La teoría de la decisión de Pascal a Von Neumann

SIXTO RÍOS GARCÍA* y SIXTO RÍOS-INSÚA**

1. Introducción

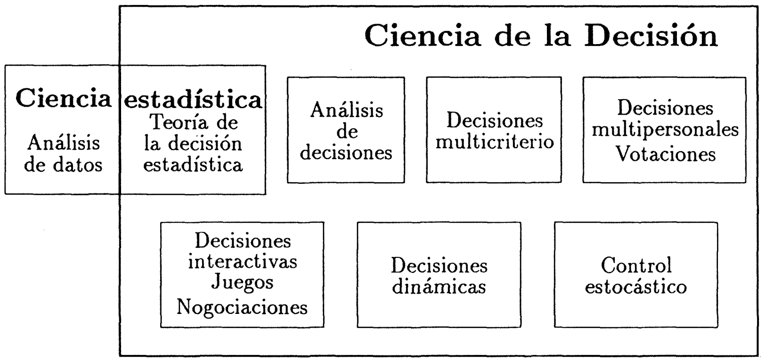
Las mayores aportaciones y progresos de la Ciencia de la Decisión corresponden a los últimos 70 años y por eso no es extraño que no exista un libro enteramente dedicado a su historia. Las ciencias, como los seres vivos, nacen y crecen, pero aquéllas nunca mueren y siempre resulta difícil señalar cuándo empieza y cuándo termina un cuerpo de conocimientos científicos. A primera vista hasta la última metodología descubierta ayer es hoy historia, pero con este criterio un curso de Historia de la Ciencia de la Decisión se convertiría en una enciclopedia. Digamos que, en la exposición histórica, énfasis se ha de poner no en el estado actual de las metodologías sino en su evolución en el tiempo para conocer ese largo camino que va del planteamiento empírico de un problema al conjunto de ideas y metodologías que conducen a la solución conceptual y teórico-práctica del mismo. En ese lento proceso del desarrollo histórico de una teoría se han de observar las distintas trayectorias seguidas por los investigadores, seleccionando aquéllas que han convergido a una formulación generalmente aceptada y suficientemente abarcativa, que resuelve una amplia variedad de problemas planteados, a veces aparentemente inconexos. Nosotros queremos movernos dentro del programa de este Curso de Historia de la Matemática, desarrollando los aspectos históricos de los procesos de decisión desde su nacimiento científico en natural coincidencia con los albores del Cálculo de Probabilidades (1662), hasta los trabajos de Von Neumann (1944) que han permitido la construcción de ese gran mundo de ideas, conceptos y métodos que ahora se llama *Teoría General de la Decisión o Ciencia de la Decisión.*

En este marco ocupa un espacio importante la *Teoría de la Decisión Estadística* que comprende un conjunto de conocimientos y metodologías relativos a problemas de inferencia y decisión en incertidumbre y responde al estado actual de la *Estadística Matemática.* Pero también otros, que se reflejan en el cuadro 1 y se refieren a las decisiones multipersonales, interactivas, multicriterio, dinámicas,..., constituyen núcleos importantes de investigación y aplicaciones a los problemas económicos, sociales, psicológicos, biológicos, militares,..., de nuestro tiempo. Esperamos que

* Académico Numerario.
** Universidad Politécnica de Madrid.

nuestro resumen histórico permita al menos establecer un modesto mirador, para atisbar el formidable conjunto.

Cuadro 1



2. La tabla de decisión de Pascal

Es importante observar la simultaneidad del nacimiento de la teoría de la decisión y la teoría de la probabilidad. Ambos se encuentran en los primeros escritos de Blas Pascal. Concretamente, en 1662, quizá huyendo de las demasiado frívolas aplicaciones de los juegos de azar que en su época influyen significativamente en el desarrollo del Cálculo de Probabilidades, publicaba en la *Lógica* de Port Royal, la famosa "Apuesta por la Creencia en Dios", en que aparece implícita la noción de probabilidad, que ahora llamamos personal o subjetiva y se ha mostrado como la más apropiada para el planteamiento y la metodología de la teoría de la decisión.

Veremos cómo la importante contribución apologética que se propuso Pascal va asociada asímismo al primer planteamiento de lo que hoy se llama una matriz de decisión, cuyo estudio le conduce a la introducción natural de una serie de conceptos modernos como regla de decisión, dominancia, optimización en esperanza, dominancia en esperanza,... Lástima que la dificultad intrínseca del tema teológico retrasara la influencia del "Rien, infini" de Pascal en el desarrollo de la teoría de la decisión y la teoría de juegos.

Resumiendo el pensamiento de Pascal, podemos decir con lenguaje moderno que la teoría de la decisión nos conduce a elegir la mejor alternativa cuando hay incertidumbre ante lo que puede suceder en el futuro. Es decir, dadas:

- Una lista exhaustiva de *hipótesis* respecto a cómo es "el mundo".
- Un *conjunto de informaciones* que nos indican la relevancia de estas hipótesis.
- Un inventario de *decisiones posibles.*
- Una *matriz de valoración de las consecuencias* de los pares hipótesis-decisión.

se trata de determinar la mejor decisión.

Pascal excluye en su ejemplo la posibilidad de experimentación, es decir, escribe para un hombre indeciso, que no tiene en cuenta milagros, testimonios de fe,... y el problema que plantea no es la existencia de Dios, sino cuál debe ser el comportamiento de un individuo al decidir o elegir entre una vida piadosa (de acuerdo con las normas de la religión cristiana) y una vida mundana (sin tenerlas en cuenta).

De acuerdo con lo dicho, Pascal considera sólo dos únicos estados, existe Dios y no existe, que designaremos por S_1, S_2 y dos decisiones posibles para un hombre: d_1 y d_2 (ya indicadas). En la matriz de decisión correspondiente

	S_1	S_2
d_1	a_{11}	a_{12}
d_2	a_{21}	a_{22}

no es fácil llegar a establecer una valoración para las consecuencias $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, aunque sí un orden de preferencia que variará de unos inviduos a otros. Pascal considera que si un individuo acepta laordenación $a_{11} \succ a_{21}, a_{12} \succ a_{22}$, la decisión d_1 (llamada *dominante*) da siempre tanto para el estado S_1 como el S_2 la mejor decisión. Sin embargo, otro hombre pondría $a_{11} \succ a_{21}, a_{12} \succ a_{22}$, la decisión d_1 (llamada dominante) da siempre tanto para el estado S_1 como el S_2 la mejor decisión. Sin embargo, otro hombre pondría $a_{11} \succ a_{21}$, pero $a_{22} \succ a_{12}$. En este caso ninguna de las alternativas domina a la otra y, entonces, Pascal sugiere la regla de la *máxima esperanza de utilidad* para seleccionar la mejor decisión. Viene a decir que suponiendo $\Pr(S_1) = \Pr(S_2) = 1/2$, como a_{11} es muy superior a las otras utilidades, será también

$$\sum_i \Pr(S_i) a_{1i} > \sum_i \Pr(S_i) a_{2i}$$

Finalmente, para abarcar también la posibilidad $\Pr(S_1) > 1/2$, $\Pr(S_2) < 1/2$, es decir, el caso de un conjunto de distribuciones de probabilidad aceptables, indica la llamada *regla de esperanza dominante*, en que se ha de elegir d_1 si para alguna distribución de probabilidad aceptable la esperanza de d_1 supera a la de cualquier otra d_i y en ninguna distribución de probabilidad aceptable la esperanza de d_1 es menor que la de alguna otra d_i.

Parece claro que esta contribución de Pascal, no frecuentemente citada, es como una joya que conserva, tras el paso del tiempo, toda la influencia de una aportación singular, a pesar de que su carácter apologético haya contribuido a aumentar la dificultad de comprensión de sus ideas intrínsecas, sobre todo en los primeros tiempos.

3. Huygens y la esperanza matemática

Dos conceptos fundamentales que intervienen en los problemas de la *Teoría General de la decisión individual* son la incertidumbre y la valoración de las consecuencias. Es natural buscar una medida para la incertidumbre y otra para las consecuencias de las decisiones en incertidumbre. La primera conduce al concepto de probabilidad en sus versiones frecuentista, lógica y personal o subjetiva, que son tratadas de modo suficientemente detallado en otra conferencia de este ciclo. Por ello, vamos a centrarnos aquí sobre la medida de la utilidad de las consecuencias de las decisiones realizadas en incertidumbre, que va a constituir nuestro objetivo más inmediato.

A pesar de las contribuciones de Pascal y Fermat en problemas concretos como los presentados al caballero de Meré, el concepto de *esperanza* o *valor esperado* no se había introducido hasta Huygens en su libro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (1657). Si nos presentan una situación en que hay unas probabilidades conocidas de obtener unas ciertas cantidades, ¿qué precio justo debemos asignar a tal juego? No era trivial la respuesta y fue Huygens quien la dio mediante el concepto de *esperanza matemática.*

Pero esa respuesta es correcta cuando se supone que se juega un gran número de partidas lo que más tarde demostró Jacques Bernouilli con su teorema de los grandes números. En su libro *Ars Conjectandi* (1713) da la primera demostración rigurosa de la ley de los grandes números.

En cambio, si se supone una sola jugada, ¿qué se puede decir del *valor en certidumbre* del juego? A este problema, que es el origen de la moderna teoría de la utilidad, central para la teoría de la decisión, aporta ya Huygens algunas luminosas ideas como la de *juegos equivalentes*, que se relacionan con trabajos muy posteriores de Ramsey, de Finetti, Kolmogoroff, Von Neumann, Savage,... sobre la axiomática de la utilidad. Así, admite que el precio justo debe ser *aditivo*, que se debe aceptar la composición de loterías o perspectivas aleatorias mediante reglas de probabilidad y también relaciona sus ideas con las medias de datos empíricos que desde John Graunt (1662) utilizaban los demógrafos, actuarios,... para resolver problemas de seguros, mortalidad,...

