Cantor y la teoría de conjuntos

BALTASAR RODRÍGUEZ SALINAS*

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació el 3 de marzo (19 de febrero según el calendario antiguo) de 1845 en San Petersburgo. El padre de Cantor, Georg Waldemar Cantor, que había crecido en Copenhague, había abierto de joven una oficina de corredor de comercio en San Petersburgo, que le proporcionó una considerable fortuna. Pero no sólo era un comerciante afortunado, sino también un hombre de vasta cultura. Su madre Marie Böhm procedía de una familia muy inclinada hacia las Artes y las Ciencias. Sus parientes fueron unos renombrados virtuosos del violín; Cantor se confesaba "bastante inclinado a lo artístico" lamentándose a veces que su padre no le permitiera ser violinista.

Su padre era protestante, igual que Cantor, y su madre católica. El vínculo con el catolicismo pudo desarrollarse en la investigación de las ideas filosóficas de los pensadores católicos.

En San Petersburgo Cantor asistió a la escuela elemental. En el año 1856 la familia se trasladó a Frankfurt am Main debido a una enfermedad del padre.

Cantor tuvo el precoz deseo de estudiar Matemáticas. Pero su padre le orientó para que siguiera una carrera más provechosa, la de ingeniero. Asistió al Gymnasium in Wiesbaden y más tarde entre 1860 y 1862 a la Escuela Profesional Superior de Darmstadt, cursó allí la Sección General y superó el examen de Bachillerato que le daba acceso a los estudios de Ciencias Físicas y Naturales. Sus calificaciones eran buenas, y en Matemáticas obtuvo una calificación excelente. Por este motivo Cantor manifestó de nuevo su deseo de estudiar Matemáticas. Tras largas vacilaciones su padre le autorizó a matricularse en Zurich como estudiante en 1862.

Cuando poco después el padre murió repentinamente, Cantor se fue en 1863 a la Universidad de Berlín, pues ella tenía fama en los estudios de Matemáticas. En ese tiempo Karl Weierstrass, famoso como profesor e investigador, atría a muchos estudiantes con talento a la Universidad de Berlín. Sus lecciones daban al Análisis una firme y precisa fundamentación, de modo que muchos de sus discípulos se proclamaban con orgullo miembros de la "Escuela de Berlín" y desarrollaron las ideas de su maestro.

El propio Cantor muestra la influencia de Weierstrass con sus primeros trabajos sobre series y números reales, aunque también estudió con

---

* Académico Numerario.

Kummer y Kronecker. Su tesis, *De aequationibus secundi gradus indeterminatis* , trató de un problema de Teoría de Números y fue presentada en el Departamento de Kummer. En aquellos tiempos todavía existía la costumbre de que un candidato al doctorado defendiese su tesis frente a algunos de sus compañeros estudiantes. De especial mención es la tercera tesis de Cantor para la obtención de su grado de Doctor en 1867: *In re mathematica ars proponendi pluris facienda est quam solvendi.* Su conclusión, "en las Matemáticas, el arte de plantear los problemas es más importante que su resolución", iba a ser decisiva para toda su posterior investigación. Y de hecho sus posteriores logros no siempre consistieron en resolver problemas. Su principal contribución a las Matemáticas fue su modo de plantear cuestiones abiertas en vastas áreas del conocimiento. Estos problemas fueron resueltos por él y en parte por sus discípulos.

Cantor no vivió encerrado en su estrecha parcela de ciencia, así tuvo muchos amigos íntimos como H.A. Schwarz alrededor de 1880, especialmente por la índole de sus trabajos y aficiones. Durante estos años de Berlín nació esa especial amistad entre él y Schwarz, que fue su tutor durante dos años. Los dos reverenciaban a Weierstrass y los dos intentaban que Kronecker tuviese una buena opinión de los alumnos de Weierstrass, pues Kronecker los criticaba continuamente en sus conclusiones.

Estos primeros años de investigación de Cantor fueron los más felices de su vida. Sus cartas durante este periodo expresan su entusiasmo, que raramente se aprecia en los años posteriores, en los que intentaba ganar la aceptación de la Teoría de Conjuntos. En el año 1868 superó el examen oficial para profesor de Enseñanza Media y, como candidato de prueba, impartió clases en el último curso de un Instituto de Berlín. Sin embargo, desde un principio estaba decidido a seguir la carrera universitaria, aunque esto implicase sacrificios económicos. No obstante, gracias a la herencia de su padre, estas dificultades se suavizaron y pudo elegir este camino sin vacilar. En 1869 fue aceptado para ser profesor en la Universidad de Halle, donde fue pronto profesor y en 1869 obtuvo el grado de Full Professor con el apoyo de H.A. Schwarz. Allí siguió su trabajo hasta su muerte.

Su matrimonio en 1874 con Vally Gutmann nació de un gran afecto, y la personalidad alegre e inclinada a lo artístico de "Frau Vally", amiga de su hermana, dio un aire más alegre al melancólico carácter del gran estudioso. Tuvieron cinco o seis hijos y la herencia del padre hizo posible a Cantor el construir una casa familiar, En aquellos días el profesor de Halle estaba tan mal pagado que sin otro ingreso hubiesen pasado estrecheces. Cantor esperaba conseguir una plaza de profesor en Berlín de más prestigio y mejor pagada, pero en Berlín estaba el casi omnipotente Kronecker que le bloqueó el camino. El estaba en desacuerdo con las opiniones de Cantor sobre números transfinitos y frustaba todos los intentos de Cantor para mejorar su situación académica volviendo a la capital.

Debido a sus resultados en la investigación y a sus éxitos docentes pronto le fueron conferidos los primeros honores. Así fue elegido miembro de la Sociedad para el estudio de la Naturaleza de Halle, y en 1873 miembro correspondiente de la Sociedad de las Ciencias de Gotinga. Finalmente, como hemos dicho, fue ascendido, en un intervalo de tiempo relativamente breve a Full Professor de la Universidad de Halle. Uno de sus colegas científicos, E. Heine, sugirió a Cantor en los comienzos de su actividad en Halle que se dedicase a la teoría de series trigonométricas. Muy pronto obtuvo algunos resultados fundamentales en este área. Además, sus investigaciones le llevaron al estudio de las propiedades de ciertos conjuntos de puntos. Con la generalización de los teoremas obtenidos consiguió los primeros resultados de la Teoría de Conjuntos. Estos resultados y los problemas que de ellos surgieron se convirtieron desde entonces en el campo principal de las investigaciones de Cantor.

