos, medallas y reconocimientos públicos de sus méritos. El 9 de noviembre de 1922 se le concede el premio Nobel de 1921 por "sus servicios a la Física teórica y especialmente por su descubrimiento del efecto fotoeléctrico", sin embargo en la conferencia que dio en Gotemburgo en julio de 1923 como consecuencia del premio Nobel, el tema que escogió fue la Relatividad. También en ese año se descubre el efecto Compton que da carta de naturaleza al fotón y Einstein formula su primera conjetura de que los efectos cuánticos pueden originarse en las ecuaciones de campo de la Relatividad general.

En 1924 en Postdam junto al observatorio astronómico en el que Michelson en 1881 había realizado su primer experimento se inaugura el Instituto Einstein vulgarmente conocido como Torre Einstein, de arquitectura modernista mezcla de rascacielos neoyorquino y de pirámide egipcia, entre otros objetivos perseguía la verificación del

corrimiento hacia el rojo de la luz emitida en un campo gravitatorio predicho por la teoría de Einstein. El instituto estuvo bajo el control de un astrónomo hermano del general Ludendorf, jefe del estado mayor del mariscal Hindenburg durante la guerra, simpatizante de Hitler. A pesar de ello no hubo problemas en seguir las investigaciones de acuerdo con la teoría de Einstein.

El 28 de junio de 1929 reciben en Berlín simultáneamente Planck y Einstein la primera y la segunda medalla Planck.

En 1920 se creó en Leiden una cátedra especial para él, y aunque el nombramiento fue por tres años, duró hasta 1952. En octubre de 1932 es nombrado para una cátedra en el Instituto de Estudios Superiores de Princeton con la idea de que divida su tiempo por partes iguales entre Berlín y Princeton, pero los acontecimientos políticos de Alemania hace que se exilie definitivamente de Alemania y abandone Europa el 10 de diciembre para instalarse en los Estados Unidos.

Con motivo de la derrota en la guerra y de la miseria económica en que queda Alemania, aunque no es obstáculo para el espléndido desarrollo cultural, científico y artístico alemán, comienza una agitación política muy intensa, se desatan los odios políticos y raciales y el antisemitismo cobra gran fuerza con la leyenda de la puñalada por la espalda como la causa de la pérdida de la guerra. Einstein comienza a intervenir en política, adquiere notoriedad como demócrata, progresista, pacifista e internacionalista, firma documentos políticos en este sentido. En 1923 ayuda a formar la asociación de amigos de la nueva Rusia y es miembro de su comisión ejecutiva, pero nunca visitará Rusia a pesar de las invitaciones que recibe desde allí. Ayuda al movimiento sionista y en 1924 se une a la comunidad judía en Berlín.

Como consecuencia de lo anterior se desata una campaña contra Einstein como persona y también contra sus ideas científicas, en lo que pudiéramos llamar la ultraderecha, lo que le hace estar incómodo en Alemania, pero también encuentra muchos amigos y defensores, no solamente entre los de sus mismas ideas, sino también entre físicos que seguirán viviendo en Alemania con Hitler y desempeñando importantes puestos científicos antes y durante la segunda guerra, entre los que hay que destacar a Planck, por esta razón tampoco siente una necesidad imperiosa de autoexiliarse de Alemania. Planck siempre fue muy noble y generoso, defendió ante Hitler en persona a científicos judíos. Planck era prusiano y conservador, nacionalista alemán, pero era también un hombre idealista, sensato y bueno, partidario de la convivencia y amistad entre arios y no arios.

Como consecuencia de estos incidentes el gobierno alemán en 1924 declara que según las leyes alemanas por el hecho de haber aceptado ser miembro de la Academia de Ciencias de Berlín, automáticamente adquirió la nacionalidad alemana (prusiana), a lo que Einstein no puso ninguna objeción, aunque siguió reteniendo la nacionalidad suiza.

Entre sus adversarios científicos y personales el más destacado es Lenard que tiene enfrentamientos fuertes con él, es el máximo exponente con Stark (ambos premios Nobel) de la llamada Física alemana en contraposición con la Física judía. Lenard en su libro de Biografías de los grandes sabios lanza la idea de que Hasenohrl, físico austriaco muerto en combate en la primera guerra mundial, es el auténtico descubridor de la

equivalencia entre masa y energía. Hasenohrl en 1904 había descubierto un caso especial de la ley de Einstein (2), desde luego si era cierto que había sido el primero y seguramente el único en señalar un caso particular importante de la ley de Einstein antes de que éste la enunciase. Lo que descubrió Hasenohrl es que si un recipiente cerrado contiene en su interior radiación, por efecto de la presión de ésta sobre sus paredes, aunque no tuviera ninguna masa, se comportaría como si la tuviese, en un campo de fuerzas, y si el recipiente emitiese energía radiante de su interior, su masa decrecería de acuerdo con la ecuación de Einstein (2). Hasenohrl fue un científico de gran honestidad, que conoció a Einstein y con el que nunca tuvo problemas, acudieron juntos representando a Austria al primer congreso Solvay de Física de 1911.

La obra científica de Einstein durante la República de Weimar se centra principalmente en la creación con Bose de la primera mecánica estadística cuántica que lleva sus nombres, en la elaboración de una teoría unificada de los campos gravitatorio y electromagnético y en su oposición a la interpretación "ortodoxa" de la mecánica cuántica de la Escuela de Copenhague.

Después de la Relatividad general viene la tercera etapa que son las teorías unitarias de campo. Una teoría unitaria unifica el campo gravitatorio y el electromagnético en un mismo hipercampo, cuyas ecuaciones representan condiciones impuestas a la estructura geométrica del universo. Se ofrecen dos vías a estas teorías que son aumentar el número de dimensiones del espacio riemanniano o recurrir al empleo de una geometría diferencial postriemanniana.