4. Daniel Bernoulli y la esperanza moral

Daniel Bernouilli muestra con varios ejemplos que el principio de la esperanza matemática no es universalmente aceptable e introduce unas ideas más sólidas a partir de su exámen crítico de las afirmaciones de Huygens, inspirándose en la correspondencia de Gabriel Cramer a su tío Nicolás Bernoulli. En ella se establece la prioridad cronológica de Cramer para la noción de utilidad así como buena parte de las ideas que se utilizarían posteriormente.

En 1738 Daniel Bernoulli publicó su famoso trabajo titulado *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, en el que aportó ideas importantes para el tratamiento de las decisiones en riesgo o juegos, que él llamaba brevemente *riesgos*. Dice Bernoulli refiriéndose a la regla del valor esperado:

Desde que los matemáticos comenzaron a estudiar la medida del riesgo existe un consenso general sobre la siguiente proposición: Los valores esperados se calculan multiplicando cada posible ganancia por el número de veces que se puede presentar y dividiendo la suma de estos productos por el número total de casos posibles, donde en esta teoría se insiste en que todos los casos posibles sean de la misma probabilidad. Aceptada esta regla, el problema se reduce a la enumeración de todas las alternativas, su partición en casos equiparables y su inserción en las correspondientes clasificaciones.
El exámen de las numerosas demostraciones de esta proposición indica que todas se apoyan en una hipótesis: puesto que no hay razón para suponer que de dos personas que se encuentran ante riesgos idénticos, cada uno esperaría tener sus deseos más estrictamente realizados, cada uno debe considerarlos igual en valor.
En esta regla no se toma en consideración ninguna característica de las personas, sólo las características del juego. Realmente se trataría de establecer reglas mediante las que cada uno pudiera estimar sus perspectivas al tomar riesgos teniendo en cuenta sus circunstancias financieras.

Parece aquí bastante claro que Bernoulli planteó el problema en términos modernos muy superiores a su época. Trata de Aclarar su pensamiento con el siguiente ejemplo:

Un pobre se encuentra un billete de lotería que le puede dar con igual probabilidad 0 ó 20000 ducados, ¿evalúa este individuo su billete en 10000 ducados? ¿No sería mal aconsejado vender su billete por 9000 ducados?. Para mí la respuesta es negativa.

En términos de matriz de la decisión tendríamos para el pobre

	0.5	0.5
d_1	20000	0
d_2	9000	9000

y aplicando el criterio de la esperanza matemática

$$E[d_1] = 10000, \qquad E[d_2] = 9000$$

luego

$$E[d_1] > E[d_2] \quad \text{pero} \quad d_1 \prec d_2$$

Para el rico

	0.5	0.5
d'_1	11000	-9000
d'_2	0	0

y con el criterio de la esperanza matemática

$$E[d_1'] = 1000, \quad E[d_2'] = 0$$

luego

$$E[d_1'] > E[d_2'] \quad y \quad d_1' \succ d_2'$$

> Por otra parte, me inclino a creer que un hombre rico estaría mal aconsejado si rehusara comprar el billete por 9000 ducados. Lo que parece claro es que no todos los hombres deben utilizar la misma regla para evaluar un juego.

En consecuencia, la regla de la maximización de la esperanza del valor debe rechazarse. La exposición de Bernouilli conlleva gran perspicacia y su argumento lo refuerza con otros ejemplos, siendo el más famoso el conocido como paradoja de San Petersburgo (titulado así por el nombre de la revista donde lo publicó), aunque realmente lo tomó de un trabajo anterior de su tío Nicolás Bernoulli. Trata de ilustrar con él que los individuos prudentes no obedecen siempre al principio de la esperanza matemática, es decir, que lo utiliza para descartar la esperanza matemática del valor monetario como regla para evaluar los riesgos. El juego es como sigue: Se lanza una moneda hasta que aparece cara por primera vez y, entonces, hay un pago de 2^i monedas donde i es el lanzamiento en que aparece cara la primera vez. ¿Cuál es el precio equitativo de este juego? La serie que define el valor esperado del juego es

$$\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + \cdots + \frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}$$

que diverge y, por tanto, si la esperanza matemática determina la valoración del juego cualquier precio será demasiado pequeño.

Y sigue acertado Bernoulli mientras se mantiene en ejemplos concretos, como el consejo para el envío en dos barcos en vez de en uno de una cantidad global de monedas, en que prescribe la diversificación, como ya hiciera Sancho Panza en 1605 al aconsejar a Don Quijote "no poner todos los huevos en la misma cesta".

Fijémonos que D. Bernoulli descubre por primera vez en la historia la raíz subjetiva del problema y se propone dar una nueva solución al mismo, pero cuando quiere dar tal *solución general* no está acertado. Dice Bernoulli:

> Pero cualquiera que considere el problema con perspicacia e interés pensará que el concepto de *valor* que hemos usado en esta regla puede definirse de modo que haga el procedimiento universalmente aceptable sin reservas. Para hacer esta determinación del valor de un *item* no se debe uno basar sobre su precio, sino sobre la utilidad que proporciona. El precio del item depende solo de la cosa misma y es igual para todos, la utilidad depende de las circunstancias particulares de la persona que hace la estimación. Es altamente probable que cualquier incremento de riqueza, por insignificante que sea, siempre resultará en un

incremento en utilidad, que es inversamente proporcional a la cantidad de bienes ya poseídos.

Y aquí viene la frase repetida:

No hay duda que una ganancia de 1000 ducados es más significativa para un pobre que para un rico, aunque ambos ganen la misma cantidad.

Con aquellas hipótesis, la solución de Bernoulli fue tener en cuenta la disminución de la utilidad marginal del dinero. En palabras de Laplace:

Él distinguió la esperanza matemática de la esperanza moral de un suceso incierto del que dependía una cantidad de dinero.

Mediante un ingeniso proceso, que consiste en definitiva en plantear e integrar la ecuación diferencial

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{k}{x}$$

donde du es el incremento de utilidad que resulta de un incremento dx de la riqueza del individuo y k una constante, llega a la función logarítmica como función de utilidad

$$u(x) = k \log \frac{x}{c}$$

donde c representa la cantidad de riqueza necesaria para la subsistencia. Con esta función da como solución del problema de la utilidad de un riesgo lo que llama valor esperado del valor moral o, simplemente, *esperanza moral*, dada por

$$E[\log \xi] = \Sigma\, p_i \log x_i$$

es decir, que calcula el valor moral de un juego como la esperanza del logaritmo de los valores monetarios.

Notemos que Bernouilli planteó con extraordinaria claridad el problema y tenía razón en buscar la explicación en la utilidad, pero su solución es bastante criticable. En primer lugar, después de haber insistido tanto en el aspecto subjetivo del problema de la utilidad empieza por dar una función de utilidad en certidumbre, sin tener en cuenta que se trata de preferencias en riesgo, y que la forma a que se llega dice que es válida para *todos* los individuos y que sólo depende de su riqueza. Así, se equivocó en la suposición especial con respecto a la forma de la curva de utilidad para la que no había evidencia y tampoco había contrastado. En segundo lugar, sigue aceptando la idea de la esperanza matemática, que había resultado en la aplicación a problemas de pruebas repetidas, pero aquí se trata de un problema en que un individuo participa en el juego una sola vez.

5. Los precursores: Bayes, Laplace, Gauss, Neyman, Fisher,...

Tras el trabajo fundamental de Bernoulli hay que señalar como precursores de la teoría de la decisión estadística a Bayes, Laplace, Gauss, Neyman, Fisher,...

Thomas Bayes, clérigo presbiteriano, que vivió en Inglaterra entre 1702 y 1761, cultivó con profundidad el Cálculo de Probabilidades, legado de Pascal y Fermat, dejando entre sus papeles un sencillo teorema que fue publicado después de su muerte, en las *Philosophical Transactions* de la *Royal Society* (1763). Bayes, que ni siquiera pretendió publicar su teorema, probablemente nunca imaginó que 200 años después un eminente estadístico inglés, el Prof. D.V. Lindley, escribiera:

> Es difícil encontrar un trabajo que contenga ideas tan importantes yu originales como el de Bayes. Su teorema debía figurar al lado de la fórmula de Einstein, $E = mc^2$, como una de las grandes y sencillas verdades.

Concretamente abordaba Bayes en su trabajo el llamado problema inverso de la probabilidad, que anteriormente J. Bernoulli, en su *Ars Conjectandi* (1713), planteaba así:

> Para ilustrar esto con un ejemplo supongo que tengo una urna con 3000 bolas blancas y 2000 bolas negras, que alguién ha puesto allí y que yo, sin conocer tales números, trato de averiguar la proporción de bolas blancas y negras, mediante un experimento reiterado que consiste en sacar una bola al azar, observar su color y reponerla a la urna,...

En definitiva, el problema consiste en pasar de la información que da la realización de un cierto número de experimentos o muestra de resultados, al conocimiento en forma probabilística de la composición de la urna o población. Si llamamos θ a un parámetro que caracteriza el modelo, en este caso la composición desconocida de la urna, y x un conjunto de datos, en este caso la frecuencia observa, el teorema de Bayes

$$\Pr|\theta|x) = \frac{\Pr(\theta)\Pr(x|\theta)}{\Pr(x)}$$

permite realizar la inferencia que consiste en pasar del dato particular x a la proposición general θ, mediante el cálculo de $\Pr(\theta)$ y $\Pr(x|\theta)$.

Este teorema, que Laplace redescubrió y aplicó muchos años después, constituye la base de la inferencia bayesiana, que se desarrolló y utilizó hasta la Primera Guerra Mundial, junto con otras metodologías, que se suelen denominar de estimación y contraste de hipótesis.

Después surgieron los importantes trabajos de Fisher, que con su variada gama de técnicas, más fáciles de elaborar, arronconaron las ideas bayesianas, a lo que contribuyeron también los trabajos más formalizados de Neyman-Pearson y Wald, que campean a partir de los años treinta entre estadísticos teóricos y aplicados.

Volviendo al trabajo de Bayes, se suele lamentar que formule la distribución a posteriori, pero no indique su aplicación a calcular la probabilidad de que el suceso ocurra en la siguiente prueba, lo que hace Laplace en 1774, resolviendo así por primera vez un problema de predicción. Aparte de esta contribución, tiene Laplace otra importante al resolver *un problema de decisión* en relación con la estimación de las órbitas de planetas. Su primer resultado (1812) es que, fijada una distribución, la distancia esperada a un punto es la mediana de la distribución. Basándose en esta propiedad, sugiere utilizar la mediana de la distribución a posteriori como estimación del parámetro de localización, supuesta uniforme la distribución a priori.