Con intensísimo trabajo logró plantear y resolver muchas cuestiones que superaron concepciones que eran consideradas en Matemáticas como definitivas. Su primer trabajo sobre Teoría de Conjuntos se publicó en 1874. La acogida de sus descubrimientos en el ambiente matemático fue muy diversa, solamente muy pocos advirtieron la importancia de los resultados obtenidos. Así, su trabajo *Una contribución a la teoría de las variedades* sólo pudo ser publicado en 1878 mediante la intervención de Weierstrass. Otro trabajo no le fue publicado, colocándosele la acotación *llega con cien años de anticipación.* Pero finalmente Cantor encontró en Mathematische Annalen una revista que aceptaba y publicaba sus trabajos de manera sucesiva. El eco así alcanzado continuaba siendo escaso. Esto se debía a que para muchos las ideas de Cantor eran absolutamente nuevas e insólitas. Además, su teoría había encontrado adversarios.

Su maestro, Weierstrass, en seguida advirtió la fecundidad de las ideas de su discípulo y ya en 1874 utilizó algunas de las consideraciones de Cantor en la demostración de teoremas sobre funciones reales. Sin embargo, más tarde, su actitud hacia Cantor empezó a cambiar, aun cuando al final se pronunciase ardientemente en favor de la Teoría de Conjuntos de Cantor.

En los años de intensas investigaciones, la colaboración de Cantor fue especialmente estrecha con R. Dedekind, cuyos trabajos estaban íntimamente relacionados con los de él. En su frecuente correspondencia ambos intercambiaban los resultados de sus reflexiones. Así, Dedekind influyó grandemente sobre las ideas y argumentos de Cantor. De esta forma ambos consiguieron idear sendos métodos rigurosos para la construcción de los números reales.

Sin embargo, como hemos señalado, Cantor encontró en Kronecker un enconado adversario. Este aunque en las publicaciones científicas no se oponía expresamente a Cantor, ni tampoco citaba los teoremas y conceptos esenciales de Cantor que él consideraba erróneos e inadmisibles, en cambio, en presencia de otros matemáticos atacaba violentamente a Cantor con observaciones críticas, y en sus clases hacía comentarios desfavorables sobre la Teoría de Conjuntos. Kronecker incluso llegó al extremo de calificar a Cantor de *corruptor de la juventud.* Con esta actitud injusta

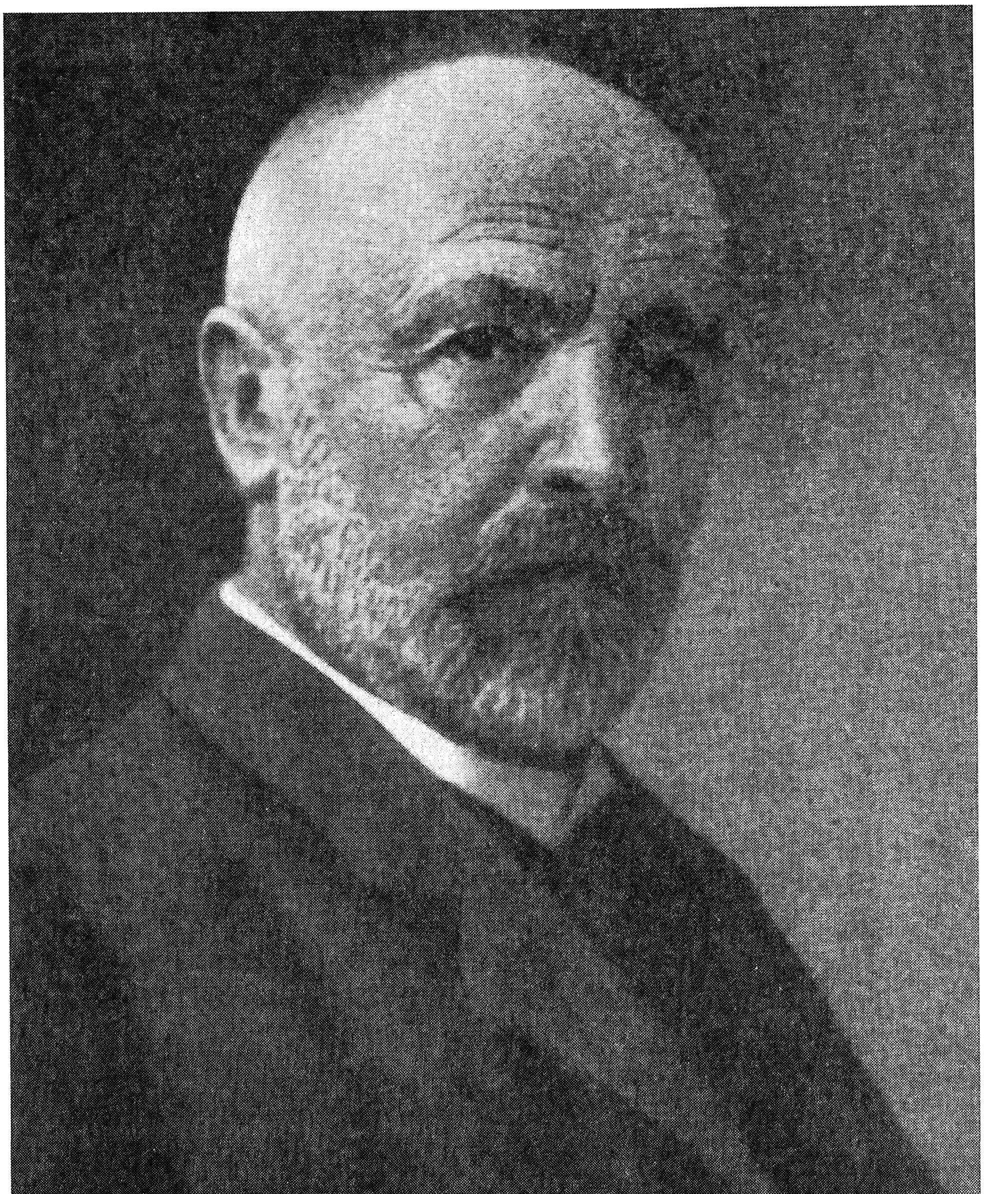
Kronecker influyó sobre algunos matemáticos en contra de las nuevas e insólitas ideas de la Teoría de Conjuntos.