El primer ensayo es de Weyl en 1918, conserva el espacio riemanniano de cuatro dimensiones, está dentro de las teorías del segundo grupo antes mencionado, introdujo por primera vez las transformaciones de medida (gauge) en alemán eichinvarianz. En 1921 Eddington formuló una nueva teoría unitaria inspirada en la de Weyl.

El 1918 Einstein presentó a la Academia de Ciencias de Berlín un trabajo de Kaluza en el que se utiliza un espacio de cinco dimensiones, que se publicó en 1921; esta teoría fue mejorada por Oscar Klein en 1926.

Einstein con la colaboración de Grommer se ocupó de la teoría de Kaluza en 1922. En 1931 en colaboración con Mayer formularon una teoría unitaria en un espacio de cuatro dimensiones tangente en cada punto a un espacio de cinco dimensiones y en 1932 hicieron un trabajo sobre semivectores y spinores que fue el último que publicó Einstein en Alemania. Mayer se fue con Einstein a Princeton a seguir la colaboración con él.

Las teorías unitarias de campo provocaron un gran progreso en Geometría, la teoría de las conexiones apareció por esta causa en 1916 en un trabajo de Heisenberg y sobre ella trabajaron Weyl, Levi Civita, Schouten, Struik y Elie Cartan, quien introdujo la torsión del espacio en 1922 y en sus memorias de 1923 y 1924 está iniciado el camino de la teoría moderna de los haces fibrados, y fue el primero en introducir conexiones no simétricas, hoy día las partes antisimétricas se llaman coeficientes de torsión de Cartan. Einstein en forma independiente de Cartan llegó con posterioridad a una geometría riemanniana con torsión en 1928 a partir de su invento matemático del paralelismo a distancia (teleparalelismo). De este modo la Relatividad de Einstein produjo un progreso considerable de la Geometría, todas estas teorías son de una gran

belleza y de una enorme complejidad matemática, pero en realidad no contribuyeron a avances significativos de la física.

En 1924 el físico hindú Bose, entonces desconocido, envió un trabajo al *Philosophical Magazine* que no fue aceptado para su publicación, entonces se lo envió a Einstein, para que propusiera su publicación en el *Zeitschrift für Physik*, como así hizo después de traducirlo al alemán. De esta manera nació la primera estadística cuántica de Bose-Einstein (BE) a la que se ajustan los corpúsculos de spin nulo o entero (bosones), como son los fotones, y las moléculas de la mayor parte de los gases, está basada en el principio de indistinguibilidad de los corpúsculos idénticos. Bose aplicó esta estadística a un gas de fotones y obtuvo la forma moderna de deducir la ley de la radiación de Planck. Einstein en una comunicación a fines de 1924 y dos a principios de 1925 aplicó esta estadística cuántica a un gas ideal de moléculas (el gas cuántico o gas BE) y descubrió el importante fenómeno de la condensación de Bose-Einstein que explica el comportamiento del helio-4 a bajas temperaturas, consiste en que a temperaturas suficientemente bajas la mayor parte de los bosones se agrupan en el nivel energético más bajo, y el número de los que permanecen en los niveles superiores depende de la temperatura y no del número total de bosones. Es un fenómeno que recuerda el de la condensación ordinaria de las moléculas de vapor en estado de saturación. El gas BE satisface la tercera ley de la Termodinámica (teorema de Nernst). Esta ley se aplicaba antes solamente a sólidos y líquidos y en 1914 Nernst extendió su teorema a los gases, pero no existía ningún modelo de gas que gozase de la propiedad de que el calor específico tendiese a cero cuando la temperatura absoluta T tiende a cero, y así siguieron las cosas hasta que en 1925 Einstein concibiese el modelo de gas BE. Esta es la última aportación importante de Einstein a la Física cuántica.

La interpretación de la Mecánica Cuántica de la escuela de Copenhague es consecuencia de tres principios que son: la interpretación probabilista de Born en junio de 1926, según la cual las ondas de la Mecánica Cuántica son ondas de probabilidad, en el sentido de que el cuadrado de la amplitud de la onda es una densidad de probabilidad; el principio de incertidumbre formulado por Heisenberg en marzo de 1927 que expresa la imposibilidad de medir simultáneamente la posición y el momento de un corpúsculo y el principio de complementariedad formulado por Bohr en septiembre de 1927, al que antes hicimos referencia.

Einstein se había hecho la pregunta de si la Mecánica Ondulatoria de Schrödinger determina el movimiento de un sistema de manera completa o solo estadísticamente. En octubre de 1927 tuvo lugar el quinto congreso Solvay de Física y en él tuvieron lugar las célebres discusiones entre Einstein y Bohr. Einstein propuso varios experimentos mentales muy ingeniosos en los que creía ofrecer ejemplos en los que no se cumplía el principio de incertidumbre y que por tanto la Mecánica Cuántica era inconsistente. Bohr refutaba, con éxito y con no menos ingenio, todas las objeciones de Einstein. En el sexto congreso Solvay en 1930, Einstein propuso un nuevo experimento mental, el denominado del reloj en la caja, y curiosamente Bohr lo volvió a refutar, esta vez utilizando la propia fórmula de Einstein del corrimiento hacia el rojo. A partir de entonces Einstein abandona la defensa de la inconsistencia de la Mecánica Cuántica y se limita a considerar su incompletitud como veremos más adelante.

Volviendo a su vida privada, el 20 de marzo de 1933 las S.A. practican un registro en la casa de Einstein en Alemania, buscando armas ocultas para los comunistas, en el registro no encontraron nada. El 28 de marzo presenta su renuncia a la Academia de Ciencias de Berlín, seguramente para evitar el bochorno a sus compañeros de ser expulsado de la misma. El 21 de abril es expulsado de la Academia de Ciencias de Baviera.

En Estados Unidos sigue con su actividad política y el 1 de octubre de 1940 adquiere la nacionalidad norteamericana, pero retiene la nacionalidad suiza.