Aquí aparecen claramente los elementos básicos de un problema de decisión, que con la nomenclatura actual serían:

- las *decisiones* que son las estimaciones,
- los *estados de la naturaleza* que son un subconjunto de los números reales,
- la que llamaremos *función de pérdida*, que es el valor absoluto de la diferencia, y
- las *observaciones* que son la muestra de la distribución siendo elparámetro de localización el verdadero estado de la Naturaleza.

Puede decirse, en fin, que Laplace poseía lo esencial de la filosofía de lo que hoy se llama *análisis de decisiones*, como resulta de la lectura de su famosa ensayo publicado en 1912.

Gauss da un paso más en 1821, demostrando que la media de una distribución hace mínimo el error cuadrático esperado e indicando que tanto la elección de Laplace como la suya son casos particulares de una función de pérdida más general. Y así prueba el que ahora se llama teorema de Gauss-Markov. Viene a decir Gauss:

> El teorema de los mínimos cuadrados da la combinación más ventajosa de las observaciones, no aproximadamente, sino en un sentido absoluto y esto para una distribución arbitraria de errores.

Vemos así que, a comienzo del siglo XIX, Laplace y Gauss se plantearon y resolvieron en relación con problemas prácticos de astronomía, problemas concretos de decisión, y que por otra parte existían ya en aquella época conceptos y métodos como probabilidad a priori, condicional y a posteriori, fórmula de Bayes, estimación, función de pérdida, función de utilidad, que habrían permitido un planteamiento amplio de problemas de decisión.

Sin embargo, como ya hemos indicado, otra corriente de trabajos, nacidos de los problemas de la inferencia experimental en agricultura, medicina, biología,... debidos a Galton, Pearson, Student, Fisher, Neyman, E. Pearson, lleva por los caminos de la inferencia a la teoría de la estimación y contraste de hipótesis y a progresos fundamentales de la Ciencia Estadística.

Hay así que esperar a que problemas importantes de las nuevas tecnologías, especialmente surgidos del estudio de los aspectos económicos del control de calidad, inspección por muestreo,..., en la Segunda Guerra Mundial, hagan necesario el enfoque decisional de la Estadística, introducido por Wald con su modelo de la decisión en incertidumbre.

6. Los modelos de Wald

El propósito de Wald, en sus primeros trabajos, es hacer una síntesis de las teorías existentes de estimación y contraste de hipótesis y lograr un modelo matemático que permita plantear y resolver el llamado "problema fundamental de la inferencia estadística". Desde luego en su memoria de 1939 aparecen los tres fundamentales en el modelo de decisión: *espacio de acciones, espacio de estados, espacio de consecuencias*, más un cuarto que es un *experimento o conjunto de experimentos* que proporcionan una mestra x de observaciones cuya distribución depende del verdadero estado θ de la Naturaleza. Estos experimentos que deben permitir al decisor minimizar su pérdida, se suelen definir por la distribución condicional $f(x|\theta)$ de la variable x. En el modelo de Wald la primera idea era introducir el concepto de función de decisión, como una regla que especifica qué decisión $\delta(x) \in \mathcal{D}$ se elegirá para cada posible valor observado x. La consecuencia del par formado por una regla de decisión $\delta(x)$ y un estado θ es una pérdida $L(\delta(x),\theta)$ y el problema es hacer mínima esta pérdida, eligiendo adecuadamente la decisión $\delta(x)$, tras observar x. Pero el problema se complica porque θ y x son desconocidos (inciertos). Un primer camino introducido por Wald es construir una *perdida media*, llamada *función de riesgo*.

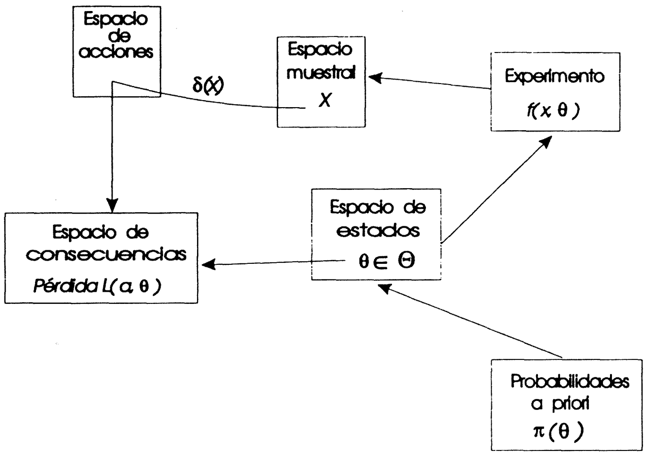
$$R[\delta(x),\theta] = \int_X L(\delta(x),\theta) f(x|\theta)dx$$

Fijada $\delta(x), R$ es una función de θ, que se utiliza como punto de partida para la comparación de reglas de decisión, lo que le lleva a los conceptos de *decisión dominada, admisible, clase completa y clase minimal completa.* Conviene, sin embargo, indicar que este primer modelo de Wald presenta inconvenientes que evitará más tarde en su segundo trabajo (1945), fuertemente influenciado por la teoría de juegos de Von Neumann, cuyas bases eran conocidas desde 1928, pero cuyo libro aparece en 1944. Esto le conduce a considerar el problema de decisión estadística como análogo a un juego bipersonal de suma nula en que el oponente al decisor es la Naturaleza que se considera como un segundo jugador.

Wald aplica el criterio minimax para seleccionar decisiones en el caso de falta total de información sobre el parámetro θ. También asigna una función de peso $\omega(\theta)$ a los vectores $\theta \in \Theta$ y da como regla para elegir la decisión d_0 la que minimiza el riesgo total

$$\int_\Theta R[\delta(x),\theta]\omega(\theta)d\theta$$

a la que llama regla de Bayes.



Conviene observar que Wald y sus seguidores han desarrollado su metodología basándose en el concepto frecuentista de probabilidad, de modo que el parámetro θ puede, a veces, no ser susceptible de interpretación como una variable aleatoria sino como un valor desconocido pero fijo, al cual no se le aplica dicho concepto de probabilidad.

Finalmente, en 1950 resume su obra en la famosa monografía *Statistical Decision Functions*, en que demuestra que las únicas soluciones admisibles, son esencialmente las de Bayes, que forman una clase minimal completa.

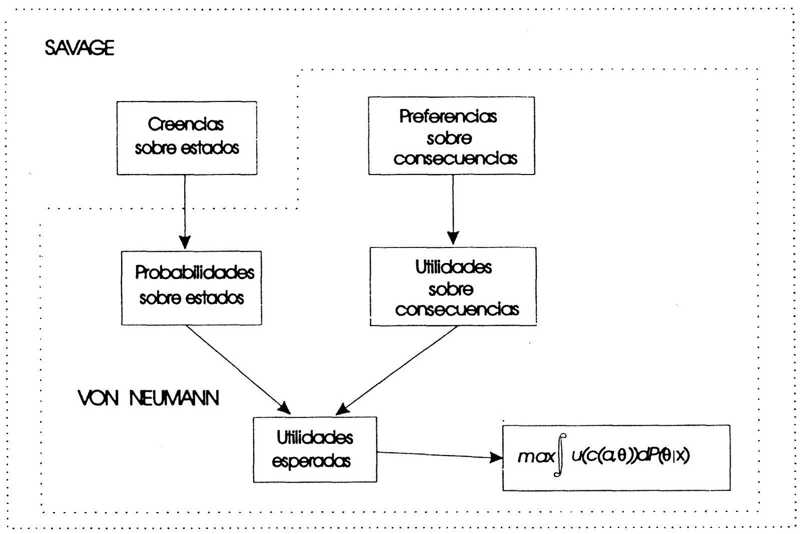
A partir de 1950 trabajan gran número de importantes estadísticos para establecer nuevos resultados en la teoría, a la vez que el perfeccionamiento matemático de la misma: Kiefert, Sobel, Weiss, Wolfowitz, Stein, Blackwell, Le Cam,... Con ellos se han extendido las posibilidades de aplicación a capítulos clásicos de la estadística como el diseño de experimentos, muestreo, métodos no paramétricos, así como puntos de vista nuevos como el análisis secuencial, introducido por el propio Wald para extender el espacio de decisiones, incluyendo decisiones intermedias que permitan buscar más datos, si el coste de los mismos lo permite y decisiones terminales.

Hay que señalar como laguna importante de la metodología waldiana el no implicar la incertidumbre en la valoración de la función de pérdida, sobre todo cuanto ya se había publicado la teoría de la utilidad en riesgo en el libro de Von Neumann (1944).

7. Métodos bayesianos

Como se ve, Wald y sus seguidores se aferran a la idea tradicional de modelizar el comportamiento físico del experimento y sus consecuencias, una corriente de pensamiento, que enlaza más directamente con Pascal, Bayes y D. Bernoulli, se centra sobre el problema de medida de creencias y preferencias individuales como básico para llegar a un modelo ajustado al enfoque subjetivista o personal del problema de decisión que trata de modelizar inspirándose en el proceso humano de formar creencias y tomar decisiones.

Métodos Bayesianos

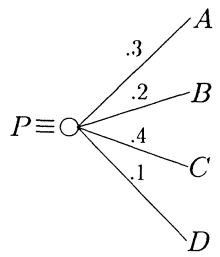


No insistiremos aquí sobre el concepto de probabilidad subjetiva, como un grado de creencia, uno de los dos elementos básicos de la metodología bayesiana, pero sí haremos un breve resumen A) de las ideas de Von Neumann para pasar finalmente B) al enfoque bayesiano de Savage sobre el problema fundamental de la decisión estadística.