Durante la elaboración de su teoría, Cantor se encontró con el llamado *problema del continuo*, cuya solución creyó vislumbrar pero cuya demostración no pudo conseguir pese a sus enormes esfuerzos, Afectado por la acumulación de dificultades personales y profesionales, agotado por la intensa y sutil investigación de tantos años, en 1884 Cantor sufrió un profundo quebranto psíquico. Las causas últimas de esta enfermedad pudieran ser debidas a la propensión intelectual de Cantor, aunque seguramente los factores externos contribuyeron a que se declarase la enfermedad. Una vez restablecido se propuso ante todo abandonar totalmente la investigación matemática y dedicarse a cuestiones filosóficas. Así se ocupó, con el ardor que él ponía en todo, de estudios literarios sobre la personalidad de W. Shakespeare. Pero con crecientes interrupciones depresivas continuó tanto sus cursos de Matemáticas como sus investigaciones. En realidad, su enfermedad ya nunca le abandonaría, siempre aparecía intermitentemente.

A finales de la década 1880-90 las ideas matemáticas de Cantor comenzaron a imponerse en el mundo científico. El sueco G. Mittag-Leffler, amigo desde hacía tiempo de Cantor, aplicó teoremas de la Teoría de conjuntos a la demostración de teoremas de la Teoría de Funciones, poniendo así de manifiesto la utilidad de los conceptos de Cantor. Pero todavía hizo más. En la revista Acta Mathematica, que editaba, publicó trabajos originales de Cantor y traducciones al francés de anteriores trabajos de Cantor. Sin embargo, tampoco él podía seguir todos los razonamientos de éste. A través de estas publicaciones muchos matemáticos extranjeros fijaron su atención en los trabajos de Cantor.Especialmente, fueron los primeros los matemáticos franceses e ingleses quienes cada vez más reconocieron la importancia de la Teoría de Conjuntos, la difundieron y la aplicaron a los diversos campos.

Ya durante sus estudios en Berlín Cantor había aprendido a valorar la fecundidad del intercambio de ideas científicas. Allí fue miembro de la Sociedad Matemática (y de 1864 a 1865 presidente). Así, pues, cuánto no debió de lamentar la falta de tales coloquios científicos en Halle, donde sólo había unos pocos colegas de su especialidad. Con los que estaban próximos a sus ideas sólo podía comunicarse por carta. Por este motivo resulta natural que Cantor fuese partidario de intensificar la colaboración entre los matemáticos mediante la creación de una organización apropiada. Desde hacía tiempo existía entre los matemáticos alemanes el deseo de asociarse, pero los primeros intentos no habían dado ningún resultado.

Cantor continuó con su proyecto con la tenacidad que le caracterizaba. Durante 1980-90 abogó infatigablemente por escrito y verbalmente en favor de la realización de sus propósitos. En gran medida hay que agradecerle que, en el *Congreso de los científicos de la naturaleza y médicos alemanes* celebrado en Bremen en 1890, se fundase la *Asociación de Matemáticos Alemanes*. El objetivo de esta Sociedad era fomentar y desarrollar la Matemática, elevar la posición del matemático en el seno de



Georg Cantor

la vida intelectual de Alemania y ofrecer a los matemáticos la oportunidad de conocerse e intensificar sus ideas, experiencias y predilecciones. Cantor fue elegido Presidente de esta Sociedad, pero al cabo de cierto tiempo se vio obligado a dimitir a causa de su enfermedad.

Además de esto Cantor también intentó formar una sociedad de matemáticos internacional. Aunque esto no se consiguió, hay que contar a Cantor entre los iniciadores de los Congresos Internacionales de Matemáticos, el primero de los cuales tuvo lugar en Zurich en 1897. En este congreso A. Hurwitz pronunció una conferencia en la que expuso cómo la Teoría de Conjuntos podía conducir a un nuevo desarrollo de la Teoría de Funciones. En los congresos posteriores la Teoría de Conjuntos ocupó también un lugar preferente. De este modo dichos congresos contribuyeron a que se reconociese y se considerase más la gran importancia de la Teoría de Conjuntos para muchas ramas de las Matemáticas. Sociedades científicas inglesas, rusas e italianas eligieron a Cantor miembro honorario. También fue nombrado Doctor Honoris Causa por las Universidades de Cristianía (Noruega, 1902) y St. Andrews (Escocia, 1911). Alentado por tales acontecimientos, Cantor volvió a publicar trabajos de Matemáticas, si bien éstos trataban principalmente de la exposición y defensa de los resultados obtenidos anteriormente. De este modo fueron apareciendo entre 1895 y 1897 sus *Contribuciones a la Teoría de Conjuntos* que de manera sistemática presentaban los resultados de su teoría general. Al proseguir sus investigaciones se encontró en la construcción de conjuntos con ciertas antinomias. Y aunque logró reconocerlas y también describirlas, no pudo en cambio evitarlas. Tal vez sea ésta una de las razones por lo que a partir de 1897 ya no publicase ningún trabajo, aunque se ocupaba de diversas cuestiones de matemáticas y pensaba en ambiciosas publicaciones. Indudablemente otra causa residía en sus enfermedades nerviosas que siempre volvían a declararse y que paralizaban su actividad investigadora y también le impedían de manera creciente cumplir con sus deberes docentes. Ya en 1902 presentó una solicitud de jubilación, que fue desestimada. Pero durante los años siguientes tuvo a menudo que suspender sus clases por enfermedad, por lo que en 1913 quedó definitivamente dispensado de tales obligaciones. Con motivo de su 70 aniversario se había organizado en 1915 una magna celebración internacional, pero se frustró debido a la I Guerra Mundial. Pese a todo, muchos matemáticos alemanes se reunieron ese día en Halle para honrar a Cantor. Manifestación de este respeto fue la donación de un busto de Cantor en mármol, que hoy día se encuentra en el edificio principal de la Universidad de Halle. De este modo Cantor, al final de su vida, supo que su obra había sido considerada y reconocida también en Alemania.

En lo sucesivo su salud fue empeorando cada vez más. Así Cantor falleció el 6 de enero de 1918 en la Clínica Psiquiátrica de la Universidad de Halle y fue inhumado en dicha ciudad.