La fecha más importante en la vida política de Einstein es la del 2 de Agosto de 1939 en que a instancias de Szilard y de Fermi escribe una carta al presidente Roosevelt, que fue decisiva para la fabricación de la bomba atómica, en ella advierte de la posibilidad de que los alemanes la fabricasen antes.

Desde 1933 aislado de la mayoría de los físicos, mantiene la actitud de que la Mecánica Cuántica lógicamente es consistente, pero es una teoría incompleta. Defiende casi en solitario el criterio de la realidad objetiva.

En 1935 con Podolsky y Rosen describen un experimento mental que ha jugado un gran papel en la Filosofía de la Física, en el que creen probar que la Mecánica Cuántica es incompleta, parten del supuesto de que "si sin perturbar un sistema, podemos predecir con exactitud el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de la realidad física que corresponde a esta cantidad física" creen que esto lo pueden realizar y obtener dos elementos de la realidad, pero que debido a las leyes de la Mecánica Cuántica, estos dos elementos de la realidad no pueden serlo simultáneamente y que por tanto la Mecánica Cuántica es incompleta. Bohr también refutó este experimento mental y la mayor parte de los físicos están a favor de Bohr.

En Princeton Einstein siguió casi enteramente dedicado a proseguir sus investigaciones sobre la Relatividad general y las teorías unitarias, tratando de encontrar un campo físico que permitiera formular las leyes de los fenómenos cuánticos como una generalización de los campos gravitatorio y electromagnético. Trabaja solo y en colaboración con varios Físicos, entre ellos: Mayer, Lanczos, Infeld, Hoffman, Bergmann, Bargmann, Straus y últimamente Kaufman. Cada vez sus trabajos eran más complicados y el aparato matemático más sofisticado, pero sin llegar a consecuencias físicas tan importantes y tan espectaculares como las que había conseguido en Europa.

No llegó a conclusiones en sus dos últimos grandes intentos de unificar la gravitación y el electromagnetismo en una teoría de campo con soluciones tipo partícula, libres de singularidades y en unificar la Relatividad y la Mecánica Cuántica.

Actualmente se conocen dos nuevas interacciones como hoy se dice (que no se conocían en tiempos de Einstein); a parte de la gravitatoria y de la electromagnética existen la débil y la fuerte y un número enorme de partículas elementales. Las nuevas teorías de unificación siguen una línea de pensamiento insospechada en la época de Einstein y utilizan una matemática muy distinta, y aunque se han dado pasos de gigante, son todavía un sueño, el llamado sueño final.

Einstein murió en Princeton el 18 de abril de 1955.

Con objeto de no entorpecer la lectura del texto de la conferencia con fórmulas matemáticas, hemos incluido a continuación unas notas para que sirvan de complemento.

Notas

Incluimos algunas de mis investigaciones sobre Física y Matemáticas en relación con estas cuestiones.

Nota 1ª

He demostrado en anteriores ocasiones que el espacio solar es un espacio no euclídeo, es una hipersuperficie de revolución S en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones E_4 , cuya ecuación en coordenadas cartesianas es:

$$\left(\frac{x_4^2}{8\mu} + 2\mu\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2; \quad \mu = \frac{GM}{c^2} \quad (1)$$

siendo G la constante de la gravitación universal, M la masa del Sol, c la velocidad de la luz en el vacío, OX_4 es el eje de S . Si en lugar de coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 del espacio euclídeo de tres dimensiones E_3 , ortogonal a OX_4 , utilizamos las coordenadas esféricas r, ϑ, φ , en E_3 , la primera (1) se escribe:

$$x_4 = \sqrt{8\mu(r - 2\mu)}; \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (2)$$

El elemento lineal el $d\sigma$ de S en coordenadas esféricas es:

$$d\sigma^2 = g(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2; \quad \frac{1}{g(r)} = 1 - \frac{2\mu}{r} \quad (3)$$

que es el sumando correspondiente a la parte espacial del elemento lineal de Schwarzschild de la Relatividad general aplicada al sistema solar, que se escribe:

$$d\sigma^2 - \frac{c^2 dt^2}{g(r)} = -ds^2 = -c^2 d\tau^2 \quad (4)$$

donde t es el tiempo ordinario y τ el tiempo propio, que es el tiempo que invierte un planeta animado con la velocidad de la luz c en recorrer su trayectoria en el espacio-tiempo (4). Las trayectorias de las partículas materiales en el sistema solar son secciones planas de S y obedecen a las dos integrales primeras:

$$\frac{m_0 c^2}{g(r)} \frac{dt}{d\tau} = W; \quad \frac{d\sigma^2}{d\tau^2} - \frac{W^2 g(r)}{m_0^2 c^2} = -c^2 \quad (5)$$

Siendo m_0 la masa de la partícula en reposo y en ausencia del campo gravitatorio y W la energía. De (4) y de la primera (5) introduciendo la masa m de la partícula igual a W / c^2 se obtiene:

$$m = \frac{W}{c^2} = \frac{m_0}{\sqrt{g(r)(1 - v^2 / u^2)}}; \quad u = \frac{c}{\sqrt{g(r)}} = c \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}}; \quad v = \frac{d\sigma}{dt} \quad (6)$$

siendo v la velocidad de la partícula sobre S , u la velocidad de la luz sobre S . (6) da la energía y la masa de la partícula en movimiento.

Si la partícula está en reposo, su masa se obtiene haciendo $v = 0$ en (6) y vale

$$m = m_0 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}}; \quad v = 0 \quad (7)$$

que es menor que la masa en reposo en ausencia de campo gravitatorio. En (5) W es una constante del movimiento.

$$-\frac{W^2 g(r)}{m_0 c^2} \quad (8)$$

desempeña el papel de un potencial que he llamado paramétrico, porque para cada movimiento depende de los valores iniciales de la posición y de la velocidad, a diferencia de los potenciales clásicos que dependen solamente de la posición en cada instante; el potencial paramétrico depende de la posición inicial y de la energía W constante durante todo el movimiento. De (5) se sigue que el movimiento de una partícula obedece a un principio de mínima acción (véanse mis memorias).

