

## *El desarrollo de la Mecánica y de la Física Matemática en el siglo XIX. Segunda Parte*

POR DARÍO MARAVALL CASESNOVES \*

Esta conferencia es la continuación de la que con el mismo título dictamos en el curso de Historia de la Matemática en el siglo XIX (primera parte) y con ella cerramos este siglo.

Concluamos la exposición histórica de la Mecánica Analítica en mi anterior conferencia con los principios de mínimo, las ecuaciones canónicas de Hamilton y la ecuación de Jacobi. Las ecuaciones de Lagrange en el caso de un sistema holónomo con  $n$  grados de libertad es un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden que determinan la evolución del sistema a partir de los valores iniciales de sus  $n$  coordenadas generalizadas  $q_1, \dots, q_n$  y de sus primeras derivadas respecto al tiempo, de modo que el movimiento del sistema viene representado por el movimiento de un punto de coordenadas  $q_1, \dots, q_n$  en el espacio abstracto de  $n$  dimensiones de las configuraciones. Las ecuaciones de Hamilton son un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden de las antedichas coordenadas  $q_1, \dots, q_n$  y de los momentos generalizados  $p_1, \dots, p_n$ , que determinan la evolución del sistema a partir de los valores iniciales de las  $q$  y de las  $p$ , de modo que el movimiento del sistema viene representado por el movimiento de un punto de coordenadas  $q$  y  $p$  en el espacio abstracto de  $2n$  dimensiones de las fases.

Las ecuaciones canónicas se obtienen a partir de la función  $H(q,p)$  conocida con el nombre de hamiltoniano, que fue introducida por Hamilton en 1834. En 1809 Poisson había deducido la mitad de las ecuaciones canónicas, por lo que algunos Autores las llaman de Hamilton-Poisson. Lagrange en 1810 las había obtenido en un caso particular. Ostrogradsky en 1850 demostró que las ecuaciones diferenciales a que conducen los problemas del Cálculo de Variaciones con una variable independiente, pueden ser expresadas en forma hamiltoniana.

Pfaff en 1814-15 y Cauchy en 1819, completando trabajos anteriores de Lagrange y Monge, demostraron que las características de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden no lineales conducen a sistemas de ecuaciones diferenciales de forma hamiltoniana.

---

\* Académico Numerario.

Hamilton demostró que si las ecuaciones canónicas pueden ser integradas, una función (la función de acción) del sistema dinámico puede ser obtenida. Jacobi invirtió el procedimiento y demostró que si la función de acción puede ser conocida, las ecuaciones de Hamilton pueden ser integradas. Esta función de acción es una integral completa de la ecuación en derivadas parciales de primer orden no lineal, conocida como ecuación de Jacobi. Por la razón anterior algunos Autores llaman a esta ecuación de Hamilton-Jacobi. Jacobi observó que si el hamiltoniano puede ser expresado solamente en función de los momentos  $p$ , la integración de las ecuaciones canónicas es inmediata.

En general no es fácil hallar solución de la ecuación de Jacobi, hay un caso muy importante debido a Liouville (1809-1882) en que la solución se obtiene por el método de separación de variables. La solución de Liouville de 1849 en el caso de tres dimensiones cuando el potencial es constante (no actúa ninguna fuerza sobre el punto material) equivale a la determinación de las líneas geodésicas de las superficies de Liouville, que son aquellas, para las que las cónicas geodésicas (elipses e hipérbolas) son isométricas.

Las superficies de Liouville comprenden como caso particular las superficies de revolución y las cuádricas; en 1893 Staeckel dio la solución en un caso más general, que engloba al de Liouville.

En el caso de sistemas dinámicos de enlaces independientes del tiempo y conservativos (existe un potencial) la energía total del sistema es constante, es decir el hamiltoniano es constante. Las magnitudes dinámicas, funciones de  $q$  y  $p$ , que permanecen constantes durante el movimiento, se llaman integrales primeras o por abreviar integrales. El conocimiento de una integral reduce el orden del sistema canónico en una unidad. Si el sistema tiene  $n$  grados de libertad existen  $2n$  integrales independientes entre sí, y una al menos de ellas es función explícita del tiempo. Se sigue que el conocimiento de  $2n$  integrales independientes dan la integración inmediata de las ecuaciones canónicas y por tanto queda definido el movimiento del sistema. Por esta razón la obtención de las integrales primeras es la base del conocimiento del movimiento del sistema.

Dos métodos importantes de obtención de integrales primeras son el de los paréntesis de Poisson y el del último multiplicador de Jacobi. En 1809 en el Diario de la Escuela Politécnica, Poisson introdujo sus paréntesis y demostró que conocidas dos integrales, el paréntesis de Poisson de ambas es también una integral, lo que conduce a un método de obtención de nuevas integrales, pero que falla a veces, en el caso en que el paréntesis es cero o constante o conduce a una integral que ya era conocida. Un siglo más tarde en 1909 Dautheville extendió el teorema de Poisson a los sistemas no holónomos. Los paréntesis de Poisson obedecen a una importante identidad descubierta por Jacobi.

La demostración del teorema de Poisson se basa en que la condición para que una función  $f(q,p,t)$  sea una integral es que la suma de  $\partial f/\partial t$  y del paréntesis de Poisson  $(f, H)$  de  $f$  y el hamiltoniano  $H$  sea cero. Cuando  $H$  no contiene el tiempo  $t$ , como  $(f, H)$  es una integral, también lo es

$\partial f / \partial t$ . Existe otra forma de demostrar el teorema de Poisson, conseguido por Poincaré considerando integrales dependientes de tres soluciones infinitamente próximas (Voisines).

Lagrange en las Memorias del Instituto de Francia en 1808 introdujo los paréntesis que llevan su nombre, que están relacionados con los de Poisson, porque los determinantes formados con unos y otros son recíprocos. En dicho año Lagrange demostró que sus paréntesis tienen un valor constante durante el movimiento a lo largo de cualquier trayectoria.

Las ecuaciones canónicas pueden expresarse sustituyendo las derivadas parciales de primer orden de  $H$  respecto a las  $q$  y las  $p$ , por los paréntesis de Poisson de las  $q$  y de las  $p$  con  $\dot{H}$ .

En la Mecánica Cuántica, las variables dinámicas se representan por operadores no conmutativos, que tienen las propiedades fundamentales de los paréntesis de Poisson, en el formalismo ideado por Heisenberg (1901-1976).