Cantor era de buena estatura y su aspecto producía impresión. Poseía una vasta cultura, especialmente en Filosofía. Tanto en las conversaciones como en su correspondencia manifestaba sus ideas en forma original y vehemente, que le llevaban a arrebatos coléricos. Aparte de su formidable imaginación creadora era particularmente característico de él la seguridad que tenía en sus ideas que él intuía y que sostenía frente a toda oposición. Desde un principio fue consciente de la gran trascendencia de la Teoría de Conjuntos por él creada. Pero su gran convencimiento de la veracidad e importancia de sus ideas no lo volvieron arrogante ni vanidoso.

En sus más de treinta años como profesor en la Universidad de Halle explicó muchas asignaturas de Matemáticas. Sin embargo sobre sus investigaciones en Teoría de Conjuntos sólo muy raramente explicaba alguna cosa en el Seminario Matemático. Aunque tenía muy pocos alumnos -debido al reducido número de estudiantes de Matemáticas en la Universidad de Halle- en cambio, en el transcurso de los años, formó a un considerable número de ellos, en su mayoría candidatos a cargos docentes. Apenas tuvo auténticos discípulos. Esto podría tener alguna relación con el hecho de que los problemas que le preocupaban le cautivaban hasta tal punto que intentaba resolver todos por sí mismo. Pero además ocurría que el interés hacia tales cuestiones era todavía escaso.

Como hemos dicho, Cantor se vió inducido a las primeras consideraciones sobre la Teoría de Conjuntos por determinadas cuestiones del Análisis. Con ello hizo suyo el problema que desde hacía ya mucho tiempo preocupaba igualmente tanto a filósofos como a matemáticos: *el problema del infinito*. Aunque gracias a la contribución de A.L. Cauchy, K. Weierstras y otros matemáticos se había logrado una cierta clarificación del concepto de límite hacia mediados del siglo XIX, en cambio con ello se confirmaba una vez más la idea (dominante desde Aristóteles) según la cual el *infinito* solamente existe en la forma de *infinito potencial*. Esto significa que aunque para toda magnitud dada puede pensarse en una mayor, estas magnitudes siempre permanecen finitas y el proceso de crecimiento nunca finaliza de manera que no existe ninguna magnitud infinitamente grande. En una carta C.F. Gauss había expresado esta idea de la siguiente forma: "... por lo que protesto contra el uso de una magnitud infinita como si se tratase de una magnitud realizada, lo cual nunca es lícito en Matemáticas. Lo infinito es sólo una *forma de hablar*, en el fondo se habla de límites a los que ciertas situaciones se aproximan tanto como se quiera, mientras que a otras les es permitido crecer sin restricciones". Seguramente esto no lo habría dicho Leibniz porque tenía una idea de infinitesimo actual a través del concepto de diferencial.

Estos puntos de vista sobre el infinito eran comunes a todos los matemáticos de la época. Por eso con mayor razón debe admirarnos la genialidad y la audacia intelectual de Cantor, quien con sus resultados superó con creces sus ideas. El pudo demostrar que se podían superar estas ideas concibiendo el conjunto de todos los números naturales y también otros conjuntos con una infinidad de elementos. El mismo afirmó en la introducción a uno de sus trabajos: "La exposición de mis investigaciones en la Teoría de Variedades (Teoría de Conjuntos), realizada hasta la fecha, ha alcanzado un punto en el que su continuación depende de una generalización del concepto de número real entero que vaya mucho más allá de los límites actuales, y a decir verdad esta generalización se orienta en una dirección en la que, por lo que se vé, hasta el momento no ha sido investigada por nadie".

Que esta generalización no le fue fácil se lee en otra parte: "A la idea de considerar ... lo infinitamente grande no solamente en la forma de indefinidamente creciente, sino también de fijarlo matemáticamente por medio de números bajo la forma característica del infinito actual ha sido casi contra mi voluntad, en oposición de mis más preciadas tradiciones, obligado de manera lógica por el sentido del esfuerzo científico y de las tentativas de muchos años, y por eso tampoco creo que puedan aducirse argumentos en contra que yo no haya sabido encontrar".

A partir de esta intuición, y firmemente convencido de ella, Cantor construyó su Teoría de Conjuntos. En realidad, Cantor no formuló lo que entendía por conjunto hasta relativamente tarde. En su trabajo *Contribuciones a la fundamentación de la Teoría transfinita de Conjuntos,* publicado en 1895, escribió: "Como conjunto nosotros entenderemos toda colección en un todo M de ciertos y bien diferenciados objetos m de nuestra percepción o de nuestro pensamiento que serán llamados los elementos de M ".

Cantor ha pasado a la historia como el fundador de la Teoría de Conjuntos, pero las Ciencias Matemáticas están en deuda con él también por sus importantes contribuciones al Análisis Clásico. Hemos mencionado antes su trabajo sobre números reales y sobre su representación mediante sistemas numéricos. En su tratado sobre series trigonométricas que apareció en 1872, introdujo los números reales con la ayuda de las series fundamentales. (Hoy las llamamos sucesiones fundamentales o sucesiones de Cauchy). Este método ha servido también para la compleción de los espacios métricos.

Más tarde Cantor demostró que cualquier número real positivo r se puede representar mediante series del tipo

$$r=c_1+c_2/2!+c_3/3!+\dots$$

con los coeficientes $c_n \leq (n-1)!$ para $n \geq 1$. Estas series se conocen actualmente con el nombre de series de Cantor. En el mismo trabajo hay una generalización de dicha representación y una expresión de los números reales mediante productos infinitos. Con estos artículos y con algunos estudios notables sobre las series trigonométricas, Cantor se consolidó como discípulo aventajado de Weierstrass. Sus resultados extendieron los trabajos de éste y de otros con técnicas "convencionales".