La trayectoria de la luz en el sistema solar (sobre S) se obtiene haciendo mínima la integral

$$\int \frac{d\sigma}{u} = dt \quad (9)$$

con el valor (6) de u . Son las curvas que hacen mínimo el tiempo invertido en recorrer cualquiera de sus arcos en la hipersuperficie S , respecto a cualquier otra curva de S que tenga los mismos extremos.

Para la frecuencia de los fotones, por ser el cociente de dividir el cambio de energía en las transiciones de los electrones intraatómicos de unos niveles de energía a otros, por la constante h de Planck, vale la misma fórmula (7):

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{2\mu}{r}}; \quad v < v_0 \quad (10)$$

ν es la frecuencia de un fotón en el campo gravitatorio y ν_0 la del mismo fotón en ausencia del campo gravitatorio. Lo que explica el desplazamiento hacia el rojo de las rayas espectrales de la luz procedente del Sol.

Por (7) la liberación de energía por aniquilación de la materia es menor en el Sol que en la Tierra, pero como por (10) la energía de los fotones producidos es menor (por ser más rojos) en la misma proporción, resulta que el número de fotones liberados en un mismo proceso es el mismo en el Sol que en la Tierra.

Por la segunda (6) $\sqrt{g(r)}$ es un índice de refracción y por la primera (6) ninguna partícula puede tener una velocidad ν superior a la velocidad u de la luz en S .

La hipersuperficie S por (1) si se corta por planos que contienen a su eje OX_4 se obtienen parábolas de ecuación:

$$x_1 = 2\mu + \frac{x_4^2}{8\mu}; \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \quad (11)$$

cuyos vértices están a una distancia 2μ del origen O . El eje OX_4 es la directriz de la parábola. Si se corta S por espacios euclídeos tridimensionales E_3 que contienen al eje OX_4 , se obtienen las superficies de E_3 .

$$\frac{x_4^2}{8\mu} + 2\mu = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_3 = 0 \quad (12)$$

que son las superficies engendradas por la parábola (11) cuando gira alrededor de su directriz (el eje OX_4). A esta superficie he propuesto llamarla toro parabólico o paratoroide.

Obsérvese que 2μ es igual al radio de Schwarzschild que es la de un agujero negro de forma esférica dotado de la masa total del Sol.

Al igual que la Tierra no es un esferoide perfecto sino arrugado, cuyas arrugas son los entrantes y salientes (montañas), así mismo el Universo no es una hipersuperficie esférica en un espacio euclídeo de cuatro dimensiones lisa, sino que está arrugada, siendo las arrugas en torno de cada estrella, y siendo estas arrugas como estas hipersuperficies S con distintos valores de μ .

Nota 2ª

En las mecánicas estadísticas clásica y cuánticas para velocidades muy altas (temperaturas muy altas) hay que hacer una corrección relativista que he hecho en anteriores trabajos.

Para pasar al enfoque relativista en la función de distribución de la variable:

$$x = E / kT \quad (1)$$

en la que E es la energía cinética, T la temperatura absoluto y k la constante de Boltzmann hay que hacer el cambio

$$\sqrt{x} dx \rightarrow \sqrt{x(x\alpha T + 1)} dx; \quad \alpha(m_0) = \frac{k}{2m_0c^2} \quad (2)$$

en la que m_0 es la masa de la partícula en reposo, y c la velocidad de la luz en el vacío. Para el electrón y para el neutrón α vale respectivamente, de forma aproximada:

$$\alpha = 10^{-10} \text{ erg / } ^\circ K; \quad \alpha = 10^{-13} \text{ erg / } ^\circ K \quad (3)$$

Con este cambio la ley de Maxwell hay que corregirla y es:

$$f(x) = A(T/m_0) e^{-x} \sqrt{x(x\alpha T + 1)} \quad (4)$$

en la que A es el coeficiente de normalización de la integral de (4) que depende del cociente T/m_0 . La energía media de la partícula E vale:

$$\bar{E} = kT \frac{\int_0^\infty xf(x)dx}{\int_0^\infty f(x)dx} = kT\beta(T/m_0) \quad (5)$$

en la que β depende también del cociente T/m_0 . Para valores muy pequeños de T , (4) es muy aproximadamente igual a la ley de Maxwell. Se cumple que

$$\beta(0) = \frac{3}{2}; \quad \bar{E} = \frac{3}{2} kT; \quad \beta(\infty) = 2; \quad \bar{E} = 2kT \quad (6)$$

En ambos casos E es independiente de m_0 , no así en los casos intermedios.

La Relatividad modifica, pues, la ecuación de los gases perfectos. Tanto en la Teoría clásica como en la relativista la presión P ejercida por un gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene es

$$PV = \frac{N}{3} \overline{pv} \quad (7)$$

donde N es el número de Avogadro, V el volumen molar, p el momento y v la velocidad de una molécula. La diferencia entre una y otra teoría es que en la relativista es

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad (8)$$

y hay que aplicar la (4) para calcular el valor medio $p v$ en vez de la ley de Maxwell que es la (4) con $\alpha = 0$. Como la energía cinética relativista E vale:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - m_0 c^2 \quad (9)$$

de (8) y (9) se sigue que

$$p v = E \frac{E + 2m_0 c^2}{E + m_0 c^2} \quad (10)$$

y teniendo en cuenta (4) se obtiene para el valor medio $p v$:

$$\overline{p v} = kT \frac{\int_0^\infty x \frac{x \alpha T + 1}{x \alpha T + 1/2} f(x) dx}{\int_0^\infty f(x) dx} = \Gamma(T / m_0) kT \quad (11)$$

de modo que la ecuación de los gases perfectos se escribe

$$PV = \Gamma(T / m_0) kTN / 3 \quad (12)$$

con los valores particulares de la ecuación de los gases perfectos

$$T \rightarrow 0; \quad PV = RT; \quad T \rightarrow \infty; \quad PV = \frac{2}{3} RT \quad (13)$$