Euler utilizó el método del factor integrante para transformar una ecuación diferencial de primer orden en una diferencial exacta e integrar por tanto la ecuación diferencial; de modo que el conocimiento de un factor integrante reduce el problema de la integración de la ecuación diferencial a cuadraturas y el conocimiento de dos factores integrantes da la integral general igualando a una constante el cociente de los dos factores integrantes. Casi un siglo después Jacobi desarrolló la teoría de los multiplicadores que llevan su nombre y obtuvo el teorema del último multiplicador.

Dado un sistema de  $n-1$  ecuaciones diferenciales, solamente hay  $n-1$  integrales primeras independientes, de modo que cualquier otra integral por ser función de las  $n-1$  anteriores, es tal que el determinante funcional o jacobiano de las  $n$  integrales es nulo, pero éste expresa una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden, en la que la función incógnita es la  $n$ -ésima integral y los factores de su derivada son los menores del determinante funcional en los que solamente figuran las  $n-1$  primeras integrales. De aquí deduce Jacobi que los cocientes de dividir estos menores por las funciones del sistema de ecuaciones diferenciales son iguales y a esta función cociente la llama Jacobi multiplicador. Demuestra Jacobi que los multiplicadores son soluciones de una cierta ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden, que para el caso en que  $n-1$  es igual a dos, coinciden el multiplicador de Jacobi y el factor integrante de Euler. También demostró Jacobi que el cociente de dos multiplicadores es una integral, y que el producto de una integral por un multiplicador es un multiplicador. El multiplicador es un invariante relativo para las transformaciones de coordenadas, el producto de un multiplicador por el jacobiano de la transformación es un multiplicador para el sistema transformado de ecuaciones diferenciales. La importancia práctica de la teoría de los multiplicadores es que si se conocen  $n-2$  integrales, es decir falta solamente conocer una integral para que el problema esté resuelto, el sistema se reduce a una sola ecuación diferencial y el multiplicador es el factor integrante, de aquí el nombre de último multiplicador que le dió

Jacobi. En resumen el conocimiento de un multiplicador limita la integración del problema a la obtención de  $n-2$  integrales y una sola cuadratura termina el problema.

En el caso de un sistema de ecuaciones canónicas en número de  $2n$  y aunque no exista potencial (el sistema no sea conservativo) la unidad es un multiplicador y por tanto basta con conocer  $2n-1$  integrales para resolver el problema con una cuadratura. En el caso en que la fuerza viva y las fuerzas generalizadas no dependan del tiempo, se puede prescindir del tiempo, y el sistema de las  $2n-1$  ecuaciones canónicas admite el multiplicador 1, luego si se conocen  $2n-2$  integrales, se tendrá la ecuación nº  $2n-1$  por una cuadratura, y una vez conocidas las  $q$  y las  $p$  en función de una de ellas y de  $2n-1$  constantes de integración, se obtiene la que hace de variable independiente en función del tiempo  $t$ , por una cuadratura. Por tanto solamente hay que obtener  $2n-2$  integrales. Si existe potencial y los enlaces son independientes del tiempo, la conservación de la energía es una integral y por tanto solo hace falta conocer  $2n-3$  integrales.

Si  $n=2$ , además de la integral de las fuerzas vivas, solo hace falta conocer otra integral para terminar el problema, así por ejemplo en el caso de fuerzas centrales es la integral de las áreas la que termina de resolver el problema.

Jacobi encontró otra causa de simplificación que reduce el conocimiento de integrales solamente a  $2n-5$  en vez de  $2n-3$ . Es cuando una de las variables  $q_1$  no figura en  $H$  (es una coordenada cíclica), entonces es  $p_1$  constante otra integral. Se puede prescindir en el sistema de  $q_1, p_1$  y del tiempo, y el orden del sistema canónico se reduce a  $2n-3$ , en las que  $p_1$  es una constante arbitraria. Como  $p_1$  y  $H$  igualados a una constante son dos integrales, basta con conocer  $2n-5$  integrales para terminar de resolver el problema.

En el caso de un sólido con un punto fijo es  $n=3$ , si existe potencial, como la posición del sólido depende de los tres ángulos de Euler  $\theta, \phi, \psi$  y la fuerza viva no contiene a  $\psi$ , basta con conocer  $2 \cdot 3 - 5 = 1$  integrales, aparte de las de las fuerzas vivas y de la  $p_\psi$  constante para terminar de resolver el problema. Este problema concreto ha sido resuelto en tres casos particulares. Fue abordado por primera vez por D'Alembert en su libro sobre la precesión de los equinoccios en 1749. Euler presentó bajo forma definitiva las ecuaciones del movimiento, utilizando los ángulos que llevan su nombre como coordenadas del sólido y resolvió el caso en que las fuerzas exteriores son nulas o su resultante pasa por el punto fijo. Lagrange ha resuelto el problema de un sólido de revolución, suspendido por un punto de su eje, bajo la acción de la gravedad en su *Mecánica Analítica*. Poisson, sin citar a Lagrange ha resuelto este problema como nuevo en 1815. Poincaré (1777-1859) en el caso estudiado por Euler ha dado la representación geométrica del movimiento. Jacobi ha dado la solución del problema de Euler por funciones elípticas y en 1883 Hermite ha reducido el problema a la ecuación de Lamé. Mme. Kowaleski ha descubierto un nuevo caso de integrabilidad.

Poinsot ha demostrado que en el caso de Euler, el elipsoide de inercia  $E$ , respecto al punto fijo  $O$ , permanece tangente a un plano fijo  $\Delta$ , al punto de contacto  $M$  le llamó polo,  $OM$  es el eje instantáneo de rotación y la velocidad angular de rotación instantánea  $\omega$  es proporcional a  $OM$ . Llama polhodio la curva descrita por  $M$  sobre  $E$  y herpolhodio a la descrita por  $M$  sobre  $\Delta$ . El cono lugar de los ejes instantáneos respecto al sólido tiene por vértice  $O$  y por directriz el polhodio, y el cono lugar geométrico de los ejes instantáneos respecto al espacio tiene por vértice  $O$  y por directriz el herpolhodio. El movimiento se obtiene haciendo rodar el primer cono sobre el segundo, de modo que la velocidad angular instantánea sea  $\omega$ . Este movimiento se denomina de Poinsot. Si  $E$  es un elipsoide de revolución, el polhodio y el herpolhodio son circunferencias, y si es una esfera son puntos. Es curioso que Poinsot en su memoria dibujaba el herpolhodio dándole una forma sinuosa, lo que es incorrecto, porque como demostró Hess en 1886, el herpolhodio carece de puntos de inflexión, está comprendido entre dos circunferencias concéntricas y gira su concavidad hacia el punto  $P$ , proyección de  $O$  sobre  $\Delta$ . Darboux en una nota a la Mecánica de Despeyrous ha demostrado que se puede construir un aparato que realice el movimiento de Poinsot, ya que esto no se puede conseguir por la representación cinemática de Poinsot, que no hace intervenir el tiempo. Sylvester en 1866 demostró que los movimientos de Poinsot son casos particulares de otra infinidad de movimientos. Jacobi ha señalado que el caso de Lagrange y Poisson se puede llevar a la superposición de dos movimientos de Poinsot.