A) Las dos realidades que parecen necesarias para la aparición del nuevo paradigma de la *utilidad esperada*, a saber, la progresiva axiomatización de la matemática (Hilbert, Kolmogoroff,...) y las fuertes necesidades de las aplicaciones económicas y militares, consecuencia de la Segunda Guerra Mundial se dan cuando Von Neumann-Morgenstern se interesan por tal problema, secularmente importante, y consiguen su solución (1944). Solución que no habían logrado ni Laplace ni Gauss, a pesar de que a comienzos del siglo XIX estaban en posesión de esquemas y recursos fundamentales como la fórmula de Bayes, la tabla de decisión de Pascal, la función de pérdida,...

Características del nuevo enfoque sobre la decisión son: 1° el concepto de preferencia se extiende no sólo al dinero, sino a objetos (automóviles, enfermedades, días de curación,...); 2° la utilidad se asocia al concepto de probabilidad mediante la idea de comparar situaciones aleatorias simples para pasar a situaciones complejas mediante axiomas de racionalidad sencillos que conducen a la regla de la *máxima utilidad esperada* (M.U.E.).

Más concretamente, supondremos que el decisor está interesado en seleccionar la mejor lotería de un conjunto formado por loterías P,Q,R,..., en que es, por ejemplo,

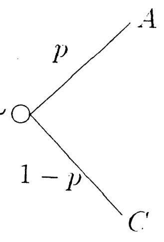


Brevemente enunciados en lenguaje sencillo los axiomas de Von Neumann-Morgenstern son:

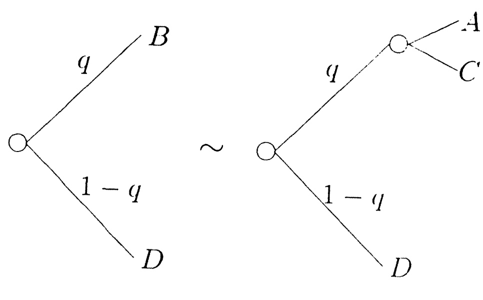
Ax. *(Preorden completo).* Tiene sentido establecer todas las preferencias $A \succcurlyeq B$, $B \succcurlyeq C$,..., y entre loterías, y estas preferencias son transitivas, reflexivas y completas.

Ax. II *(Continuidad)*

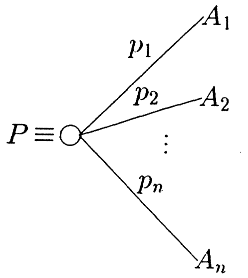
$A \succeq B \succeq C : \exists p : B \sim$



Ax.III *(Sustitución)*



Teorema de representación de Von Neumann: *Si un decisor acepta para sus preferencias los anteriores axiomas, existe una función de preferencia o utilidad* $u(A_i) \in [0,1]$, *tal que a cada lotería*



le corresponde una esperanza de utilidad

$$U[P] = \sum_{i=1}^{n} p_i u(A_i)$$

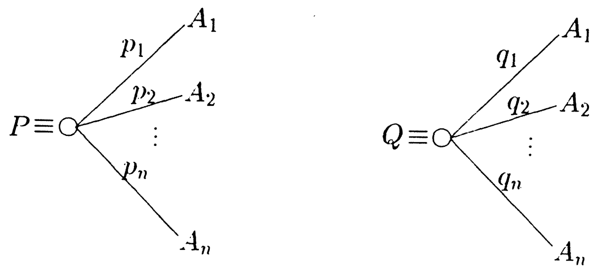
tal que es fiel

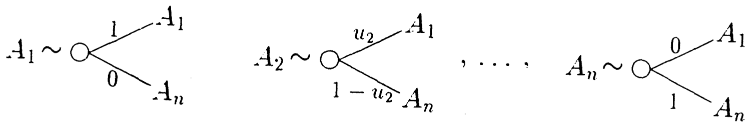
$$P \succcurlyeq Q \Leftrightarrow U[P] \geq U[Q]$$

y única, salvo una transformación lineal positiva, es decir,

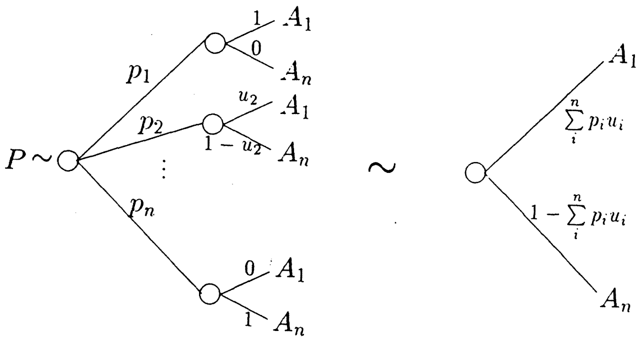
$$u' = ku + b, \;\; k > 0$$

Esquema de la demostración de Von Neumann:





(Ax.de continuidad)



(Ax. de sustitución)

$$P \succcurlyeq Q \iff \sum_{i=1}^{n} p_i u_i \geq \sum_{i=1}^{n} q_i u_i$$

(Cálculo de probabilidades)

En definitiva, en la aplicación práctica, esto se traduce en que si las preferencias de un decisor obedecen unos ciertos axiomas de gran fuerza intuitiva, este decisor debe comportarse como si se tratara de maximizar la utilidad esperada (*principio de máxima utilidad esperada*). Las dos diferencias fundamentales que hacen que la utilidad de Von Neumann resuelva el problema de Bernoulli son: 1° refleja las preferencias en riesgo del decisor en cualquier situación concreta por complicada que sea, como consecuencia de sus preferencias subjetivas en situaciones simples, y 2° al considerar una *situación única de decisión* no utiliza, para nada, la repetición de juegos en las mismas condiciones y ley de los grandes números.

Con el camino preparado por Wald, de un lado, considerando al estadístico como un decisor, y de otro por los trabajos pioneros de Ramsey (1931), De Finetti (1937) y, sobre todo, por el trabajo fundamental de Von Neumann y Morgenstern (1944), logra Savage una construcción axiomática conjunta de la probabilidad subjetiva y la utilidad que generaliza el principio de M.U.E. para pasar a un principio en que las probabilidades se determinan subjetivamente por el decisor, máxima utilidad subjetiva esperada (M.U.S.E.), punto de partida de la metodología bayesiana de la decisión, hoy muy generalmente aceptada.

En cuanto al problema básico que es la *validación* de la axiomática que conduce a la hipótesis de la utilidad esperada, origen de la interminable discusión relativa a si la teoría de la decisión es simplemente normativa o si también debe considerarse como descriptiva del comportamiento en la práctica del hombre real, iniciada por las paradojas de Allais (1953) y Ellsberg (1961), puede resumirse así: mientras no se encuentren otros modelos que se ajusten mejor que los de la esperanza de utilidad clásica (Von Neumann, Savage) o perfeccionada, se deben considerar tales modelos no sólo como normativos sino como descriptivos de las decisiones humanas en diversos grados de aproximación, suficientemente satisfactorios en la práctica corriente.

B) A partir de la axiomática de Savage, el problema central de la decisión estadística en ambiente de incertidumbre se plantea así: un *decisor* debe elegir una *decisión* a de un conjunto A. La consecuencia $c(a,\theta) \in C$ depende no solo de a sino de $\theta \in \Theta$ (conjunto de estados de la naturaleza). El decisor puede observar el resultado $X = x$ de un experimento cuya distribución es $P_X(x|\theta)$. El objetivo del decisor es hacer máxima su utilidad $u(c(a,\theta))$ eligiendo $a(x)$ adecuadamente. A través de los desarrollos que permite la axiomática de Savage, se llega a la solución Bayes $a(x)$, que es la que maximiza la utilidad esperada.

$$\int_{\Theta} u(c(a,\theta))dP(\theta|x)$$

o lo que es lo mismo, introduciendo la pérdida $d(c(a,\theta)) = -u(c(a,\theta))$, hace mínima la pérdida esperada. La regla de decisión de Bayes se puede obtener eligiendo para cada x la decisión $a(x)$ que hace mínimo el riesgo respecto a la distribución a posteriori $P(\theta|x)$.

En la metodología bayesiana se admite que el decisor

- Debe aceptar los axiomas de la probabilidad personal para que tenga sentido atribuir al parámetro desconocido θ una distribución de probabilidad.

- Siempre es capaz de asignar una distribución de probabilidad que refleje sus expectativas respecto de la presentación de los valoresde θ.
- Debe aceptar los axiomas de la utilidad esperada y responder a las comparaciones suficientes para poder construir la función de utilidad.
- Debe saber calcular la regla de decisión que maximiza la utilidad esperada.

Todo esto pone de manifiesto el hábil rodeo matemático que lleva a considerar el problema tradicional de la decisión estadística como "un problema peculiar" dentro del Análisis de Decisiones en incertidumbre.

Nota. En el orden histórico es interesante hacer referencia a algunos trabajos matemáticos que se han relacionado muy directamente y han influido en el desarrollo de la teoría de la utilidad. Vienen de una corriente que "trata de generalizar el concepto clásico de media, como procedimiento para simplificar una cuestión, mediante la sustitución de un conjunto de valores por un único valor resumen, sin alterar el problema que se considera". Este es también el problema de sustituir una lotería por su valor equivalente en certidumbre que ya preocupaba a Huygens. En este orden ideas, que se ha llamado enfoque funcional de la utilidad, hay que señalar el importante trabajo de Finetti (1931) que contiene el llamado teorema de Finetti-Kolmogoroff-Nagumo, que podría considerarse, como una versión en términos de "equivalente en certidumbre" del teorema de Von Neumann-Morgenstern (1944). Sin embargo, hay que poner énfasis en la ventaja de este, que reside en introducir la esperanza de utilidad como un operador lineal a partir de unos axiomas básicos de ordenación en un espacio abstracto, de gran fuerza intuitiva que permiten las aplicaciones desde la inferencia a la decisión estadística con natural sencillez. Y en esto reside la razón del abandono actual de la teoría de los equivalentes en certidumbre que se expresan por un operador no lineal.

$$\varepsilon[F] = u^{-1}\left(\int_{\Re} u(x)dF(x) \right)$$

como correlativo de la esperanza de utilidad de Von Neumann

$$U[F] = \int_{\Re} u(x)dF(x)$$

que es un operador lineal.