En noviembre de 1873 y por el intercambio de cartas con su colega Dedekind en Brunswick abordó una cuestión que canalizaría la labor científica de Cantor hacia una nueva dirección. Sabía que era posible "contar" el conjunto de los números racionales poniéndolos en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. Pero se preguntaba si dicha correspondencia era posible para el conjunto de los números reales. Pensaba que no, pero no conseguía encontrar una demostración. Poco tiempo después, el 2 de diciembre confesó que "nunca se había tomado en serio el problema por no tener un valor práctico" añadiendo "estoy de acuerdo con ustedes que no merece la pena dedicarle mucho tiempo". No obstante, profundizó en las correspondencias entre conjuntos y el 7 de diciembre de 1873 escribía a Dedekind indicándole que el "conjunto" ("aggregate") de los números reales es no contable. Ese día se puede considerar como el día en que la Teoría de Conjuntos había nacido. Dedekind felicitó a Cantor por lograrlo. El significado de la prueba fue claro. Mientras tanto Cantor y probablemente Dedekind habían logrado probar que el conjunto de los números algebraicos es contable. Así apareció entonces una nueva prueba del teorema de Liouville de existencia de números transcendentes. Es de señalar que, en el mismo año 1873, el matemático francés Ch. Hermite logró demostrar que el número *e* es transcendente.

El primer artículo publicado sobre Teoría de Conjuntos se encuentra en *Crelle's Journal* (1874). Este trabajo, *Uber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen Algebraischen Zahlen*, contenía más que el título indicado, incluía no sólo el teorema sobre números algebraicos sino además el de los números reales en la versión simplificada de Dedekind, que difiere de la versión actual en que hoy usamos el "método de la diagonal", entonces desconocido.

Siguiendo su marcha Cantor atacó nuevos problemas. En una carta a Dedekind del 5 de enero de 1874 planteó la siguiente cuestión: "¿Puede una superficie (por ejemplo, un cuadrado con su borde) ponerse en correspondencia biunívoca con una línea (por ejemplo, un segmento con sus extremos) de tal forma que para todo punto de la superficie exista un punto correspondiente en la línea e, inversamente, para cada punto de la línea exista un punto correspondiente en la superficie? Yo opino que contestar a esta cuestión no es un trabajo fácil ya que la respuesta parece ser tan clara que "no" que la demostración parece casi innecesaria".

La demostración que Cantor tenía pensada era una justificación del no. Fue tres años más tarde, el 20 de junio de 1877, cuando en su correspondencia con Dedekind se encuentra una alusión a esta cuestión, pero esta vez da a su amigo razones para contestar sí. Confiesa que aunque durante muchos años pensó lo contrario en ese momento le presenta un argumento probando que dos conjuntos continuos de dimensiones diferentes tienen igual potencia, cuestión más general que la antes citada. (Esto consta en la correspondencia entre Cantor y Dedekind, publicada por Noether y Cavaillés).

Hoy día estamos en posición para contestar la cuestión de Cantor con una demostraciòn muy breve. La prueba original de Cantor es muy complicada, pero es correcta, y con ella llegó a un resultado que a los matemáticos de su tiempo parecía paradógico. Efectivamente, su resultado reducía el concepto de dimensión a términos insignificantes. Pero Dedekind reconoció inmediatamente que la aplicación de Cantor de un cuadrado sobre un segmento es discontinua, sospechando que una correspondencia biunívoca continua entre conjuntos de diferentes dimensiones no es posible.

Cantor intentó probarlo, pero su demostración no tenía rigor. Fue Brouwer quien, en 1910, dio finalmente una demostración completa de la conjetura de Dedekind.

Los siguientes trabajos de Cantor sobre la Teoría de Conjuntos de puntos contienen numerosos conceptos, teoremas y ejemplos que son habitualmente citados en los textos actuales de Topología. La obra básica en esta materia de Kuratowski contiene a pie de página numerosas referencias históricas y es interesante observar cuántos de los conceptos básicos en topología fueron dados por Cantor. Mencionamos sólo "derivación de un conjunto de puntos", la idea de "clausura", y los conceptos de "denso" y "denso en sí". Cantor llamaba "perfecto" a un conjunto que fuera cerrado y denso en sí mismo y dio un ejemplo notable de un conjunto perfecto y discontinuo. Este "conjunto de Cantor" es el conjunto de todos los puntos x del intervalo unidad [0,1] que se pueden expresar en la forma

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

con los números $a_n = 0$ ó $a_n = 2$, el cual es homeomorfo al espacio $\{0,1\}^N$.

Es fácil ver que el conjunto de Cantor tiene la misma potencia que el de los números reales. A propósito de esto hacemos notar que del conocido teorema de Baire se deduce que todo espacio métrico completo, no vacío y sin puntos aislados, es no contable. Justamente la demostración de dicho teorema tiene un precedente en la prueba clásica de que el conjunto de los números reales es no contable, ya que ambas demostraciones son similares. Modificando ligeramente esta demostración se puede llegar más lejos probando que todo espacio métrico completo, no vacío y sin puntos aislados, contiene un subconjunto homeomorfo al conjunto ternario de Cantor. Estas conclusiones, evidentemente, no son válidas para el conjunto de los números naturales que es un espacio metrizable completo infinito con todos sus puntos aislados.

Fue Cantor quien también dio la primera definición satisfactoria del término "continuo", que apareció en los primeros escritos de los Escolásticos. Llamó "continuo" a un conjunto perfecto continuo, de esta forma consiguió que este concepto tan sutil se convirtiese en una herramienta matemática útil. Hacemos notar que actualmente un "continuo" se introduce de manera usual como un conjunto compacto continuo, definición que no coincide con la de Cantor. El caso es que Cantor dio la primera definición operativa de dicho término.

En su trabajo fundamental de 1874, Cantor demostró que con el uso de correspondencias biunívocas se podían distinguir diferentes infinitos: Existen conjuntos *contables* y conjuntos que tienen la potencia del *continuo*. De fundamental importancia para el desarrollo de la Teoría General de Conjuntos fue la demostración de que para todo conjunto existe un conjunto de mayor potencia. Cantor sostuvo esto, inicialmente, mediante su teoría de números ordinales. Aunque se puede demostrar de forma más simple a través de su Teorema de los subconjuntos, que aparece en una sola cita entre sus trabajos publicados, y para un caso especial. Pero en una carta a Dedekind con fecha del 31 de agosto de 1899 se halla una alusión de que el "método de la diagonal", que Cantor había estado usando, podía ser aplicado para demostrar el Teorema general de los subconjuntos. La esencia de esta demostración es el hecho de que no puede haber una biyección entre un conjunto L y el conjunto M de sus subconjuntos. Para establecer esto, Cantor introduce funciones $f(x)$ que asignan a los elementos x de un conjunto L los valores 0, 1. Cada una de estas funciones define un subconjunto de L, el conjunto L' de los elementos x que verifican $f(x) = 0$; y a cada subconjunto $L' \subset L$ le corresponde una función $f(x)$ tal que $f(x) = 0$ cuando x pertenece a L' y $f(x) = 1$ en el otro caso.