Nota 3ª

He demostrado que en la Mecánica clásica en el caso de un sistema material holónomo, cuando los enlaces dependen del tiempo y la semifuerza viva T es la suma de una forma cuadrática en las velocidades T_2 , de una forma lineal en las velocidades T_1 y de un término independiente T_0 , de modo que el tiempo t no figura explícitamente en T , si las fuerzas derivan de un potencial U , las dos únicas integrales cuya variación conduce a las ecuaciones del movimiento son

$$\delta \int (T_2 + T_1 + T_0 - U) dt = 0; \quad \delta \int \left(T_1 + 2\sqrt{(E - U + T_0)T_2} \right) d\lambda \quad (1)$$

cumpliéndose la integral primera

$$T_2 - T_0 + U = E \quad (2)$$

y la relación

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{\frac{E - U + T_0}{T_2}} \quad (3)$$

Estos resultados me han permitido desarrollar una teoría relativista de los sistemas materiales holónomos cuando existe una función de fuerzas. Se cumple entonces que el tiempo propio para todos los puntos materiales del sistema es el mismo y que

$$T_2 < Mc^2 \quad (4)$$

siendo M la masa total del sistema. La velocidad de la luz es solamente un límite para la dinámica del punto material pero no para los puntos materiales integrados en un sistema.

Para n puntos materiales libres de energías e_i y masas m_i si se integran en un sistema se cumple la relación:

$$\sum \frac{e_i^2}{m_i} = \frac{E^2}{M}; \quad M = \sum m_i \quad (5)$$

en la que E es la energía total del sistema y M la masa total. Cuando las velocidades v_i son muy pequeñas en comparación con c , la (5) tiende a la relación de la mecánica clásica:

$$v_i \ll c; \quad E = \sum e_i \quad (6)$$

He podido extender las transformaciones de Lorentz a los momentos y energías de un sistema de puntos materiales (véanse mis memorias).

Nota 4ª

Los resultados de la nota anterior, fórmulas (1) a (3) se simplifican cuando $T_0 = U$, lo que me ha permitido desarrollar la dinámica relativista de una carga eléctrica puntual en un campo gravitatorio y otro electromagnético (teoría unitaria de campo).

He obtenido que las trayectorias de la carga eléctrica en el espacio-tiempo se obtienen anulando las variaciones de una cualquiera de las dos integrales

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} \frac{d\sigma_2^2}{d\tau^2} + \frac{1}{m_0} \frac{d\sigma_1}{d\tau} \right) d\tau = 0; \quad \delta \int d\sigma_1 + m_0 c d\sigma_2 = 0 \quad (1)$$

siendo con la notación tensorial de Einstein

$$d\sigma_2 = g_{jk} dx^j dx^k; \quad \frac{d\sigma_1}{m_0} = a_j dx^j \quad (2)$$

en donde m_0 es la masa de la partícula (carga eléctrica) en reposo, $d\sigma_2$ el elemento lineal de la teoría relativista de la gravitación, el (4) de la nota 1ª. Se cumple la integral primera

$$\frac{d\sigma_2}{d\tau} = c \quad (3)$$

τ (tiempo propio) es el tiempo que invierte en recorrer la partícula con la velocidad de la luz su trayectoria en el espacio-tiempo cuyo elemento lineal es $d\sigma_2$.

Aplicando las ecuaciones de Lagrange a la primera integral (1) se obtiene para la coordenada x_h :

$$\frac{d}{d\tau} \left(g_{hk} \frac{dx^k}{d\tau} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \frac{da_h}{d\tau} - \frac{\partial a_j}{\partial x^h} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (4)$$

o lo que es lo mismo

$$g_{hk} \frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \Gamma_{hjk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + a_{jh} \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (5)$$

siendo Γ_{hjk} los símbolos de Christoffel de 1ª especie y a_{jh} el rotacional de a_j

$$a_{jh} = \frac{\partial a_h}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j}{\partial x^h} \quad (6)$$

Efectuando la multiplicación contraída por g^{ih} la (5) se transforma en la

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + a^i_j \frac{dx^j}{d\tau} = 0 \quad (7)$$

en la que Γ_{jk}^i son los símbolos de Christoffel de 2ª especie. Las cuatro (7) son las ecuaciones del movimiento de la partícula en el espacio-tiempo $d\sigma^2$ si a_{ij} es el campo electromagnético.

Si introducimos una quinta dimensión w y el ds^2 de este espacio es

$$ds^2 = d\sigma_2^2 - \left(dw - \frac{d\sigma_1}{m_0 c} \right)^2 \quad (8)$$

si hacemos $ds = 0$ se obtiene

$$ds = 0 \Rightarrow dw = d\sigma_2 + \frac{d\sigma_1}{m_0 c} \quad (9)$$

de modo que la segunda (1) se escribe

$$\delta \int dw = 0 \quad (10)$$

Así es que el movimiento se puede definir de tres modos distintos que son equivalentes:

- las curvas que hacen estacionaria la primera integral (1) (extremales) en el espacio-tiempo tetradimensional ($d\sigma_2$).
- las líneas geodésicas de un espacio de Finsler (no riemanniano) cuya métrica es la suma de la raíz cuadrada de una forma cuadrática diferencial ($d\sigma_2$) y de una forma lineal diferencial ($d\sigma_1 / m_0 c$) caso de las integrales (10) y (9).
- las líneas de longitud nula ($ds = 0$) de un espacio pentadimensional (8) que hacen mínima (estacionaria) la variación de la quinta coordenada (w) por las integrales (9) y (10).