8. Análisis de decisiones

Hemos dado unas breves indicaciones de los fundamentos de la teoría de decisión, que son la base del *Análisis de Decisiones*, cuyo germen se encuentra ya en el libro de Von Neumann-Morgenstern, al introducir las dos formas clásicas de representación de juegos, a saber, *tablas y juegos en forma extensiva o árboles de decisión*. Las tablas o matrices de decisión, cuyo antecedente más remoto es la tabla de Pascal, permiten una representación natural y directa en muchos problemas en que aparecen en forma explícita alternativas, estados y consecuencias; pero es más frecuente que se busque y obtenga una representación detallada explícita de todos los escenarios que pueden aparecer en el curso de un proceso de decisión, es decir, lo que se llama un *árbol de decisión.*

La idea directriz en ese enfoque (Raiffa, 1968) es la consideración profunda de los elementos y aspectos, no necesariamente numéricos, de los problemas, comenzando por lo que podríamos llamar *modelización estructural*, porque incluso puede ser más fácilmente comprendida por los decisores o clientes (médicos, administradores,...) que los aspectos de asignación y cálculo numérico efectivo, que tradicionalmente constituyen el dominio de los especialistas por implicar en su operacionalismo la metodología probabilística bayesiana u otras. Estos aspectos cuantitativos se incorporarían al modelo en una segunda etapa, que será mejor aceptada una vez que el decisor ha penetrado en el esquema presentado por el analista de decisiones. En definitiva, tal modelo deberá ser una consecuencia del intercambio y ajuste entre el modo intuitivo de pensar del decisor y la ayuda científica del analista. Este será el camino para llegar al que suele llamar *modelo requisito*, satisfactorio para el analista o teórico de la decisión y para el decisor o práctico de la decisión.

Es decir, basado en estas directrices, el enfoque tradicional del diseño de un árbol de decisión se reduce a construir paso a paso un grafo del tipo árbol en el que el origen representa la situación inicial y el resto del árbol representa, en orden cronológico, los movimientos que corresponden al decisor y los que tienen carácter de azar o incertidumbre. De los primeros parten arcos o ramas que corresponden a alternativas para el decisor y de los segundos los que representan sucesos posibles.

Tras laboriosa asignación de utilidades y probabilidades condicionadas, se llega finalmente al modelo del problema ya en forma numérica. La propiedad fundamental de la utilidad esperada, asociada al método regresivo de la programación dinámica permite, partiendo de los nodos últimos en que se encuentran las utilidades finales, regresar, obteniendo en cada paso el nodo de decisión al que corresponde la máxima utilidad esperada, para llegar, finalmente, al origen con la solución deseada. Este enfoque se refiere también al diseño de experimentos, análisis secuencial, análisis de imágenes,... y otros problemas que se consideran como aplicaciones importantes del Análisis de Decisiones y la Ciencia Estadística a la Medicina, Psicología, Tecnología, Justicia,...

9. Decisiones con criterios múltiples

Parece que el primer problema de decisión multicriterio, del que se conserva recuerdo histórico, fue propuesto por el químico inglés J. Priestly a B. Franklin. Este indicó en una carta de 1772 al primero una ingeniosa metodología que él llamaba "álgebra moral o prudencial", y que viene a ser una asignación de pesos subjetivos a los diferentes criterios que permiten una comparación de los resultados previsibles de dos decisiones. Podría considerarse como el antecedente más remoto de los métodos que ahora se llaman compensatorios.

Pero el mayor impulso al planteamiento correcto de los problemas de decisión multicriterio, vino de la teoría económica tradicional, concretamente de la economía del bienestar y la teoría de la utilidad, de las que el trabajo de Stigler (1950) constituye una exposición histórica excelente del paso del tiempo de 1776 a 1915.

La idea de óptimo vectorial, que es básica en la teoría del equilibrio económico, se desarrolla a partir de Adam Smith en su tratado *The Wealth of Nations* (1886). La teoría del bienestar trató tradicionalmente con agentes económicos, cada uno de los cuales tiene como objetivo alcanzar su máxima utilidad personal, para llegar a un equilibrio económico. Pero es a partir de 1870 cuando la teoría de la utilidad empieza a ser generalmente aceptada por los economistas a raíz de los trabajos de Menger (1871), Walras (1874-77) y Jevons (1911), que contribuyeron a aclarar el difícil concepto de equilibrio económico.

El primer tratamiento matemático del problema se debe al economista F.Y. Edgeworth (1845-1926), seguido por V. Pareto (1848-1923), que extendió la teoría y dio unas condiciones generales necesarias para la existencia del óptimo, que aún se viene denominando *óptimo de Pareto*. Su tratamiento del problema con las matemáticas del ingeniero, que él dominaba, fue mucho más avanzado que el de los economistas de su tiempo, que eran más verbalistas que matemáticos. Hasta Jevons se aceptaba que la utilidad de un consumidor era medible y a partir de la función de utilidad se obtenían las curvas de isoutilidad. Sin embargo, es Pareto el primero en tratar el problema en forma inversa y considerar como punto de partida las curvas de isoutilidad, obtenidas por comparaciones de complejos de bienes y mediante ellas construir la función de utilidad, que también llama *ofelimidad*.

Lástima que Pareto y los economistas de su época no conocieran los trabajos de importantes matemáticos contemporáneos como Cantor (1895) y Hausdorff (1906), que establecieron, el primero, condiciones necesarias y suficientes para la existencia de funciones de utilidad representativas de un orden débil estricto y, el segundo, dio el primer ejemplo de un orden completo (el llamado orden lexicográfico) para el cual no existe una función de utilidad que lo represente. Pero estos trabajos que hubieran contribuido a un progreso rápido, permanecen desconocidos durante 50 años por los economistas hasta Debreu (1954), que obtiene el Premio Nobel en 1983.

En el famoso *Manuale di Economia Politica* de Pareto (1906) aparece en esta forma el concepto de maximal:

> Diremos que los miembros de una colectividad gozan máxima ofelimidad en una cierta posición, si es imposible encontrar un camino que conduzca a otra posición de modo que la ofelimidad de todos los individuos de la colectividad crezca o decrezca. Es decir, que cualquier pequeño desplazamiento de aquella posición tiene necesariamente el efecto de aumentar la ofelimidad de que gozan algunos individuos y de disminuir la de otros.

Aunque esta definición representa un progreso importante sobre autores precedentes, se echa de menos que aparezca explícitamente la noción de estado alcanzable, y para tener una teoría matemáticamente válida hay que llegar a Debreu, que desarrolla condiciones necesarias y suficientes de una forma moderna en su libro Theory of Value publicado en 1959:

> Un óptimo de la economía E se define como un estado alcanzable tal que no existe otro estado preferido al mismo.

O. Morgenstern señala en un importante trabajo sobre los problemas de interés fundamental en la teoría económica moderna al que se llama de decisiones con criterios múltiples: Dice:

> La teoría económica actual trata de problemas de máximo, por ejemplo, de beneficios, utilidad,... (o de mínimos de coste, de disutilidad,...). La objeción fundamental está en que estos extremos existen y son alcanzables únicamente si el individuo o la empresa controla todas las variables de las cuales depende el máximo. Algunas variables pueden ser estadísticamente controlables, como, por ejemplo, el comportamiento de la naturaleza. Si ciertas variables de las que depende el resultado, están bajo el control consciente de otras entidades que desean hacer máximo su beneficio o utilidad y que pueden ser opuestas a un cierto agente económico (individuo, empresa, gobierno,...) o quizá, cooperan con él, entonces tal control completo por el individuo considerado cae en defecto y no se enfrenta a un problema de máximo, sino con una curiosa mixtura de máximos, mínimos,...

El antecedente de estas palabras está en las aún más claras y contundentes de Von Neumann y Morgenstern (1944):

> Este problema de optimización en el contexto de una economía de cambio social no es propiamente un problema de máximo, sino una peculiar y desconcertante mezcla de varios problemas de máximos, mínimos,... Este tipo de problemas no está tratado en la matemática clásica. Subrayemos a riesgo de parecer pedantes, que no es un problema de máximos, ni de cálculo de variaciones, ni análisis funcional,...

El Premio Nobel T. Koopmans introduce en 1951 con rigor la noción de vector eficiente y la utiliza adecuadamente en su monografía Activity Analysis. Kuhn y Tucker (1951) plantean correctamente el problema de máximo vectorial y dan sus famosas condiciones de optimización para soluciones eficientes. El teorema de Kuhn-Tucker exigía condiciones de diferenciabilidad que fueron sustituidas por otras más sencillas tras los trabajos de Slater, Arrow-Barankin-Blackwell, Hurwicz-Uzawa, que ya consideran espacios lineales topológicos.

La otra dirección de trabajo, iniciada por Pareto con la introducción directa de las líneas de isovalor, que corresponden a las clases de equivalencia de la teoría de conjuntos, da nacimiento a los teoremas de Debreu (1954) sobre existencia de la función de valor que luego se continúa con los trabajos de Raiffa, Fishburn, Keeney,..., que construyen las teorías de las funciones de valor multiatributo y las funciones de utilidad multiatributo.

En 1963 Zadeh estudió la cuestión de diseñar resultados óptimos respecto a varios índices con lo que las ideas fundamentales de la teoría MCDM (Multiple Criteria Decision Making) empiezan a influir en la teoría del control, camino que sigue paralelamente la escuela rusa de Salukvadze.

En 1973 tuvo lugar el primer coloquio internacional sobre Decisión con Criterios Múltiples que publican Cochrane y Zeleny, y en él se constituye el grupo internacional de estudio de estos problemas, que se reune cada dos años.