Sofía Kowaleski (1850-1890), discípula de Weierstrass (1815-1897) en una memoria premiada por la Academia de Ciencias de París en 1888 sobre la rotación de un sólido alrededor de un punto fijo, dio un nuevo caso de integración de las ecuaciones del movimiento, en el cual el elipsoide de inercia es de revolución, el centro de gravedad está en el plano del ecuador y el semieje desigual es la diagonal del cuadrado cuyo lado es igual a los semiejes iguales del elipsoide de revolución. Ya en nuestro siglo Husson en 1906 ha demostrado que es imposible obtener una tercera integral algebraica distinta de las de las fuerzas vivas y del momento fuera de los tres casos de Euler-Poinsot, Lagrange-Poisson y de Kowaleski antes descritos. Todos estos movimientos son giroscópicos y de una importancia extraordinaria en la Ingeniería Mecánica, son la causa de la precesión de los equinoccios, descubierta por Hiparco. El movimiento de un grave en el espacio se descompone en el movimiento parabólico de su centro de gravedad y en el movimiento alrededor del mismo, que es un movimiento de Poinsot. Otros casos de integrabilidad fueron mencionados por Sofía Kowaleski y por Poincaré, pero no llegaron a publicarlos y después de su muerte, no se encontraron prueba de ello en sus escritos.

El movimiento de un sólido libre ha contribuido al progreso de la geometría analítica, y así Study en 1891 ha descrito el sólido en vez de por las tres coordenadas de su centro de gravedad y los tres ángulos de Euler, por un sistema de ocho coordenadas homogéneas ligadas por una relación bilineal, que ofrecen una analogía con las coordenadas pluckerianas homogéneas de una recta.

La dinámica del movimiento relativo, para la que es muy importante el descubrimiento en 1835 por Coriolis (1792-1843) de las fuerzas que llevan su nombre, fue muy cultivada en el siglo XIX, y en ella destaca Foucault (1819-1868) por la teoría y experiencias en el Panteón del péndulo que lleva su nombre y por su giróscopo. Estas teorías son importantes por su aplicación a como es visto el movimiento por un observador terrestre.

Las ecuaciones de Lagrange fueron aplicadas al estudio de la estabilidad del equilibrio y de los pequeños movimientos en torno de las posiciones de equilibrio, dando origen a la teoría de las vibraciones. Las posiciones de equilibrio corresponden a los máximos y mínimos del potencial. Dirichlet demostró que si el potencial es mínimo el equilibrio es estable, teorema que había sido enunciado por Lagrange. El recíproco del teorema de Dirichlet solamente pudo ser demostrado rigurosamente con restricciones. Entre estas demostraciones figuran las de Liapounoff y de Hadamard (1865-1963) en 1896.

Los pequeños movimientos o vibraciones en torno de una configuración de equilibrio, se resuelven aplicando las ecuaciones de Lagrange cuando el potencial y la fuerza viva  $T$  son formas cuadráticas homogéneas en las coordenadas  $q$  y en las velocidades  $q'$ , respectivamente, con coeficientes constantes. La teoría general fue dada por Lagrange en 1762-65. Investigaciones posteriores condujeron a la introducción de las coordenadas normales, por una transformación lineal de las coordenadas primitivas, y son aquellas para las que las formas cuadráticas de  $U$  y  $T$  carecen de términos rectangulares. La posibilidad de reducción a coordenadas normales en todos los casos fue demostrada rigurosamente por Weierstrass en 1858, contrariamente a lo que creían Lagrange y sus continuadores. Los pequeños movimientos o vibraciones pueden extenderse a los movimientos uniformes de los sistemas que poseen coordenadas cíclicas.

Hay un ejemplo curioso de pequeños movimientos y son los de un punto material sometido a la gravedad en torno del punto más bajo de una superficie. Si la superficie es de revolución y el eje es vertical, la proyección del movimiento del punto material sobre el plano tangente a la superficie en su punto más bajo, que es horizontal, es una elipse, pero si la superficie no es de revolución, ambas coordenadas describen movimientos sinusoidales de frecuencias distintas, si son comensurables entre sí, la proyección de la trayectoria del punto es una curva algebraica, pero si son inconmensurables, la proyección de la trayectoria es trascendente, está encerrada dentro de un rectángulo a cuyos lados es tangente una infinidad de veces y goza de la propiedad de que recubre todo el área del citado rectángulo, lo que quiere decir que la trayectoria pasa tan cerca de cualquier punto del rectángulo como se quiera. Es un ejemplo de curva de Peano (1858-1932). Estas curvas llevan el nombre de figuras de Lissajous (1822-1880) que fue quien las encontró en 1855 en sus experimentos para dar una representación óptica de las vibraciones de distinta frecuencia. Es el ejemplo más sencillo de sistema condicionalmente periódico y tiene mucho interés en Mecánica Celeste.

La teoría de las transformaciones de contacto es de una gran aplicación en la Mecánica, hay ejemplos de las mismas en los trabajos de Legendre y de Ampère, fueron utilizadas por Hamilton y Jacobi, pero fue Sophus Lie (1842-1899) quien las puso ese nombre. En el espacio euclídeo de tres dimensiones se llama elemento a un objeto geométrico formado por un punto  $P$ , que puede ser definido por sus coordenadas cartesianas  $x, y, z$  y una recta  $\Delta$  que pasa por  $P$ , definida por dos coordenadas  $p, q$  que fijan su dirección. Una transformación de las cinco coordenadas del elemento, que sea una correspondencia biunívoca (biyectiva), transforma un punto  $P$  en general en una superficie  $S$  y las rectas que tienen  $P$  como soporte se transforman en las normales a  $S$ . Una superficie se transforma en la envolvente de las superficies en que se transforman sus puntos. Esta propiedad encuentra aplicación en Física, en el principio de Huygens, en la forma modificada de este principio debida a Fresnel y en la Mecánica de Ondas de Hamilton. Las transformaciones de contacto se denominan así porque no solamente transforman superficies tangentes en superficies tangentes, sino que conservan el orden de contacto entre superficies.