Como en (10) se puede multiplicar por la cantidad constante $m_0 c$ el significado físico es que el movimiento tiene lugar haciendo mínima la acción total $\int m_0 c dw$ que es la suma de la acción debida al campo gravitatorio

$$\int m_0 c d\sigma_2 = \int m_0 c^2 d\tau \quad (11)$$

que varía uniformemente con el tiempo propio τ y con la longitud σ_2 del arco de trayectoria en el espacio-tiempo tetradimensional. El resto de la acción es debida al campo electromagnético y vale

$$\int d\sigma_1 \quad (12)$$

a_i y a_{ij} divididos por m_0 son el potencial y el campo electromagnéticos. Si no hay campo gravitatorio las fórmulas anteriores son válidas sustituyendo $d\sigma_2$ por el correspondiente a la Relatividad restringida.

La variación de la quinta coordenada w multiplicada por $m_0 c$ mide la variación de la acción.

Nota 5ª

Existe otra posibilidad de construir una teoría unitaria de campo conservando la métrica riemanniana $d\sigma_2$ de la nota anterior pero cambiando la derivación covariante de Levi Civita por otra nueva en la que los nuevos símbolos ${}^* \Gamma_{jk}^i$ y ${}^* \Gamma_{ijk}$ desempeñen el mismo papel que los símbolos de Christoffel de 2ª y 1ª especie, definiéndolos por las relaciones

$${}^* \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + A_{jk}^i ; \quad {}^* \Gamma_{ijk} = \Gamma_{ijk} + A_{ijk} \quad (1)$$

en la que el tensor A_{ijk} es antisimétrico. La antisimetría de este tensor asegura la invariabilidad del sistema de aforo, que las diferenciales covariantes de las g_{ij} son nulas y la conmutatividad de la derivación covariante y de la multiplicación contraída por el tensor métrico fundamental g_{ij} .

El tensor A_{ijk} lo escogemos tal que

$$A_{jk}^i = a_j^i \frac{dx_k}{ds} \quad (2)$$

siendo a_{ij} un tensor antisimétrico

Por ser

$$dx_k dx^k = ds^2 \quad (3)$$

la diferencial covariante de un vector contravariante v^i es

$$Dv^i = dv^i + \Gamma_{jk}^i v^j v^k + a_j^i v^j ds \quad (4)$$

y la derivada covariante es

$$\frac{Dv^i}{Dx^k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i v^j + a_j^i v^j \frac{dx_k}{ds} \quad (5)$$

Las líneas autoparalelas que no coinciden con las geodésicas son las de ecuación

$$\frac{D\left(\frac{dx^i}{ds}\right)}{ds} = 0 = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} + a^i_j \frac{dx^j}{ds} \quad (6)$$

que con una conveniente elección de unidades coinciden con las (7) condicionadas por la (3) de la nota anterior.

Estos espacios están dotados de curvatura que dependen de g_{ij} y de a^i_j y de torsión que depende de a^i_j .

En el caso en que la métrica es euclídea, se obtiene un espacio con curvatura C^i_{jhk} y torsión T^i_{hk} .

$$C^i_{jhk} = \frac{\partial a^i_j}{\partial x^h} - \frac{\partial a^i_k}{\partial x^j}; \quad T^i_{hk} = a^i_k - a^i_h \quad (7)$$

Esta nueva derivada covariante por el último término de (5) depende de la dirección en que se efectúe, a diferencia de lo que sucede con la derivada covariante de Levi Civita.

El tensor a_{ij} le basta con ser antisimétrico, no tiene que ser un rotacional para estudiar las propiedades de un nuevo espacio.

Si es un rotacional es el marco de una teoría unitaria de campo.

La diferencial covariante de a^i_j es la misma con la nueva definición que con la de Levi Civita. En mis memorias pueden verse más detalles, así como el estudio de curvas y superficies.

Nota 6ª

Entre los ignorabimus de las partículas elementales figura la existencia de partículas sin masa (fotón) o con una masa puntual provistas de rotación propia (spin) y sin carga eléctrica (neutrón) o con carga eléctrica puntual provistas de momento magnético.

Como es sabido la masa (o la carga eléctrica) puntual se representan por una densidad de masa (o de carga eléctrica) igual a la delta de Dirac $\delta(x-a)$ que es nula fuera del punto en que está localizada la masa (o carga eléctrica) $x=a$, e infinito en dicho punto. La $\delta(x-a)$ se puede reconocer como el límite generalizado (G-límite) de una sucesión de funciones $\varphi_n(x)$ tales que su transformada de Laplace (TL) o de Fourier (TF) cumplen la condición

$$\left. \begin{aligned} \lim TL \varphi_n(x) &= e^{-ap}, \quad \forall a > 0 \\ \lim TF \varphi_n(x) &= e^{iat}, \quad \forall a \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \delta(x-a) = G\text{-lim } \varphi_n(x) \quad (1)$$

He demostrado que si TL_2 y TF_2 son las transformadas de Laplace y de Fourier bidimensionales se cumple que:

$$\lim TL_2 f_n(x, y) = \frac{1}{p+q}, R(p+q) > 0 \Leftrightarrow \delta(x-y) = G - \lim f_n(x, y) \quad (2)$$

y también que:

$$TL_2 \delta(x-y) = \frac{1}{|p-q|}, p \neq q \quad (3)$$

$$TF_2 \delta(x-y) = 2\pi\delta(t+\delta) \quad (4)$$

También he utilizado la que he llamado función sigma $\sigma(x)$ (función singular o generalizada), que he definido por:

$$\forall x > 0: \sigma(x) = 0; \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx = 1; \forall a: \sigma(x) = \sigma(x-a) \quad (5)$$

Mientras que $\delta(x-a)$ es la función de frecuencia (f.f.) de una variable aleatoria (v.a.) cierta, $\sigma(x)$ es la f.f. de una v.a. repartida uniformemente al azar sobre el conjunto de los números reales (sobre la recta euclídea); σ es también la densidad de masa (o de carga eléctrica) nula de una distribución rectilínea de masa (o carga eléctrica) total igual a la unidad. Cualquier cuerpo material puede atravesar una distribución material de esta naturaleza (de densidad $\sigma(x)$) sin ser afectado por este hecho.