Actualmente la teoría de optimización vectorial constituye una disciplina matemática en espacios vectoriales topológicos con un orden parcial y tiene capítulos importantes relativos a la existencia de óptimos, estabilidad, dualidad, parametrización,... El número de algoritmos ideados para la determinación de puntos eficientes es enorme, pero el concepto de punto maximal o eficiente, que tiene la virtud de la generalidad y objetividad, tiene el inconveniente de no ser suficientemente selectivo para el decisor, al que se le presentará la dificultad de elección subjetiva entre un número enorme de soluciones posibles, ya que como es sabido, el número de puntos eficientes crece exponencialmente con el número de criterios. Esto ha hecho necesaria, aquí también, la introducción de metodologías que tengan en cuenta la información sobre preferencias en certidumbre del decisor: a) información nula; b) información completa en la jerarquía de criterios que termina en una fucnión escalar v; c) información parcial en que la jerarquía termina en una variable vectorial. Los casos a) y c) conducen a optimizaciones vectoriales de las que ya hemos hablado. El tratamiento del caso b) se realiza mediante una axiomática de Debreu que juega, en este caso de complejos de criterios en certidumbre, un papel análogo a la de Von Neumann en el caso de incertidumbre y permite introducir una *función de valor* v que representa las preferencias del decisor sobre las consecuencias z.

$$z \succcurlyeq z' \Leftrightarrow v(z) \geq v(z')$$

con lo que el problema de optimización se reduce a un problema de programación clásico

$$\max_{x \in X} v\,(z(x))$$

Los aspectos prácticos de estos problemas, que van asociados al progreso teórico de las propiedades que permiten simplificar el proceso de asignación de funciones de valor, constituyen ramas de la teoría en continua evolución gracias a trabajos de Keeney, Raiffa,...

Otras muchas metodologías han surgido para evitar parcial o totalmente el empleo de la función de valor: criterio de satisfacción de Simon, jerarquías analíticas de Saaty, mètodos no compensatorios,...

10. Análisis de decisiones en incertidumbre con multiatributos

En muchos problemas importantes de decisión se hace necesario considerar el doble aspecto de ser multicriterios y en incertidumbre. Importantes técnicas ideadas para este doble enfoque, llamadas corrientemente *análisis de decisiones, métodos de ayuda a la decisión, de soporte a la decisión, de sistemas expertos para la decisión,...* se iniciaron con la importante memoria de Raiffa (1968) que, a partir de la axiomática de Von Neumann da los primeros pasos para resolver problemas complejos.

Howard (1964) y su escuela explican sobre una serie de casos prácticos cómo determinar en un sistema de gobierno democrático la función de utilidad social que ha de ser la base de la solución de los problemas de decisión, llegando a resultados numéricos concretos en problemas como contaminación ambiental por los automóviles (en que evidentemente son distintas las preferencias de los individuos que conducen, que no conducen, fabricantes de automóviles,...) o problemas de siembra artificial de nubes, o aceptación del emplazamiento de una central nuclear,... En esa misma línea, aunque por caminos independientes, están también los trabajos del Premio Nobel de Economía Prof. R. Frisch, que en su discurso en la Academia Sueca (1971), llama a la cooperación entre políticos y econometras para que formalicen la *función de preferencia*, que debe considerarse como la base del concepto de política óptima. Dice Frisch

> Tengo la firme convicción de que en una aproximación a la política económica por la vía de la función de preferencia está la clave de una reforma de los métodos de decisión de las sociedades, absolutamente necesarios en el mundo actual.
> En consecuencia, en un país democrático, el Parlamento, suprema autoridad polñítica, deberá emplear la mayor parte de su tiempo y energías en la discusión de esta forma de compromiso y en las consecuencias que tal forma implicaría, en vez de utilizar prácticamente todo su tiempo y esfuerzo en decidir sobre medidas individuales que puedan haber sido propuestas. Este último podrá llamarse método prehistórico.

11. Decisiones polietápicas

Un refrán bien conocido: "más vale pájaro en mano que ciento volando" refleja muy bien el sentido del cambio de valor de un objeto o cantidad monetaria en el paso del tiempo. La idea de *impaciencia* de Böhm-Bawerk (1912) e I. Fisher (1930), han conducido a la de preferencia en el tiempo. Dentro de este orden de ideas resulta especialmente interesante considerar las *decisiones de inversión*, en que al adquirir un bien se espera una sucesión de beneficios en tiempos posteriores. En definitiva, la comparación de inversiones se reduce a la comparación de complejos de n componentes o cantidades que se espera representen los resultados de la inversión en el año cero y sucesivos.

Una axiomática, bien conocida, del Prof. Koopmans (1960), permite reducir cada complejo a un número real, que es su *valor actualizado*, a través de la conocida *tasa de descuento* y con esto se resulven, de manera simplista, este tipo de problemas de inversiones, como si fueran de multicriterios en certidumbre.

Su papel es importante para plantear correctamente los problemas de decisión, dinámicos o secuenciales o de control estocástico, juegos diferenciales, como, por ejemplo, en el problema de regulación de una presa.

En época reciente se ha estudiado la analogía profunda entre la incertidumbre y el factor de tiempo. Por ejemplo, muchas personas prefieren el resultado de una lotería como $\begin{pmatrix} .95 & .05 \\ 1000\,\text{ptas} & 0\,\text{ptas} \end{pmatrix}$ en este momento a 1000 ptas seguras dentro de un año. Mazur realizó en 1987 una serie de experimentos con la alimentación de palomas que prueban que las funciones de descuento por retraso son hiperbólicas, lo mismo que las que expresan los equivalentes en certidumbre probabilísticos, siempre que la probabilidad se haya presentado como tantos en contra de ganancia. Estas relaciones son objetivos de investigaciones recientes para profundizar la similaridad entre selección intertemporal y selección bajo incertidumbre y ver si se pueden extender a otros tipos de selección multiatributo, tanto en animales como en personas.

12. Amalgamación de ordenaciones

La opinión generalizada entre los economistas de la carencia de sentido de la amalgamación de utilidades individuales llevó al Premio Nobel Prof. Arrow a estudiar el problema de la amalgamación de preferencias individuales para obtener una función de preferencia social en su libro famoso de 1951. El punto de partida de estos estudios está en los trabajos sobre las votaciones debidos a Borda, Laplace, Dogson y, sobre todo, en la famosa paradoja de Condorcet (1785) en que se ve cómo falla la transitividad en las decisiones colectivas, tomadas con la democrática regla de la mayoría. Arrow se plantea la cuestión de que criterios mínimos deben satisfacer las preferencias sociales obtenidas a partir de las preferencias de un conjunto de individuos que forman tal sociedad. Dice Arrow:

> Si excluimos la posibilidad de comparaciones interpersonales de la utilidad, los únicos métodos satisfactorios de pasar de las preferencias individuales a las sociales para conjuntos amplios de individuos son las impuestas o dictatoriales.

Este decepcionante resultado de las primeras investigaciones de Arrow, desanimó al principio a muchos investigadores de proseguir el estudio de las decisiones colectivas. Pero pronto las cosas cambiaron y como otros muchos teoremas negativos famosos (como el teorema de Gödel o el de Banach-Tarski) dio lugar a una extensísima serie de trabajos que hoy continúa, ratando de aclarar el alcance de sus condiciones y las consecuencias de las modificaciones de las mismas.

Tales trabajos han logrado primero la rehabilitación de la regla de la mayoría de un modo completamente general para dos opciones y, de un modo muy amplio, para n opciones. Es decir, las conocidas objeciones a la regla de la mayoría por no transitividad (paradoja de Condorcet), etc., desaparecen en tales condiciones similares a muchas situaciones reales: votaciones con dos partidos políticos o con un conjunto de partidos que admitan una cierta ordenabilidad de sus opiniones.

Hemos traído a recuerdo todos estos problemas de gran interés práctico y teórico, porque también en ellos tienen aplicación eficaz los conceptos del análisis de decisiones. Por ejemplo, trabajos muy recientes de d'Alexxandro (1994), relativos al proceso de amalgamación de decisiones multicriterio de un conjunto de p decisores entre m alternativas, cuyos resultados o medidas con n criterios dan lugar a espacios cuyos elementos son matrices $m \times n$ y el nuevo concepto de conjunto eficiente da lugar a resultados que pueden conducir a defensa ciega de intereses personales, riesgo de parálisis de negociaciones, dilución de responsabilidad,... Esto lleva a la necesidad de modificar la estructura del problema de modo que se reconduzca a una fuerte comunidad de espíritu, y una autoridad superior que represente intereses generales.

13. Teoría de juegos

Como es sabido la gran contribución a la teoría de la decisión individual que es la utilidad esperada, fue publicada por primera vez en su forma axiomática en el libro *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), debido a la colaboración de Von Neumann con el economista Morgenstern. Hacía tiempo que éste estaba convendido de que los economistas debían tener en cuenta de modo explícito la realidad de la naturaleza interactiva de las decisiones de los agentes económicos. Y esto es reconocer la importancia de formalizar y estudiar los juegos que se presentan no solo en economía sino en las actividades humanas muy diversas: lúdicas, militares, biológicas, filosóficas,... De hecho, estas preocupaciones entre los matemáticos parece que se iniciaron con un famoso teorema de Zermelo (1913), que demuestra que el ajedrez es un juego con información perfecta en que existe una estrategia "correcta" estrictamente determinada para cada jugador. Estrategias que aún no se han formulado en forma práctica, pero cuya existencia para todo juego n-personal con información perfecta fue demostrada 40 años después por Kuhn (1953).

En 1921, el gran matemático Borel se interesó por las aplicaciones de los juegos bipersonales de suma nula a problemas de economía y política, estableciendo en algunos ejemplos concretos las estrategias mixtas óptimas llamadas *minimax* para cada jugador, pero sin llegar al *teorema del minimax*, de cuya validez general parece que dudó y ni siquiera conjeturó. De hecho tal teorema no aparece hasta la memoria de Von Neumann de 1928, que, con esta contribución, formula un modelo válido de la idea de "acción racional" y establece las bases matemáticas de la teoría de juegos bipersonales de suma nula. A partir de aquí, la influencia del minimax en el desarrollo científico y en situaciones reales es tan importante que hace verosímil la curiosa anécdota según la cual cuando se preguntaba a un estudioso del ámbito estelar del Princeton de los años 50 (Einstein, Gödel, Von Neumann,...) cuál era el mejor cerebro matemático del mundo, respondía que Einstein era el mejor matemático del mundo, pero Von Neumann había logrado un puesto a medio camino entre los hombres y Dios.