Entonces si existiese una correspondencia biunívoca entre L y M, el conjunto de funciones en cuestión podría escribirse en la forma $\varphi(x, z)$ $(x, z \in L)$ " de modo que de cada especialización de z se obtiene un elemento $f(x) = \varphi(x, z)$ e, inversamente, cada elemento $f(x)$ de M se ob- tiene de $\varphi(x, z)$ mediante una especialización de z. Pero esto lleva a una contradicción, porque, si nosotros tomamos $f(x)$ como la función de x que toma sólo los valores 0,1 y es diferente de $\varphi(x, x)$ para cada valor de x, en tonces $f(x)$ es un elemento de M por un lado, mientras que por otro, $f(x)$ no puede obtenerse mediante una especialización $z = z_0$, porque $f(z_0)$ es diferente de $\varphi(z_0, z_0)$".

De acuerdo con el Teorema de los subconjuntos, para cada conjunto L existe un conjunto de mayor potencia: el conjunto M de los subconjuntos de L, también llamado potencia de L y que se suele denotar por 2^L o $P(L)$. La cuestión sobre una "Teoría de Conjuntos" se agudiza. Cantor contempló su teoría como una extensión natural de la teoría clásica de números. Introdujo los números "transfinitos" (cardinales y ordinales) y desarrolló una aritmética para ellos. Con estos números transfinitos, Cantor abrió una "nueva provincia" para las Matemáticas, según hizo notar Gutzmer con motivo del 70 aniversario de Cantor en 1915.

Lógicamente los primeros pasos en esta nueva teoría fueron titubeantes. Así los primeros conceptos sufrieron continuas modificaciones. En el trabajo sinóptico de Cantor en Mathematische Annalen de 1895 podemos leer: "Nosotros llamamos potencia o número cardinal al concepto general que con la ayuda de nuestra activa inteligencia se obtiene de un conjunto M por abstracción de la naturaleza de sus diferentes elementos m y del orden en que éstos están dados. Por tanto, cada elemento individual m, si ignoramos su naturaleza, se convierte en un 1 y el número cardinal M es un conjunto definido simplemente de unos".

La Matemática Moderna hace ya tiempo que desechó esta definición por buenas razones. Hoy dos conjuntos se dicen "iguales" si contienen los mismos elementos, de forma que son nombrados o distinguidos en la descripción del conjunto. Por tanto, si ponemos en lugar de cada elemento del conjunto el 1, tenemos el conjunto unitario $\{1\}$.

Cantor mismo notó lo inadecuado de esta primera definición. En una discusión en su libro de 1884 y posteriormente en 1899 en una carta a Dedekind, llamó potencia "aquel concepto general que se refiere al conjunto y a todos sus conjuntos equivalentes". Hoy nosotros diríamos, más simplemente, que "un número cardinal es un conjunto de conjuntos equivalentes". Pero esta definición todavía es inadecuada. De hecho sabemos que el concepto de "conjunto de todos los conjuntos" implica contradicciones. Por tanto, el concepto de "conjunto de todos los conjuntos equivalentes a un conjunto *M*" es también inconsistente. En efecto, sea *M* un conjunto infinito y

$$M^{*}=M \cup \{L\},$$

donde L es un elemento del conjunto de todos los conjuntos. El conjunto $\{L\}$ tiene, evidentemente, potencia 1, y todo conjunto M * (que contiene sólo un elemento más que M) es equivalente a M. Consistentemente, el sistema de todos los conjuntos M * es un subconjunto del "conjunto de todos los conjuntos equivalentes a M ". Pero como nosotros podemos aplicar este sistema en los elementos del "conjunto de todos los conjuntos", resulta un concepto que lleva inexorablemente a antinomias.

Resumiendo, en todos los trabajos de Cantor no encontramos ninguna definición rigurosa de número cardinal y ordinal.

Pero la historia no termina aquí. Una tercera definición de Cantor aparece en un informe de G. Kowalewski incluída en su biografía, *Bestand und Wandel*, de encuentros que tuvo con G. Cantor. Kowalewski escribió un libro delgado antes de su muerte cuando tenía ochenta años, alrededor de 1950. Con gran viveza relata sucesos y reuniones que ocurrieron cincuenta años antes. Alrededor de 1900, Kowalewski era Privatdozent en Leipzig. En aquelos días los matemáticos de Halle y Leipzig se reunían dos veces al mes, alternativamente en cada ciudad, y discutían sus trabajos. Aunque Cantor ya no publicaba, según su joven colega solía asistir a estas reuniones para apoyar su teoría de conjuntos o variedades. Esto incluía sus estudios sobre las "clases de números", el conjunto de números ordinales que pertenecen a conjuntos equivalentes. Los números de la segunda clase de números eran, por ejemplo, los números ordinales de los conjuntos contables infinitos. Kowalewski entonces discute las potencias (que eran llamadas "alephs"). Así dice: "Esta "potencia" se puede también representar, como solía hacer Cantor, como el número menor inicial de esa clase de números, y los alephs se pueden identificar con estos números iniciales de tal forma que podrían ser utilizados para representar los términos iniciales de la segunda y tercera clase de números del informe de Schoenfliess sobre la Teoría de Conjuntos".

En un libro actual de Teoría de Conjuntos se halla la siguiente definición de número cardinal: Un número cardinal es un número ordinal que no es similar (o coordinable) a ningún otro número ordinal menor. Vemos así que la Matemática Moderna ha adoptado la definición de Cantor, que no se encuentra en ninguno de sus artículos publicados. Es bastante improbable que Stoll, autor del libro citado anteriormente, leyese la biografía de Kowalewski. La moderna visión del concepto estuvo dormida durante cierto tiempo para luego ser acogida por generaciones más jóvenes. Debemos decir que Cantor finalmente llegó a la definición de número cardinal que hoy se considera válida. Esta moderna versión del concepto presupone la validez de un concepto de número ordinal. Para éste tampoco podemos aceptar la definición clásica de Cantor, por las mismas razones que nos previenen de aceptar las primeras versiones del concepto de número cardinal. Hoy día, de acuerdo con John von Neumann, un número ordinal se describe como un conjunto X bien ordenado tal que todo elemento $x \in X$ es igual al segmento generado por x.