Un caso particular de transformaciones de contacto, es la transformación de Lie, que transforma rectas en esferas. En esta transformación un hiperboloide reglado se transforma en la envolvente de una familia de esferas que son tangentes a tres esferas fijas. La familia de esferas es la transformada de las generatrices rectilíneas de un sistema del hiperboloide y las tres esferas fijas son las transformadas de tres generatrices rectilíneas del otro sistema del hiperboloide. Esta superficie es una cíclida de Dupin, que fue encontrada por este geómetra al determinar la superficie para la cual, todas las líneas de curvatura son circulares.

Las transformaciones puntuales son un caso particular de las de contacto. Las que tienen aplicación en Mecánica son las transformaciones canónicas (también llamadas a veces de contacto, aun cuando son un caso particular de éstas) que transforman las coordenadas  $q$  y  $p$  en otras  $Q$  y  $P$  de modo que se conservan las ecuaciones canónicas de Hamilton. En el formalismo de Lagrange una transformación de las coordenadas  $q$  a unas nuevas  $Q$  da origen a ecuaciones de Lagrange, cuya forma es idéntica a las de las primeras; se dice que las ecuaciones de Lagrange son covariantes para las transformaciones puntuales. Por el contrario en el formalismo de Hamilton, en las transformaciones de las  $q, p$  a las  $Q, P$ , puede no existir ninguna relación entre el antiguo y el nuevo lagrangiano.

Dentro de las transformaciones canónicas o de contacto hay que distinguir las infinitesimales en las que se pasa de las coordenadas  $q, p$  a las  $q+dq, p+dp$ , de modo que las ecuaciones canónicas de Hamilton son transformaciones canónicas infinitesimales caracterizadas por el hamiltoniano  $H(q,p)$ . Se sigue que el estado del sistema dinámico en intervalos de tiempo infinitesimales  $0, dt, 2 dt, 3 dt, \dots$ , es representado por una aplicación repetida una infinidad numerable de veces de transformaciones canónicas infinitesimales de las coordenadas  $q, p$ , así que el movimiento se expresa matemáticamente por la evolución continua de una transformación canónica.

La condición para que una transformación sea canónica puede obtenerse mediante el uso de los paréntesis de Poisson o de los de Lagrange. En el primer caso se obtienen condiciones que al interpretarse de acuerdo con la Mecánica Cuántica llevan a las relaciones de incertidumbre de Heisenberg. Otra condición para que una transformación sea canónica, se obtiene expresando que la suma de las diferencias:  $P_i d Q_i - p_i d q_i$  para todas las coordenadas del sistema dinámico es una diferencial exacta; es el método seguido por Jacobi en su curso de Dinámica en 1866. Otro método importante en la investigación de las transformaciones canónicas es el de la covariante bilineal que liga este problema con el de Pfaff. Euler se ocupó de las ecuaciones entre diferenciales totales, que eran una diferencial exacta o reducibles a diferenciales exactas mediante un factor integrante, de modo que en el caso de tres variables la integral es una familia de superficies, y en caso de no cumplirse la condición anterior, Euler consideraba que el problema era absurdo. Pero Monge mostró que lo absurdo consistía en suponer que la integral de la ecuación entre diferenciales totales era una sola ecuación, y que podrían ser más de una. Observó Monge que en el caso de tres variables, aunque no exista una superficie que satisfaga la ecuación entre diferenciales totales, puede existir una curva que sí la satisfaga, la cual requiere para su definición dos ecuaciones. Monge dedujo de ello que en el caso de  $n$  variables, el equivalente integral de una ecuación entre diferenciales totales puede ser un sistema de ecuaciones a lo sumo en número de  $n-1$ .

Fue Pfaff en 1815 quien en una memoria presentada a la Academia de Berlín, demostró que el equivalente integral de una ecuación entre diferenciales totales de  $2n$  o de  $2n-1$  variables, siempre está constituido por un sistema de funciones integrales no mayor que  $n$ . Jacobi en 1827 hizo aportaciones al problema de Pfaff. No hubo nuevas aportaciones importantes hasta 1861 y 1862 en que fueron hechas por Natani, Clebsch y Grassman. Posteriormente Lie en 1873 y 1874 aplicó la teoría de las transformaciones de contacto. Frobenius en 1876 introdujo la covariante bilineal y Darboux en 1877 realizó nuevas aportaciones que publicó en 1882 en su memoria sobre el problema de Pfaff.

Cuando el pfaffiano es una diferencial exacta o reducible a ella, se dice que es completamente integrable, es lo que dijimos antes que era el único caso que consideraba Euler. Si hay  $n$  variables independientes integrar el pfaffiano  $W$  es obtener una función  $f(x_1, \dots, x_n)$  cuya diferencial total haga igual a cero a  $W$ , la función  $f$  igualada a cero es una multiplicidad de  $n-1$  dimensiones. Cuando no se da este caso, el objeto del problema de Pfaff es obtener todas las multiplicidades de cualquier número de dimensiones  $m$  ( $m < n$ ), que son integrales de  $W$  igualado a cero. Es decir si la multiplicidad es de  $n-m$  dimensiones, vendrá definida por  $m$  funciones  $f_1, \dots, f_m$  de las  $n$  variables igualadas a cero, y todo desplazamiento infinitesimal de un punto satisface a las  $df_1 = 0, \dots, df_m = 0$ , y si el resultado de sustituir en  $W$   $m$  variables en función de las  $n-m$  restantes satisface a  $W = 0$ , entonces la multiplicidad es una integral. Este hecho para

tres variables es el que primeramente señaló Monge como habíamos dicho anteriormente.

En Mecánica una transformación es canónica si la covariante bilineal de la forma diferencial  $\Sigma p_i d q_i$  es invariante. Los teoremas de reciprocidad que Lord Rayleigh (1842-1919) obtuvo en 1874 y en su "Teoría del sonido" y sobre lo que Helmholtz (1821-1894) publicó una memoria en 1886 y Lamb dio muchos ejemplos en 1888 son consecuencia de la invariancia de la covariante bilineal.

Otra aplicación de las transformaciones de contacto a la Mecánica es el de las transformaciones de Legendre (que son las más sencillas de las de contacto) a la ecuación de Jacobi que hacen jugar a las coordenadas  $q$  y  $p$  un papel simétrico, para lo cual basta con cambiar de signo el hamiltoniano y permutar el papel de las  $q$  y de las  $p$  en la ecuación de Jacobi.