Durante muchos años este foco de atracción del teorema del minimax continúa vigente influyendo decisivamente en el desarrollo de la teoría, siendo sin duda la contribución más notable la generalización que en 1951 introduce Nash (que 42 años después será Premio Nobel de Economía) con los *juegos n-personales no cooperativos* (de suma nula o no nula) para los que introduce el concepto fundamental de equilibrio estratégico, cuya existencia demuestra Nash logrando una importante generalización del teorema del minimax. El estudio de los juegos cooperativos es realizado fundamentalmente por Nash y Harsany (también Premio Nobel en 1993) en parte sobre el llamado *programa de Nash* (1951), de reducción a juegos no cooperativos. El desarrollo continúa con fuerza en los años posteriores a los cincuenta, en que se estudian los juegos estocásticos, juegos bayesianos, juegos reiterados con información completa, juegos continuos, juegos diferenciales, juegos con pagos vectoriales, juegos con autómatas,...

14. Teoría de juegos y biología evolutiva

Las ideas originales de John Maynard Smith (1982), que vienen a incidir en el nuevo concepto de estrategia evolutiva estable y la idea de equilibrio estratégico de la teoría de juegos, fueron el estímulo para la organización del Coloquio de Bielefeld en 1985, por el Premio Nobel Prof. Selten. Entre las importantes discusiones de biólogos, economistas y teóricos de juegos, sobre los variados temas del Coloquio, recordemos como ejemplo típico la comunicación de Regelman y Curio titulada *Tit for Tat in the Great Tit*, que estudia experimentalmente la estrategia Tit for Tat, que utiliza el pájaro llamado gran Tit para proteger a su prole de los predadores, y que es la misma del famoso dilema de los presos (Axelrod, 1984). No deja de ser interesante observar que muchos animales, y aún plantas, se ajustan en sus comportamientos mucho más a la l ey de maximización la utilidad esperada que los humanos. Por ejemplo, en ratas se ha observado una mejor predicción que en los seres humanos de los resultados (premiados cuando hay acierto) de una sucesión de sorteos con dos resultados posibles L, R de probabilidades 3/4, 1/4. Tras estas interesantes indicaciones de que la ley M.U.S.E. tiene un carácter de universalidad como característica del comportamiento de los seres vivos, pasemos a los aspectos teóricos.

Se puede decir que una nueva "teoría evolutiva de juegos" está surgiendo a partir de los ochenta, estimulada por problemas biológicos que dan lugar a modelos secuenciales de confliectos competitivos y cooperativos en ambiente aleatorio, en la que se apoyan otras nuevas disciplinas como las teorías de la información y la comunicación, la mejora de las soluciones secuenciales de aprendizaje,... Tras su éxito en Biología y Genética esta teoría ha encontrado importantes aplicaciones en conflictos de la economía, medio ambiente, culturales, éticos, políticos,... Dentro de esta teoría general de la evolución, la "adaptación Darwiniana" se sustituye por sucesiones de soluciones óptimas que conducen a formas sociales relativamente estables. Así, la selección vuelve a ser influenciada por sucesos aleatorios y la memoria individual y colectiva y la transmisión de soluciones de conflictos precedentes, conectan el pasado con el presente y permiten el aprendizaje intergeneracional. En ellos juega un papel importante la actitud frente al riesgo a través de la regulación de la utilidad esperada que valen, no sólo para humanos, sino también para poblaciones animales.

15. Conceptos estructurales y cuantitativos

Podemos decir que la teoría de juegos atrae fuertemente el interés de matemáticos, estadísticos, economistas, psicólogos,..., en sus comienzos en los años 40 y 50, languidece después de algún tiempo, para recuperar en las dos últimas décadas todo su vigor con la aparición de profundos e importantes resultados. Pero en las posibilidades de aplicación de sus resultados surgen dificultades, sobre todo porque la mayor parte de los conceptos tienen carácter cuantitativo: Utilidad esperada, funciones de pago, medidas sobre creencias probabilísticas,...

Para hacer más viables y efectivas las aplicaciones de la teoría de juegos, se ha pensado recientemente (Allard, Smith, Raiffa) en construir una teoría cualitativa o estructural, que permitiera lograr resultados profundos para llegar a consecuencias realmente prácticas. Las ideas directrices parten del importante concepto de "conocimiento común", introducido por Aumann, según el cual "cada jugador conoce lo que sus oponentes conocen y, a su vez, éstos conocen lo que el primero conoce que ellos conocen,..."

A partir de esta idea se admiten las siguientes hipótesis de trabajo:

1. El grafo del diagrama de influencia del juego es el mismo para todos los jugadores, salvo que una variable de decisión de un jugador sería una variable incierta para los oponentes.
2. Las deducciones hechas por los distintos jugadores mediante reglas de irrelevancia son conocimiento común para todos los jugadores.
3. También es conocimiento común suponer que un jugador prefiere la decisión d_1 a la d_2, si d_1 no es una función invertible de d_2 que da idéntica estructura de pago a d_2.

Este planteamiento no requiere que todos los jugadores sigan el mismo método inferencial, bayesiano o no. Basta que sus creencias sean consistentes con el diagrama de influencia establecido para el problema, supuesto que tal diagrama sea realmente común.

Prosiguiendo estos métodos se está consiguiendo una teoría cualitativa plausible, fácilmente implantable y suficientemente penetrante para hacer deducciones interesantes y profundas en situaciones prácticas. En todo caso, este planteamiento y sus resultados se consideran de gran interés filosófico, matemático y práctico. Esta tendencia actual a relacionar más estrechamente la teoría de juegos con el análisis de decisiones marcha paralela al desarrollo reciente de la llamada teoría y práctica de las negociaciones dentro del programa de Raiffa (1982) y los trabajos de Neale-Bazerman (1991), Sebenius (1992),..., a la que vamos a referirnos brevemente.

16. Negociaciones

Los enfoques científicos de los problemas de negociación y mediación van precedidos de una larga tradición en las ciencias político-sociales, como se observa en la lectura del famoso libro *El Príncipe* (1515) de Maquiavelo. Tradicionalmente el campo natural de estudio de los procesos de negociación y mediación ha correspondido a los sociólogos, psicólogos, diplomáticos, politólogos, pensadores de la política y de la historia. La importancia de estos estudios se ha visto reforzada en situaciones críticas recientes en que del resultado de negociaciones sobre el desarrollo de armas nucleares ha dependido fuertemente, incluso, el futuro de la humanidad. Ello ha conducido a la formación de importantes equipos multidisciplinarios de especialistas, como en el proyecto de la Universidad de Harvard o los de la Arms Control and Disarmament Agency de Washington.

Negociación es un tipo de proceso de decisión, en que toman parte dos o más agentes activos, que no pueden tomar decisiones independientemente, sino que deben hacer concesiones sucesivas para llegar a un compromiso. La metodología del proceso de negociación implica una sucesión de etapas con objetivos limitados, en que cada uno de los agentes toma una decisión que le aproxima a alguno de sus objetivos. Tal decisión es presentada posteriormente al oponente que, a su vez, la transforma en una nueva propuesta, etc.

Al tratar de establecer un método analítico para resolver estos problemas, sea entre dos partes monolíticas o entre varios colectivos, se suele partir de la consideración de cuatro elementos básicos: a) intereses de las partes, b) alternativas para llegar a un convenio, c) creación y proclamación de valores, y d) movimientos para cambiar el desarrollo del juego.

Muchas nociones y recursos de la teoría de juegos cooperativos y teoría del aprendizaje se han adaptado a estas formulaciones; pero la contribución actual más importante es la de los árboles y diagramas de decisión, sistemas de soporte a la decisión, sistemas expertos,..., que han puesto de manifiesto en problemas prácticos importantes como las negociaciones de la ley del mar, o las de la mina "El Teniente" de Chile,... y miles de ejemplos más en que se va demostrando el interés del progreso en esta nueva "ingeniería de las negociaciones", en que es frecuente que intervengan como adversarios representantes de países o comarcas de diferentes culturas.

17. Cultura y decisión

Justamente este tipo de decisiones interactivas ha despertado el interés por la realización de estudios en relación con el comportamiento en las decisiones de individuos o grupos sociales pertenecientes a distintas culturas, no sólo a nivel nacional, sino más ampliamente a nivel de grupos clasificados por etnia, edad, sexo, religión,...

El comportamiento individual y el de grupo están fuertemente influenciados por la cultura, que sabemos es un conjunto de características de los individuos que se refieren, fundamentalmente, a sus creencias y valores básicos, su concepto de verdad, su lóica y comportamiento de decisión. En especial, las creencias relativas al azar, riesgo, incertidumbre, aleatoriedad, presentan grandes diferencias de unas culturas a otras, como han observado Georgescu-Roegen y otros.

El concepto de aleatoriedad que tan sofisticado aparece en nuestra época, en las culturas occidentales, llegando a la diferenciación con la noción de caos, dista mucho de la idea causal del "deseo de Allah", tan arraigada en la cultura islámica, los espíritus activos en algunas culturas africanas,... La componente lógica de una cultura se refiere al modo en que los individuos establecen la causación, que va de simple asociación de sucesos, a la evidencia de conexiones causales. Los valores son órdenes de preferencia sobre estados de parcelas del universo, que ya hemos visto que juegan un papel importante en las consecuencias de las decisiones. El estudio profundo de estas relaciones de ajuste entre componentes de una cultura y sistemas de organización y decisión, ha conducido a resultados interesantes en relación a las previsiones sobre comportamientos posibles de adversarios de diferentes culturas y, en consecuencia, a obtener mejores resultados en un problema de negociación de un tratado comercial, de un convenio internacional de pesca,...

18. Conclusión

El Premio Nobel Prof. Simon, en un artículo reciente escrito conjuntamente con Dantzig, Raiffa,..., ha dicho que

> El desarrollo de la teoría de la utilidad subjetiva esperada es una de las grandes conquistas intelectuales del siglo XX, que nos da por primera vez un principio formalmente axiomatizado, que permite a un individuo comportarse de una manera consistente y racional.
> Admitiendo probabilidades asignadas subjetivamente, la teoría de la utilidad esperada subjetiva abre el camino para fusionar opiniones subjetivas con datos objetivos, un enfoque que puede ser utilizado también en sistemas decisionales con hombres y máquinas. En la versión probabilística de la teoría, la regla de Bayes prescribe cómo los individuos deberían tener en cuenta la nueva información y cómo deberían responder a la información incompleta.