En resumen, no sólo debemos a Cantor su iniciativa en el desarrollo de la teoría de conjuntos transfinitos. El demostró los teoremas más importantes de la nueva teoría, y aportó un campo de trabajo para las definiciones actuales del concepto. Sería absurdo criticarle por el hecho de que sus formulaciones iniciales no tuvieran la precisión moderna actual. Cualquiera que abre nuevos campos en las Matemáticas requiere una imaginación muy creativa y sus definiciones iniciales no pueden estar vigentes indefinidamente. Cuando Newton y Leibniz fundaron el Cálculo infinitesimal, sus definiciones eran rudimentarias comparadas con las versiones elegantes que se desarrollaron años después refinadas por Weierstrass y sus discípulos. Lo mismo es aplicable para los conceptos de la teoría de conjuntos y debemos hacer notar que Cantor estaba mucho más cerca de las definiciones actuales.

Por el gran avance sobre el conocimiento del infinito, Cantor potenció la investigación de los fundamentos. Hilbert rehusó entrar en el "paraíso" que Cantor había creado. Pero Cantor tampoco era un axiomático. Su modo de pensar pertenecía más a la época clásica. En las anotaciones de su artículo *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (1883), él expresa su apoyo incondicional a los "principios del sistema platónico", aunque también él habla de Spinoza, Leibniz y Tomás de Aquinó.

La teoría de conjuntos de Cantor no fue sólo una disciplina matemática. El la integró en la Metafísica que consideraba como una ciencia e intenttó conectarla con la Teología que utilizaba la Metafísica como herramienta científica. Cantor estaba convencido de que el infinito existía realmente tanto de una forma concreta como abstracta. A propósito de esto escribió: "Esta visión, que yo considero la correcta, es apoyada por muy pocos. Posiblemente sea yo el primero en la historia que adopta explicitamente esta posición, con todas sus consecuencias lógicas, pero estoy seguro que no seré el último!".

Filósofos y matemáticos que siguen el pensamiento de Platón aceptan actualmente el infinito de forma abstracta, pero no concreta. En una carta a Mittag-Leffler, Cantor escribe que cree que los átomos del Universo pueden ser contados, y que los átomos del éter podrían servir como un ejemplo del conjunto con la potencia del continuo. Los físicos actuales no están de acuerdo con ello, pero para estudiar el Universo utilizan variedades continuas. Cuando nos preguntamos qué queda del trabajo de

Cantor podemos contestar: todo lo que es formalizable queda. Todas sus opiniones puramente matemáticas han sido confirmadas y generalizadas por las siguientes generaciones, pero sus conceptos e ideas físicas no son aceptadas por ellas.

Al final de sus días Cantor creía que las bases de las matemáticas eran metafísicas, incluso en los años en que los formalismos de Hilbert empezaban a imponerse. Después de su muerte se encontraron en sus escritos una nota escrita a lápiz, probablemente de 1913, en la cual reafirma su punto de vista de que "sin un grano de metafísica" las matemáticas son inexplicables. Por Metafísica él entendía "la Teoría del Ser".

Es claro que los objetos matemáticos son "seres" desde el momento que existen intelectualmente. Por eso ante las consecuencias de un teorema de indecidibilidad, como la consistencia de una recta real con conjuntos no medibles Lebesgue o con todos sus conjuntos medibles Lebesgue, no cabe atribuir la verdad o falsedad a cualquiera de ellas. Si son consistentes, desde su perspectiva, ambas son verdaderas. Lo que ocurre es que, en realidad, existen infinitas rectas reales que tienen ciertas propiedades comunes, de modo que existen infinitas de ellas que según Solovay tienen todos sus conjuntos medibles Lebesgue. El teorema de Gödel prueba que el concepto de un conjunto infinito no es lo ordinario, lo ordinario es que manejamos conjuntos infinitos que consideramos iguales por tener ciertas propiedades comunes, pero que en realidad no lo son.

En la Teoría de Conjuntos hay varios teoremas importantes que fueron mencionados por Cantor y probados por otros. Entre ellos está el Teorema de equivalencia de Cantor-Schröder-Bernstein: "Si un conjunto A es equivalente a un subconjunto $B' \subset B$ y B es equivalente a un subconjunto $A' \subset A$, entonces A y B son equivalentes". Este teorema fue demostrado independientemente por Schröder en 1896, y por F. Bernstein en 1898. La sencilla demostración de Bernstein, alumno de Cantor, se encuentra en una carta de Dedekind a Cantor. Que todo conjunto puede ser bien ordenado fue probado por Zermelo con el auxilio del Axioma de Elección. Esta prueba provocó gran desacuerdo porque ciertos constructivistas rechazaban los teoremas de existencia puros y criticaban las consecuencias paradójicas del Axioma de Elección.

Más importantes fueron las discusiones sobre las antinomias de la Teoría de Conjuntos. De acuerdo con un teorema demostrado por Cantor, para todo conjunto de números ordinales existe un número ordinal mayor que todos ellos. Lo que es una contradicción cuando se considera el conjunto de todos los números ordinales. Cantor mencionó esta antinomia en carta a Hilbert de 1895. Mucho más impacto causó la posterior antinomia de B. Russell sobre "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos". Fue Hilbert quien, buscando salir del atasco, propuso una estricta formalización de la Teoría de Conjuntos y de todas las Matemáticas. El anhelaba salvar el "paraíso" que Cantor había creado. El formalismo de Hilbert exigía una enorme cantidad de tiempo para ser expuesto. No obstante, la estructura de las Matemáticas actuales se formalizan en el sentido de Hilbert. En este formalismo el concepto de conjunto es subyacente a todo él. La admiración de Hilbert por Cantor queda condensada en las siguientes palabras: "los números transfinitos es el más admirable florecimiento del espíritu matemático y, en resumidas cuentas, una de las obras cumbre de la actividad puramente intelectual del ser humano".

Cuando leemos un libro actual de Matemáticas encontramos siempre los conjuntos en el sentido de Cantor. El autor puede comenzar con un capítulo de lógica formal, pero luego es muy corriente que siga una sección dedicada a la Teoría de Conjuntos. Toda disciplina especializada se describe como la teoría sobre ciertas clases de conjuntos. Por ejemplo, una estructura algebraica es un conjunto el cual se definen ciertas relaciones y operaciones. Los espacios topológicos son ciertos conjuntos definidos por axiomas de entornos u otros axiomas. La Teoría de Probabilidades se refiere a conjuntos de sucesos. Y la Teoría de la Medida trata sobre la medida de conjuntos.