Un progreso en la teoría de las ecuaciones diferenciales arrastra un progreso en la Mecánica. Sophus Lie en una carta que escribió a Mayer observa que ha llegado el momento de hacer con las ecuaciones diferenciales algo parecido a lo que había hecho Galois con las ecuaciones algebraicas. En 1825 Abel demostró la imposibilidad de resolver la ecuación de quinto grado por radicales, es decir expresar las raíces de la ecuación mediante funciones algebraicas explícitas de los coeficientes, de modo que los únicos números irracionales que aparezcan sean radicales. Galois (1811-1832) estableció el criterio en virtud del cual se puede saber en que condiciones una ecuación algebraica (no necesariamente de tipo general) puede ser resuelta algebraicamente, es decir por radicales. La aplicación de su criterio a las ecuaciones de quinto grado redescubre los resultados de Abel. Galois se apoyó en la teoría de los grupos finitos para obtener el grupo de la ecuación y construir las series de composición, y obtuvo que la ecuación es resoluble por radicales, si todos los números que aparecen en las series de composición son primos. El hecho de que una ecuación algebraica no sea resoluble por radicales no significa que sea insoluble y así Hermite (1822-1901) en 1858 demostró que la ecuación de quinto grado puede resolverse mediante funciones modulares, que son aquellas funciones de variable compleja que son invariantes para una transformación homográfica de coeficientes enteros y cuyo determinante es igual a la unidad. Más tarde Poincaré utilizando las funciones automorfias pudo resolver ecuaciones de grado superior al quinto.

Lie desarrolló la teoría de los grupos continuos de transformaciones de  $r$  parámetros en las que la  $n$  coordenadas  $x_1, \dots, x_n$  de un punto  $P$  se transforman en las  $n$  coordenadas de un punto  $P'$  que son funciones continuas en las  $n$  coordenadas y en los  $r$  parámetros. Variando infinitamente poco las variables se pasa de un punto  $P$  a otro infinitamente próximo  $P + dP$  y se define así una transformación infinitesimal. Lie (1842-1899) no construyó el equivalente de la teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales, pero sus métodos fueron el punto de partida de las investigaciones de Picard (1856-1941) entre 1883 y 1887, quien demostró el equivalente del antecitado teorema de Abel, y es que la ecuación diferencial lineal general de orden  $n$  no es integrable por cuadraturas. Se

dice que una ecuación diferencial es resoluble por cuadraturas, si su solución se expresa mediante una integral o suma de integrales. También Vessiot partió de los grupos de Lie para llegar a su teoría estructural de las ecuaciones diferenciales lineales, llegando a un teorema fundamental, según el cual a cada ecuación diferencial de orden  $n$  corresponde un grupo finito continuo de transformaciones lineales homogéneas de  $n$  variables, que tienen propiedades que recuerdan las del grupo de permutaciones de una ecuación algebraica, estando ligada la integración de la ecuación diferencial con el grupo de transformaciones de la ecuación.

Lie desarrolló su teoría entre 1869 y 1884 y resumió la gran obra de su vida en un libro en tres tomos "Teoría de los grupos de transformaciones" publicado de 1888 a 1893. La integración de una ecuación diferencial no lineal de primer orden por cuadraturas no siempre es posible; como la solución general depende de una constante arbitraria, ésta es representada en el plano por una familia de curvas integrales. Las transformaciones que transforman curvas integrales en curvas integrales son las mismas que dejan invariante la ecuación diferencial y forman un grupo continuo que es el grupo de la ecuación. Lie demostró que toda ecuación diferencial de primer orden admite un grupo, y solamente cuando el grupo puede ser encontrado, la ecuación diferencial puede ser integrada por cuadraturas, de modo que el problema de encontrar el grupo o de integrar la ecuación diferencial por cuadraturas es el mismo.

Los métodos de Lie se extienden a ecuaciones diferenciales de cualquier orden, sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones en derivadas parciales. La integración de estas últimas está ligada a las transformaciones de contacto.

El problema de los tres cuerpos es uno de los más importantes de la Mecánica Celeste. Consiste en el movimiento de tres partículas que se atraen según la ley de la gravitación universal de Newton. Este problema no puede ser resuelto en términos finitos mediante funciones conocidas del Análisis. Según el informe de Whittaker sobre los progresos de la solución del problema de los tres cuerpos publicado en 1899 y que comprende desde 1750 hasta esa fecha, se habían publicado unas ochocientas memorias sobre este tema. Este sistema dinámico es de orden 18, pero Lagrange demostró que se podía reducir hasta el sexto orden, aunque no lo redujo en forma hamiltoniana. La demostración de Lagrange fue mejorada por Jacobi en 1843, utilizando la eliminación de los nodos. Otro método interesante de reducción del orden 18 al sexto utilizando la forma hamiltoniana fue dada por Radan en 1868.

Una forma particular del problema de los tres cuerpos, es cuando las velocidades iniciales están en el plano de los cuerpos, entonces el movimiento es plano de orden 12 y puede ser reducido al cuarto. Otro problema restringido de los tres cuerpos, es cuando dos de ellos describen órbitas circulares alrededor de su centro de gravedad bajo el efecto de su atracción mutua y un tercer cuerpo sin masa (llamado planetoides) es atraído por los otros dos, pero sin influir en su movimiento, se mueve en

el plano de ellos. Este sistema es de cuarto orden, pero puede reducirse al segundo.

A principios del siglo XIX Lagrange y Laplace estudiaron el problema de los tres cuerpos por aproximación, utilizando desarrollos en serie de las coordenadas según las potencias de las masas que fallan para el cálculo de las efemérides a largo plazo, porque estas series no son trigonométricas sino que contienen términos seculares que hacen que las series no puedan ser utilizadas para valores muy grandes del tiempo.

En la segunda mitad del siglo XIX se tomó como objetivo eliminar los términos seculares. La primera tentativa sería hecha por Delaunay. Gilden consiguió hacer desaparecer de sus series los términos seculares y Lindstedt siguiendo un método distinto más sencillo ha realizado nuevas aportaciones.

Sin embargo esto no fue suficiente porque las series obtenidas no son convergentes y no permiten una aproximación indefinida, pero el cálculo de los primeros términos de la serie dan una aproximación muy satisfactoria.

Poincaré (1854-1912) ha reunido en su libro en tres tomos (publicados en 1892, 1893 y 1899) "Los nuevos métodos de la Mecánica Celeste" su gran obra sobre esta materia.