Se ve, pues, que Simon, uno de los más agudos críticos de la teoría de la utilidad esperada durante 40 años, acepta su enorme importancia para la obtención práctica de las decisiones en incertidumbre en universos bien definidos y de limitada complejidad. Pero también considera que hay situaciones reales de decisión a las que no todos los axiomas de la teoría de la utilidad subjetiva esperada se ajustan de una manera empíricamente aceptable. Propone entonces las teorías que llama de *racionalidad limitada,* que cambian algunas de las hipótesis de la teoría racional clásica. Por ejemplo, en vez de suponer bien definido un conjunto fijado de alternativas, entre las que el decisor ha de elegir, admite un proceso para la génesis de alternativas posibles. En vez de suponer distribuciones de probabilidad conocidas de los resultados, introduce solamente métodos de estimación para las mismas, o bien, considera estrategias que permitan tratar la incertidumbre sin suponer conocidas las probabilidades. En vez de maximizar la esperanza de utilidad busca una estrategia satisfaciente, asociadas a unqas metas fijadas por el decisor. Estos cambios son sugeridos, según Simon, por el conocimiento empírico del comportamiento humano en los procesos de decisión y de las limitaciones de nuestra capacidad cognitiva para descubrir alternativas, calcular sus consecuencias, y hacer comparaciones entre las mismas.

No se trata aquí de hacer una comparación de las ideas directrices de esta y otras teorías, llamadas de racionalidad limitada, que ruedan hace más de 40 años y pretenden inspirarse más en el estudio sistemático y detallado del desarrollo del proceso humano de toma de decisiones, que en el planteamiento de la situación predictiva de elección en la forma que lo hace la teoría de la utilidad esperada.

Trabajos recientes (T.K. Lant, 1994) han iniciado la comparación experimental de estos dos grandes tipos de modelos, apareciendo una tendencia a considerarlos compatibles y, en cierto modo, complementarios.

Tras estas discusiones sobre la hipótesis de la utilidad esperada, puede decirse que quizá su mayor mérito sea funcionar hasta que de acuerdo con las ideas de Popper y Lakatos sobre la evolución histórica de las teorías científicas surja de ella misma un nuevo y deslumbrante paradigma.

CRONOLOGíA DE CONTRIBUCIONES AL DESARROLLO
DE LA TEORIA DE LA DECISIÓN

	D. criterios múltiples		D. incertidumbre		D. colectivas e interactivas	
2000						
1975						
	1973	Col. South Carolina				
	1970	Fishburn				
	1968	Raiffa	1968	Raiffa		
					1959	Harsany
					1958	Black
	1954	Debreu	1954	Savage		
	1951	Kuhn-Tucker			1951	Arrow
	1951	Koopmans			1951	Nash
1950						
			1944	V. Neumann		
			1939	Wald		
			1937	de Finetti		
			1931	Ramsey		
	1924	Borel				
	1911	Jevons				
	1911	Haussdorf				
	1906	Pareto				
1900						
	1895	Cantor				
	1881	Edgeworth				
	1874	Walras				
	1871	Menger				
1850						
			1821	Gauss		
					1812	Laplace
1800						
					1785	Condorcet
					1783	Dogdson
					1781	Borda
	1776	A. Smith				
			1774	Laplace		
	1772	B. Franklin				
			1763	Bayes		
1750						
			1738	D. Bernoulli		
			1662	Pascal		
			1657	Huygens		
			1605	Cervantes		

Agradecimiento. El trabajo de S. Ríos-Insúa se financió parcialmente con el proyecto TIC95-0028 de CICYT.

Referencias

[1] ARROW, K.J. (1958), "Bernoulli Utility Indicators for Distributions over Arbitrary Spaces", *Dept. of Economics, Tech. Rep.* 57.

[2] ARROW, K.J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, Yale Univ. Press.

[3] AXELROD, R. (1984), *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York.

[4] BAYES, T. (1763), "An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance", with Richard Price's foreword and discussion, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 370-418.

[5] BERNOULLI, J. (1713), *Ars Conjectandi*, Impensis Thurnisiorum: Fratrun, Basilea.

[6] BERNOULLI, D. (1738), "Specimen theoriae Novae de Mensura Sortis", *Comentarii Academiae Scientiae Imp. Petropolitanae*, **V**, 175-192.

[7] BOREL, E. (1924), "A Propos d'un Traité de Probabilité", *Revue Philosophique* **98**, 321-326.

[8] CANTOR, G. (1895), "Beiträge zur Mengenlehre", *Mathematische Annalen.*

[9] CERVANTES, M. (1906), *El Ingeniosoo Hidalgo D. Quijote de la Mancha.*

[10] COCHRANE, J.L. y M. ZELENY (eds) (1973), *Multiple Criteria Decision Making*, University of South Carolina Press, Columbia.

[11] CONDORCET, M.J.A.C. (1785), *Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilité des Décisions Rendues a la Pluralité des Voix*, Paris.

[12] DEBREU, G. (1954), "Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function", en *Decision Processes*, R.M. Thrall, C.H. Coombs y R.L. Davies (eds), Wiley, New York.

[13] DEBREU, G. (1959), *Theory of Value*, Wiley, New York.

[14] DE FINETTI, B. (1931), *Probabilismo, Saggio Critico sulla Teoria delle Probabilitá e sul Valore della Scienza*, F.Perella, Napoles.

[15] DE FINETTI, B. (1937), "La Prevission, ses Lois Logiques, ses Sources Subjetives, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **7**, 1-68.

[16] DE FINETTI, B. (1952), "Sulla Preferibilitá", *Giornale degle Economisti e Annali di Economia*, **11**, 685-709.

[17] EDGEWORTH, F.Y. (1881), *Mathematical Physics*, P. Keagan.

[18] FISHBURN, P.C. (1976), *Utility Theory for Decision Making*, Wiley, New York.

[19] FISHBURN, P.C. (1982), *The Foundations of Expected Utility*, Reidel Dordrecht, The Netherlands.

[20] FRISCH, R. (1971), "Cooperation Between Politicians and Econometricians on the Formalization of Political Preference, *Reunión de Premios Nobel en Lindau.*

[21] HACKING, I. (1991), *The Emergence of Probability*, Cambridge University Press.

[22] HAUSSDORF, F. (1906), *Untersuchungen über Ordnungstypen*, Leipzig.

[23] HOWARD, R. (1964), *The principles and Applications of Decision Analysis*, Strategic Decision Group, Menlo Park, California.

[24] HUYGENS, C.H. (1657), *Ratiociniis in Ludo Aleae*, Âmsterdam.

[25] JEVONS (1911), *Theory of Political Economy*, MacMillan, London.

[26] KEENEY, R. y H. RAIFFA (1976), *Multiobjetive Decision Making*, Wiley, New York.

[27] KOOPMANS, T.C.(1951), "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph No. 13, Wiley, New York.

[28] KUHN, H.W. y A.W. TUCKER (1951), "Nonlinear Programming", en *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, J. Neyman (ed.), Berkeley, California.

[29] LAPLACE, P.S. (1812), *Théorie Analytique des Probabilités*, Courcier, Paris.

[30] LINDLEY, D.V. (1987), "The Probability Approach to the Treatment of Uncertainty in Artificial Intelligence and Expert Systems", *Statistical Science*, **2**, 17-24.

[31] MAYNARD-SMITH, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press.

[32] MENGER, K. (1871), *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre*, Braumüller, Wien.

[33] PARETO, V. (1906), *Manuale di Economia Politica*, Societa Editrice Libraria, Milano.

[34] PASCAL, B. (1963), *Oeuvrées Completes*, Lafuma, Paris.

[35] RAIFFA, H. (1968), *Decision Analysis*, Addison Wesley, Reading Mass.

[36] RAIFFA, H. (1982), *The Art & Science of Negotation*, Harverd U.P., Cambridge, Mass.

[37] RAMSEY, F.P. (1931), "Truth and Probability", en *The Foundations of Mathematics and Other Essays*, F.P. Ramsey (ed.), Harcourt, Brace and Co, New York. Reprinted in *Studies in Subjetive Probability*, 2nd Ed., 1980, H. Kyburg and Smokler (eds.).

[38] RÍOS, S. (1967), *Procesos Dinámicos de Decisión*, Memorias de la Academia de Ciencias, Madrid.

[39] RÍOS, S. (1977), *Métodos Estadísticos*, Eds. Del Castillo, Madrid.

[40] RÍOS, S. (1995), *Modelización*, Alianza Editorial, Madrid.

[41] RÍOS, S. (1989), "La Teoría de la Decisión", en *Historia de la Ciencia Estadística*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 163-184.

[42] RÍOS, S. (1995), "Hacia el Siglo XXI: Las Decisiones", *Discurso de Ingreso como Académico de Honor*, Real Academia Sevillana de Ciencias, Sevilla.

[43] RÍOS, S., M.J. RÍOS INSÚA y S. RÍOS-INSÚA (1989), *Procesos de Decisión Multicriterio*, EUDEMA, Madrid.

[44] SAVAGE, L.J. (1954), *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York.

[45] SAVAGE, L.J. (1972), *The Foundations of Statistical Inference*, Methuen, London.

[46] STIGLER, G.J. (1968), "The Development of Utility Theory", en *Utility Theory: A Book of Readings*, A.N. Page (ed.), Wiley, New York, 55-118.

[47] VON NEUMANN, J. y O. MORGENSTERN (1944), *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton.

[48] WALRAS (1874-77), *Elements D'economic Politique Pure*, L. Corbaz and Companie, Lausanne.

[49] WALD, A. (1939), "Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses", *Ann. Math. Stat.*, **10**.

[50] WALD, A. *(1945), "Statistical Decision Functions wich Minimize the Maximum Risk", Ann. Math.* **46**.

[51] WALD, A. (1947), *Sequential Analysis*, Wiley, New York.

[52] WALD, A. (1950), *Statistical Decision Functions*, Wiley, New York.