En la obra de Klaua, *Allgemeine Mengenlehre*, hay una definición de las matemáticas muy simple: La Matemática es la Teoría de Conjuntos.

Actualmente, podemos describir todas las disciplinas matemáticas como especializaciones de la Teoría de Conjuntos. Ciertamente, un alto precio (a los ojos de Cantor) fue pagado por este desarrollo. Las modernas matemáticas trabajan con sistemas formales y Cantor que fue probablemente el último gran platonista entre los matemáticos, seguramente nunca aceptó el naciente formalismo. Para él, el Problema del Continuo era una cuestión metafísica. Durante muchos años intentó demostrar que no había potencias intermedias entre las del conjunto de los números naturales y reales. Hace algunos años fue demostrado por Gödel y Cohen que la Hipótesis del Continuo es independiente de los axiomas del sistema de Zermelo-Fraenkel. Esta solución del problema no hubiese gustado a Cantor. ¿Podría haber defendido contra Kronecker la tesis de que la esencia de las Matemáticas consiste en la libertad? ¿No incluiría esta libertad la posibilidad de que la teoría creada por Cantor fuese interpretada en disconformidad con sus ideas originales? El hecho de que su teoría de conjuntos fuese influenciada por el pensamiento del siglo XX, de alguna manera no en armonía con su visión, es una prueba del profundo significado de su obra.

El siglo XXI puede ser que traiga novedades aproximándose a las ideas de Cantor sobre la Matemática y la Metafísica. Es claro que hay que descartar la idea ingenua de atribuir a una proposición indecidible, por ejemplo, sobre la Teoría de Números, la verdad o la falsedad por cualquier razón no objetiva. Toda proposición consistente dentro de una teoría matemática se debe tomar como verdadera, de modo que el mismo formalismo da carta de naturaleza como "ser" a los objetos matemáticos. Pero será muy difícil frecuentemente probar que dos de tales objetos son iguales, porque pueden ser diferentes y no se encuentre ningún test para distinguirlos. No obstante, dos objetos matemáticos son diferentes si uno tiene una propiedad que no tiene el otro, lo cual no es lo mismo que podamos efectivamente distinguirlos. Es claro que identificar ambas cosas puede ser origen de paradojas. Esto nos hace pensar, como a Cantor, que en las Matemáticas hay, en el fondo, mucha Metafísica.

Sin duda alguna, Cantor es el creador de la Matemática Moderna. En efecto, las mismas antinomias de la teoría de conjuntos llevaron a una revisión de los fundamentos y a un enriquecimiento de las Matemáticas. Así llegó la formalización, al parecer no deseada por Cantor. En este momento no olvidamos tampoco a Hilbert por su importante contribución en esta fundamentación.

Bibliografía

[1] CANTOR, G.: *Gesammelte Abhandlungengen.* Ed. E. Zermelo. Berlin, 1932.

[2] Expediente personal de Cantor del Archivo de la Universidad Martín Lutero de Halle-Wittenberg.

[3] BENDIEK, J.: *Ein Brief Georg Cantor an P. Ignatius Jeiler OFM.* Franziskanische Studien, **47** (1965), 65-73.

[4] FRAENKEL, A.: *Georg Cantor.* Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, **39** (1930), 189-266.

[5] FRANKEL, A.: *Einleitung in die Mengenlehre.* Berlín, 1982.

[6] GERICKE, H.: *Aus der Chronik der Deutschen Mathematikervereinigung.* Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, 68 (1966), **46**-70.

[7] GRATTAN-GUINNESS, I.: *Some Remarks on Cantor's Published and Unpublished Work on Set Theory.* Schriften reihe für Geschicte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin (NTM), nº 1/1971, pp. 1-8.

[8] KASDORD, G.: *Abstraktion und objetive Realität.* Tesis Doctoral en la Universidad Humboldt. Berlín, 1966.

[9] KLAUA, D.: *Allgemeine Mengenlehre.* Berlín, 1964.

[10] KOWALEWSKI, G.: *Bestand und Wandel.* Munich, 1950.

[11] LOREY, W.: *Der 70. Geburtstag des Mathematikers Georg Cantor.* Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, **46** (1915), 269-274.

[12] MESCHKOWSKI, H.: *Denkweisen grosser Mathematiker,* pp. 80-91. Brunswick, 1961.

[13] MESCHKOWSKI, H.: *Aus den Briefbüchern Georg Cantor.* Archive for the History of Exact Sciences, 6 (1965), 503-519.

[14] MESCHKOWSKI, H.: *Probleme des Unendlichen.Werk und Leben Georg Cantor.* Brunswick, 1968.

[15] MESCHKOWSKI, H.: *Georg Cantor*. Dictionary of Scientific Biography. 3, New York: Charles Scribners's Sons, 1971, pp. 52-58.

[16] NOETHER, E. y J. CAVAILLÈS: Briefwechsel Cantor-Dedekind. París, 1937.

[17] RUSSELL, B.: *Portraits From Memory and Other Essays*. London, 1956, pp. 24-25.

[18] RUSSELL, B.: *The Autobiography of Bertrand Russell 1872-1914*. London, 1967, pp. 217-220.

[19] SCHOENFLIESS, A.: Zur *Erinnerung an Georg Cantor*. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung, 31 (1922), 97-106.

[20] SCHOENFLIESS, A.: *Die Krisis in Cantors mathematischen Schaffen*. Acta mathematica, 50 (1927), 1-23.

[21] TERNUS, J.: *Zur Philosophie der Mathematik*. Philosophisches Jahrbuch der Görres-Gesellschaft, 39 (1926), 217-231.

[22] TERNUS, J.: *Ein Brief Georg Cantor an P. Joseph Hontheim S.J.* Scholastik, 4 (1929), 561-571.

[23] WANGERIN, A.: Georg Cantor. Leopoldina, 54 (1918), 10-13.

[24] WUSSING, H. y W. ARNOLD. *Biografías de grandes matemáticos*.

[25] YOUNG, W.H.: *The Progress of Mathematical Analysis in the Twentieth*. Proceedings of the London Mathematical Society, **24** (1926), 412-426.