Independientemente del número de cuerpos, se dice que una solución es periódica si a intervalos regulares del tiempo, los cuerpos vuelven a tomar las mismas posiciones en un sistema de referencia galileano ligado al centro de gravedad de los  $n$  cuerpos. Pero a veces se utiliza la palabra periódica en un sentido más general y se dice que una solución es periódica si a intervalos regulares del tiempo la configuración relativa de los  $n$  cuerpos es la misma, mientras que la orientación de la configuración en el espacio gira con velocidad angular constante. Lagrange encontró soluciones periódicas del problema de los tres cuerpos en casos restringidos, que son la del triángulo equilátero y la de la línea recta. En la primera los tres cuerpos ocupan los vértices de un triángulo equilátero que gira con velocidad angular constante alrededor de su centro de gravedad, esta solución fue encontrada en 1906 en el sistema solar, siendo los tres cuerpos, Júpiter y los dos asteroides Aquiles y Patroclo. Lagrange encontró otra solución periódica en que los tres cuerpos describen elipses keplerianas semejantes, mientras que sus distancias mutuas permanecen en relación constante (puede consultarse la Mecánica Celeste de Laplace, libro X, cap. VI).

Después de Lagrange se han encontrado otras soluciones periódicas por Hill, Poincaré y Darwin. Poincaré ha distinguido tres clases de soluciones, para las de las dos primeras clases las inclinaciones son nulas y las excentricidades para las de la primera clase muy pequeñas y no para las de la segunda; para las de la tercera clase las inclinaciones no son nulas. Las de la primera y segunda clase comprenden como un caso particular la solución de Hill en su teoría de la Luna. En las tres clases las distancias mutuas de los tres cuerpos son funciones periódicas del tiempo, pero relacionadas a un sistema de ejes móviles, animados de un movimiento de rotación uniforme. Por tanto al cabo de un período los tres cuerpos se

encuentran en la misma posición relativa, pero habiendo girado un cierto ángulo.

Es muy poco probable que se den las condiciones iniciales para que existan soluciones periódicas, pero sí puede suceder que difieran muy poco. Para profundizar en estas investigaciones, Poincaré desarrolló la teoría de las ecuaciones de las variaciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, obtuvo para las desviaciones de las órbitas reales respecto a las periódicas un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de coeficientes periódicos, cuyas soluciones son la suma de los productos de exponenciales por funciones periódicas del tiempo. A los exponentes de estas exponenciales se les llaman características.

Poincaré introdujo sus ecuaciones de las variaciones en su memoria sobre el "Problema de los tres cuerpos" publicada en 1890 en *Acta Mathematica*, pero Darboux (1842-1917) ya en 1883 había introducido con el nombre de sistema auxiliar, las análogas para las ecuaciones en derivadas parciales. La utilidad de las ecuaciones de las variaciones es el estudio de la estabilidad de las órbitas reales respecto a las periódicas, pero la palabra estabilidad se emplea con dos sentidos el de Lagrange y el de Poisson. Lagrange demostró que si se desprecian los cuadrados de las masas, los grandes ejes de las órbitas permanecen estables, es decir que pueden desarrollarse en series de senos y cosenos uniformemente convergentes, y los grandes ejes permanecen dentro de ciertos límites, los cuerpos (astros) pueden pasar por todas las situaciones compatibles con las integrales de las fuerzas vivas, y pasan a intervalos de tiempo regulares tan cerca como se quiera de la situación inicial y nunca se alejarán demasiado.

Poisson (1781-1840) demostró que si se tienen en cuenta los cuadrados de las masas y se desprecian los cubos, subsiste una estabilidad atenuada, los grandes ejes experimentan continuas oscilaciones, pero la amplitud de las oscilaciones puede crecer indefinidamente. Es decir que aun cuando a intervalos de tiempo regulares el sistema pasa tan cerca como se quiera de su posición inicial, sin embargo puede alejarse mucho de esta posición en el transcurso del tiempo.

Poincaré señaló las condiciones para que exista estabilidad según Lagrange o según Poisson. Estableció también dos nuevas clases de soluciones que denominó asintóticas y doblemente asintóticas, las primeras corresponden al caso en que la órbita real y la periódica tiendan una a otra cuando el tiempo tiende a infinito, tienden a coincidir en un lejano futuro, las segundas corresponden al caso en que además de cumplirse la condición anterior, también las órbitas tienden una a otra cuando se invierte el sentido del tiempo, es decir en el más remoto pasado.

En sus investigaciones sobre Mecánica Celeste, Poincaré utilizó los invariantes integrales que se han mostrado también muy útiles en Mecánica Estadística y en Mecánica Cuántica, son integrales extendidas a una región del espacio de las fases, cuyo valor permanece constante durante el movimiento. Existe una relación entre integrales primeras e invariantes

integrales. También existe relación entre los invariantes integrales y las ecuaciones de las variaciones.

En 1887 Bruns demostró que las integrales clásicas, son las únicas integrales algebraicas independientes en el problema de los tres cuerpos, y en 1889 Poincaré demostró que no existen integrales uniformes, aparte de las de las fuerzas vivas y de las áreas. El teorema de Poincaré en un aspecto es más general que el de Bruns porque demuestra que no solo no existe una integral algebraica sino que tampoco existe integral transcendente uniforme en un dominio restringido. En otro aspecto el teorema de Bruns es más general porque es válido cualesquiera que sean las masas, mientras que el de Poincaré solamente es válido paramasas suficientemente pequeñas.

El Cálculo Vectorial es una herramienta de la Mecánica Racional, su inicio se halla en el "Cálculo baricéntrico" de Moebius (1826) y en el "Cálculo de equipolencias" de Bellavitis (1832), pero se desarrolla plenamente con los trabajos simultáneos e independientes de Hamilton y Grassman en 1843 y 1844; siendo 1853 la fecha de la publicación de las "Lecciones sobre los cuaternios" del primero. Les siguen importantes aportaciones de Tait, Gibbs y Heaviside.

La Estática y la Cinemática adquieren un gran desarrollo en el siglo XIX. El término de Cinemática es debido a Ampère en 1814 en su "Ensayo sobre la Filosofía de las Ciencias". El teorema general de que todo desplazamiento es reducible a un movimiento helicoidal es de Mozzi (1765), pero fue redescubierto por Chasles en 1830, por lo que los ejes instantáneos llevan el nombre de ejes de Chasles-Mozzi. El teorema de las aceleraciones en el movimiento relativo es debido a Coriolis. Las formas canónicas del movimiento son debidas para el movimiento plano a Cauchy en 1827, para el movimiento alrededor de un punto fijo a Poincaré en 1851 y para el movimiento general a Poncelet. Para el estudio de la Cinemática fue muy importante la geometría reglada, cuyo origen se debe a Plücker en 1868 en su "Nueva Geometría del Espacio", en ella la recta es el elemento genérico del espacio y viene definida por cuatro coordenadas o por seis homogéneas, entre las que existe una relación bilineal, a él se deben los conceptos de complejo y congruencia de rectas. Pero anteriormente las propiedades del complejo lineal eran conocidas por Giorgini (1827), Chasles (1830) y Moebius (1830). El papel del complejo lineal en el movimiento de un sólido fue reconocido por Chasles, y su estudio profundizado por Schönemann y Mannheim que llevó la geometría descriptiva a un alto nivel científico.