La $\sigma(x)$ se define como un límite generalizado (G-límite) de una sucesión de funciones $\varphi_n(x)$ tal que:

$$\forall x: \lim \varphi_n(x) = 0; \lim \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx = 1 \quad (6)$$

Se cumple que

$$\lim TF\varphi_n(x) = 0 \quad (7)$$

y si $f(x)$ está unívocamente determinada en el infinito es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) f(x) dx = \lim \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) f(x) dx = \frac{f(+\infty) + f(-\infty)}{2} \quad (8)$$

Para representar matemáticamente una distribución rectilínea de masa total nula y provista de un momento de inercia igual a la unidad, he definido la función: $j(x)$

$$j(x) = \frac{\sigma(x)}{1+x^2} \quad (9)$$

que cumple las condiciones

$$\forall x: j(x) = 0; \int_{-\infty}^{\infty} j(x) dx = 0; \int_{-\infty}^{\infty} x^2 j(x) dx = 1 \quad (10)$$

es por tanto un momento de inercia puro, sin masa. Análogamente para las cargas eléctricas y los momentos magnéticos.

La densidad $\delta(x) + Ij(x)$ representa una masa puntual m provista de un momento de inercia I respecto a su punto de localización. De esta manera se pueden representar spines y momentos magnéticos de masas y cargas eléctricas puntuales o nulas. Al ser la densidad $j(x)$ nula, cualquier cuerpo material puede atravesarla sin que ejerza atracción gravitatoria o eléctrica sobre ningún otro cuerpo.

Un ejemplo sencillo de representación $\sigma(x)$ es cuando a tiende a infinito

$$\varphi_n(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (11)$$

que cumplen la (6) y la (7).

La representación correspondiente de la $j(x)$ es

$$f_n(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{2a(1+x^2)}, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (11 \text{ bis})$$

porque

$$\forall x: \lim_{a \rightarrow \infty} f(x, a) = 0; \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2a(1+x^2)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{arc tg } a}{a} = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{2a(1+x^2)} = 1 \quad (12)$$

Defino la U-sucesión como el límite de una familia de sucesiones $u_n(\lambda)$ de términos positivos que cumplen la condición, cuando el parámetro λ tiende a \underline{a} :

$$\forall n: \lim_{\lambda \rightarrow \underline{a}} u_n(\lambda) = 0; \lim_{\lambda \rightarrow \underline{a}} \sum u_n(\lambda) = 1 \quad (13)$$

que es la distribución de probabilidad de una v.a. repartida uniformemente al azar sobre el conjunto de los números naturales.

En el caso de cadenas de Markov discretas de infinitos estados representa el vector de probabilidad cuando la probabilidad de que el sistema esté en cualquier estado es la misma.

En el caso en que se cumple que

$$\forall \lambda: \sum u_n(\lambda) = 1 \quad (14)$$

la familia lo es de distribuciones de probabilidad discretas y si $g(z, \lambda)$ es la función generatriz se cumple que

$$\forall z < 1; \lim_{\lambda \rightarrow a} g(z, \lambda) = 0; \quad z = 1, \quad \forall \lambda: g(1, \lambda) = 1 \quad (15)$$

La U sucesión es la distribución de probabilidad de máxima entropía.

Si además de (6) se cumple que:

$$\forall x, \forall n: \varphi_n(x) \geq 0; \quad \forall n: \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx = 1 \quad (16)$$

la sucesión $\varphi_n(x)$ es una sucesión de f.f. de v.a. que convergen a una v.a. repartida uniformemente al azar.

Los resultados anteriores se pueden extender a n dimensiones, sustituyendo los puntos por esferas de radio nulo (o círculos si $n = 2$) y las distribuciones rectilíneas por radiales (simetría esférica), y las $\delta(x), \sigma(x), j(x)$ por

$$\frac{\delta(r)}{r^{n-1}}, \quad \frac{\sigma(r)}{r^{n-1}}, \quad \frac{j(r)}{r^{n-1}}; \quad n > 1, \quad r \geq 0 \quad (17)$$

y se obtienen así masas nulas o puntuales con momentos de inercia.

Nota 7^a

He llamado raíces cuadradas internas de las funciones delta de Dirac $\delta(x - a)$ y de la función sigma $\sigma(x)$ a los límites generalizados de funciones de cuadrado sumable, tales que los límites generalizados de las sucesiones de los cuadrados de los módulos de las anteriores son $\delta(x - a)$ o $\sigma(x)$

Se cumplen las notables relaciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\delta(x - a)\delta(x - b)} dx = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0, & a \neq b \end{cases} \quad (1)$$

que son las deltas de Kronecker continuas.

También son notables las fórmulas

$$\begin{aligned} \left(\sum \sqrt{p_n \delta(x - a_n)} \right)^2 &= \sum p_n \delta(x - a_n) \\ \sqrt{\sum p_n \delta(x - a_n)} &= \sum \sqrt{p_n \delta(x - a_n)} \end{aligned} \quad (2)$$

que expresan que el cuadrado de la suma es la suma de los cuadrados y la raíz cuadrada de la suma es la suma de las raíces cuadradas.

La forma dada por Heisenberg a las relaciones de incertidumbre de la Mecánica Cuántica es

$$\Delta p \Delta q \geq h / 4\pi \quad (3)$$

p y q son dos variables físicas conjugadas (por ejemplo posición y momento, tiempo y energía), h es la constante de Planck y Δ representa la varianza de una variable aleatoria (la p y la q).