Se establece en el siglo XIX como un cuerpo de doctrina solidamente establecido, la Geometría Cinemática, que consiste en aislar dentro de la Cinemática el conjunto de las propiedades de las figuras que son independientes de la ley horaria, es decir del tiempo invertido en el movimiento. Los métodos del triedro móvil de una curva en el espacio o sobre una superficie no son solamente importantes en Geometría Diferencial sino también en la Dinámica y así por ejemplo las fórmulas de Frenet sirven para establecer las ecuaciones intrínsecas de la dinámica del

punto libre u obligado a moverse sobre una curva o superficie. Son muy importantes las aportaciones de la Geometría Cinemática al estudio de las curvas alabeadas y de las superficies realizadas por Manheim utilizando métodos sintéticos.

También la Geometría reglada encontró aplicaciones en Estática (teoremas de Moebius y de Minding, equilibrio astático, rectas en involución de Cayley) y en Geometría de masas (complejo tetraedral, el cual cuando el tetraedro degenera en un triedro trirectángulo y el plano del infinito se le conoce con el nombre de complejo de Binet de los ejes de inercia).

Las soluciones continuas, con derivadas parciales, primeras y segundas continuas, de la ecuación de Laplace, a las que lord Kelvin (1824-1907) dio el nombre de funciones armónicas juegan un papel muy importante en la atracción newtoniana, la electricidad, el magnetismo, la hidrodinámica, la propagación del calor, etc. El potencial newtoniano y el coulombiano satisfacen a la ecuación de Laplace fuera de las masas atractivas, de modo que el flujo de fuerza se dirige en el sentido del potencial creciente, en el caso newtoniano y en sentido decreciente en el caso de las atracciones eléctricas y magnéticas.

En hidrodinámica cuando un líquido está animado de un movimiento permanente en una región del espacio, las moléculas líquidas que pasan sucesivamente por un mismo punto, pasan con una velocidad que es siempre la misma. De la condición de incomprensibilidad del líquido se sigue que la divergencia del vector velocidad es nula, y que las velocidades derivan de un potencial que satisface a la ecuación de Laplace de tres variables. En el caso del flujo plano irrotacional, el potencial de velocidades satisface a las ecuaciones de Cauchy-Riemann y son por tanto soluciones de la ecuación de Laplace de dos variables, son funciones analíticas de variable compleja, las cuales se descomponen en dos funciones de dos variables reales, llamadas conjugadas, tales que cada una de ellas sirve de potencial de velocidades. Las familias de curvas planas que se obtienen haciendo constante cada una de ellas, son respectivamente las líneas equipotenciales y de corriente que se cortan ortogonalmente.

Según Fourier (1763-1830) en un medio conductor del calor, homogéneo e isotrópico, limitado por una superficie mantenida a temperatura constante, pero que puede variar en su interior de manera continua de un punto a otro, se establece un equilibrio de la temperatura en el medio, de modo que la temperatura en cada punto es una función de sus tres coordenadas que satisface a la ecuación de Laplace. A esta situación de la conoce con el nombre de estado estacionario o régimen permanente. Existe en este caso una analogía entre el flujo del calor y una corriente líquida estacionaria, permutando la temperatura y el gradiente de temperatura por el potencial de velocidades y la velocidad de la corriente.

El laplaciano de una función por el teorema de Green es invariante para una transformación de coordenadas ortogonales, es un parámetro diferencial de Lamé. Si la función es armónica, se sigue de lo anterior, que

si es finita así como sus primeras y segundas derivadas en un volumen, no tiene en este volumen ni máximo ni mínimo.

En el caso en que las masas atractivas estén distribuidas de manera continua sobre una superficie (superficie atrayente) el potencial debido a ellas se llama de estrato simple, y la componente de la atracción normal a la superficie atrayente (la derivada normal del potencial) sufre una variación brusca (es discontinua) cuando el punto atraído atraviesa la superficie atrayente. Esta propiedad fue presentada por Coulomb, precisada por Poisson y demostrada por Laplace y Cauchy.

Las investigaciones sobre magnetismo condujeron al potencial de doble estrato (hojas magnéticas) porque la expresión del potencial de un imán elemental (dipolo) depende no solamente de la inversa de la distancia sino también de sus derivadas primeras. Las hojas magnéticas son superficies sobre cuyas dos caras hay densidades magnéticas iguales y opuestas que pueden variar de manera continua. El potencial debido a una hoja magnética se llama de doble estrato y satisface a la ecuación de Laplace fuera de la hoja. Este potencial fue investigado durante el siglo XIX entre otros por Ampère, Helmholtz y Neumann. Mientras que el potencial de estrato simple varía de manera continua cuando el punto atraído atraviesa la superficie atrayente, el potencial de doble estrato sufre una discontinuidad.

Potenciales que dependen de derivadas de la inversa de la distancia de orden superior al primero se encuentran en piroelectricidad y en piezoelectricidad, como fue observado por Maxwell en su "Tratado de Electricidad y Magnetismo".

En el caso del potencial de volumen, las derivadas segundas del potencial son discontinuas cuando el punto atraído atraviesa la superficie que limita el volumen atrayente. El potencial satisface a la ecuación de Laplace fuera del volumen atrayente y a la de Poisson dentro. Tienen gran interés los llamados cuerpos centrobáricos, que son aquellos para los que la atracción resultante sobre cualquier punto material es equivalente a una sola fuerza que pasa siempre por un mismo punto fijo del cuerpo, cualquiera que sea su orientación y distancia. La esfera es el ejemplo más sencillo de cuerpo centrobárico. Lord Kelvin los investigó y demostró que si un cuerpo es centrobárico respecto a otro, lo es respectoa cualquier otro.

Gauss en 1840 y lord Kelvin (Thompson) en 1847 utilizando el Cálculo de Variaciones creyeron haber establecido la existencia de una solución continua  $U$  de la ecuación de Laplace (función armónica) a la que se ha asignado a priori un valor sobre una superficie cerrada,  $S$ , haciendo mínima la integral triple del cuadrado del gradiente de  $U$  extendida al volumen encerrado por la superficie  $S$ . Riemann en 1851, de acuerdo con esta idea afirmaba que la existencia de  $U$  está asegurada, por ser el planteamiento matemático de un fenómeno físico real, y llamó a esto el principio de Dirichlet. Sin embargo esto no es cierto como demostró Weierstrass, porque el valor mínimo de la integral anterior no es una función continua. Lo mismo vale para el caso de dos dimensiones.