En los textos de Mecánica Cuántica se admite tácitamente que estas variables aleatorias pertenecen al dominio de atracción de la ley normal (ley de Gauss), son de varianza finita. Se sigue de (3) que si existe un límite superior Δp , existe un límite inferior de Δq , pero la implicación recíproca no es cierta (p y q juegan un papel simétrico). Se sigue también que si $\Delta p = 0$ entonces $\Delta q = \infty$, es decir que si se mide exactamente el valor de p , entonces la indeterminación de q es total, es una variable aleatoria repartida uniformemente al azar. La implicación recíproca no es cierta, es decir $\Delta p = \infty$ no implica $\Delta q = 0$, solamente expresa la posibilidad de que Δq sea igual a cero, pero no la necesidad. Por esta razón creo que estas *relaciones de incertidumbre son débiles*.

La varianza Δ es una medida de la posible precisión en la medición de los valores de la variable, cuanto mayor (menor) es Δ , menor (mayor) es la precisión posible en la medición del valor de la variable.

En mi opinión si p y/o q son variables aleatorias que no pertenecen al dominio de atracción de la ley normal, su varianza Δ es infinita y la (3) no puede suministrar ninguna información sobre el comportamiento de p y q .

En la interpretación operacional de la Mecánica Cuántica en que las variables físicas son operadores, la (3) como fue demostrado por Born equivale a que entre los operadores A y B correspondientes a p y q , existe la relación

$$AB - BA = hI / 4\pi$$

donde I es el operador unidad.

En mi libro "Fundamentos de Mecánica Cuántica" (páginas 85 y siguientes) he demostrado que si los operadores A y B son de espectro discreto nunca pueden cumplir

la relación (4) y por lo tanto que *para operadores de espectro discreto no existen relaciones de incertidumbre.*

He podido demostrar la existencia de *relaciones de incertidumbre fuertes* que son aplicables a variables aleatorias no pertenecientes al dominio de atracción de la ley normal (de varianza por tanto infinita) y también a las discretas (discontinuas) basándome en mi teoría de las raíces cuadradas internas de las funciones de frecuencia o de densidad de probabilidad y de los vectores de probabilidad; así como las antecitadas raíces cuadradas internas de las deltas de Dirac y de la función sigma. He obtenido el resultado de que *si una variable aleatoria tiene una distribución de probabilidad discreta (en particular si tiene un valor cierto) la variable conjugada está repartida uniformemente al azar, siendo también verdadero el recíproco.*

Ello es consecuencia de lo siguiente; la transformada de Fourier (TF) de una raíz cuadrada interna de $\delta(x - a)$ es

$$TF \sqrt{\delta(x - a)} = e^{iax} \sqrt{\sigma(x)} \quad (5)$$

que es una raíz cuadrada interna de $\sigma(x)$.

Si p_1, \dots, p_n, \dots es una distribución de probabilidad discreta, entonces

$$TF \sum \sqrt{p_n \delta(x - a_n)} = \sum e^{ia_n x} \sqrt{p_n \sigma(x)} \quad (6)$$

y al ser

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(a-b)x} \sigma(x) dx = \begin{cases} 1, & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \quad (7)$$

como consecuencia de (1) y (5) se sigue que la segunda (6) es una raíz cuadrada interna de $\sigma(x)$ lo que prueba el teorema directo antes subrayado. El teorema recíproco se sigue de que la TF de una raíz cuadrada interna de $\sigma(x)$ las segundas (5) y (6), son raíces cuadradas internas de $\delta(x - a)$ y $\sum p_n \delta(x - a_n)$ la última como consecuencia de (2).

Las integrales de las funciones generalizadas delta y sigma que figuran en esta nota y en la anterior, son los límites ordinarios de las integrales de las sucesiones de funciones ordinarias, de las que las anteriores funciones generalizadas son límites generalizados.

Bibliografía

- [1] SEELING: "Albert Einstein". Edit. Europa. Zurich 1960.
- [2] FRANK: "Albert Einstein, sein Leben und seine Zeit" Edit. Vieweg, Braunschweig 1979.
- [3] PAIS: "Subtle is the Lord... The Science and the life of Albert Einstein" Oxford University Press 1982.
- [4] KOUZNETSOV: "Einstein" Editions du Progrès. URSS 1989. "Albert Einstein-Michele Besso Correspondance" Edit. Hermann, Paris 1982. "Einstein-Born Briefwechsel" 1971.

Puede consultarse mi discurso de apertura del curso 1975-76 de la Real Academia de Ciencias, mis conferencias en el centenario de Einstein y en el cincuentenario de la Mecánica Cuántica y las notas de mis conferencias en el curso de Historia de las Matemáticas y de la Estadística aplicada a la Física, publicadas por la Real Academia de Ciencias.

También mis conferencias sobre el Universo de Einstein, el legado de Galileo, el sistema solar y la materia en las Físicas Cuántica y Relativista publicadas por los amigos de la Cultura Científica.

Y mis libros "Mecánica y Cálculo Tensorial" (Editado por Dossat), "Grandes Problemas de Filosofía Científica" (por Editora Nacional), "Diccionario de Matemática Moderna" (editado por Ra-Ma), "Fundamentos de Mecánica Cuántica" y "Curso de Mecánica en forma de problemas" (editados por la Escuela T.S. de Ingenieros Agrónomos).

Aditamenta

En la Historia de la Matemática en el siglo XIX (2ª parte) en la nota 2ª, página 260, de mi conferencia titulada: "El desarrollo de la Mecánica y de la Física Matemática en el siglo XIX. 2ª parte" salió en blanco la fórmula (2). Esta fórmula es la siguiente:

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = 0 \quad (2)$$