Se plantea entonces la solución del problema interior de Dirichlet que es el de encontrar una función  $U$  que con sus derivadas parciales primeras y segundas sean continuas y uniformes en el interior de una superficie cerrada  $S$ , que satisface a la ecuación de Laplace y que sobre  $S$  tenga un valor dado a priori. Existe también un problema exterior de Dirichlet. Demostraciones rigurosas del teorema de existencia, tanto para el caso de dos o de más variables fueron dadas por Schwarz, Christoffel (1870), Harnack (1887) y Painlevé (1891).

La solución del problema para tres dimensiones, fue dada por primera vez por Neumann (1832-1925) en 1877 por el método de las medias aritméticas, que él mismo extendió a dos dimensiones. Riquier lo extendió a  $n$  variables en 1886. Métodos distintos de solución fueron dados por Robin en 1886 y por Poincaré (método del barrido) en 1890. La idea básica de este método recuerda al de las imágenes eléctricas de lord Kelvin, consiste en sustituir las masas o cargas interiores a un volumen, por una distribución sobre la superficie que limita dicho volumen, de modo que el potencial exterior sea el mismo, lo que se hace es barrer todas las masas o cargas interiores, llevándolas a la superficie, formando así un potencial de estrato simple, equivalente al potencial primitivo.

El problema de Dirichlet es el primer problema de contorno de la ecuación de Laplace, pero existe un segundo problema de contorno que es el de Neumann, en el que la determinación de la función armónica solución de la ecuación de Laplace en el interior de un volumen limitado por una superficie cerrada  $S$ , ha de cumplir la condición de que su derivada normal sobre  $S$ , tenga un valor dado a priori. Existe un tercer problema de contorno, que es el de Robin, en el que la condición que ha de cumplir la solución armónica es que sobre  $S$  una combinación lineal de la función y de su derivada normal tenga un valor dado a priori. También existen problemas exteriores de Neumann y de Robin, al igual que sucede con el de Dirichlet. Neumann introdujo el potencial logarítmico.

En el caso del círculo y de la esfera, los problemas de Dirichlet y de Neumann se pueden resolver utilizando la integral de Poisson. Este hecho es importante, porque conocida la solución para el círculo o la esfera, como las transformaciones conformes conservan la armonicidad de las funciones, se sabe resolver el problema de Dirichlet para cualquier área (o volumen) limitada por una curva (o superficie) cerrada, de la que se conozca la representación conforme sobre el círculo (o la esfera). Una transformación conforme muy importante es la inversión, que tiene una gran aplicación en la teoría del potencial; como transformación geométrica se atribuye su descubrimiento a Steiner en 1824, pero lord Kelvin, llegó independientemente a la inversión en 1845, y él y otros más la aplicaron con mucha eficacia en Electroestática y en Hidrodinámica.

En 1828 Green (1793-1841) en su "Ensayo sobre la aplicación del Análisis Matemático a la Electricidad y el Magnetismo" hizo una aportación fundamental a la teoría del potencial, formulando el problema de la inducción eléctrica, que es el problema de Dirichlet, dando sus teoremas famosos de transformación de integrales de volumen en integrales de

superficie. La función de Green, cuando es conocida, permite resolver el problema de Dirichlet y también la ecuación de Poisson. Para los problemas de Neumann y de Robin, existen funciones que juegan un papel similar al de la función de Green para el problema de Dirichlet. Green fue un matemático autodidacta que no alcanzó el título inglés de Bachelor en Artes hasta los 44 años en 1837, sus trabajos fueron desconocidos durante más de una década, por lo que Gauss, Chasles y Sturm redescubrieron muchos de sus teoremas. La publicación de Gauss de 1841 viene a cubrir el mismo campo que la de Green de 1828, pero los métodos de Gauss eran muy diferentes, por lo que ambas publicaciones son fundamentales en la teoría del potencial. Poincaré en su libro "Teoría del potencial newtoniano" de 1899 formuló un problema equivalente al de Green.

Los principales progresos en la teoría matemática de la elasticidad fueron debidos a Navier, Cauchy, Poisson, Green, Lamé, Clebsch, lord Kelvin, Kirchoff, Saint Venant y Hertz en el siglo XIX.

Chladin (1756-1824) publicó en 1802 su "Acústica" e investigó experimentalmente sobre las vibraciones de las membranas, obtuvo las bellas figuras que llevan su nombre; así como en las varillas y cuerdas vibrantes existen puntos, llamados nodos, en los que no hay vibración, en las membranas existen líneas nodales que dividen la superficie de la membrana en regiones que alternativamente vibran en sentidos opuestos. Si la membrana es rectangular las líneas nodales son paralelas a los lados, pero si es cuadrada, como existe el fenómeno de la degeneración, las líneas nodales son más complicadas. Chladin vertía arena sobre la membrana y al vibrar quedaba depositada sólo sobre las líneas nodales que permanecen en reposo. Después de la publicación de la Acústica de Chladin, Napoleón donó 3.000 francos a la Academia de Ciencias de París, para premiar una obra sobre la teoría matemática de las vibraciones de las placas; el premio fue concedido a Sofía Germain en 1815 y su trabajo publicado en 1821, donde dió la ecuación en derivadas parciales de cuarto orden, que es correcta, pero se equivocó en las condiciones de contorno. Fue Kirchhoff (1824-1887) quien estableció la teoría correcta en 1850. Entre tanto el problema análogo de las vibraciones de las membranas fue resuelto primeramente por Poisson (1781-1842) que no pudo completar el caso de la membrana circular, lo cual fue hecho por Clebsch (1833-1872) en 1862.

De 1638 (Galileo) a 1820, la investigación en elasticidad fue sobre problemas especiales y un tanto desordenada, en ella destacaron aparte de Galileo: D'Alembert, Euler y Daniel Bernoulli.

Navier fue el primero que investigó las ecuaciones generales del equilibrio y vibraciones de los sólidos elásticos en una memoria leída en la Academia de Ciencias de París en 1821 y publicada en 1827; en el caso de sólidos isótropos y homogéneos, las ecuaciones contenían una sola constante de la misma naturaleza que el módulo de Young. En Septiembre de 1822, Cauchy (1789-1857) entregó una memoria a la Academia de Ciencias de París, que fue publicada en sus "Ejercicios de Matemáticas" en 1828, en ella descubre la mayor parte de los elementos de la teoría pura

de la elasticidad, establecía los tensores simétricos de los esfuerzos y de las deformaciones, aunque la palabra esfuerzo (stress) fue introducida por Rankine. Cauchy generalizó la ley de Hooke que liga los esfuerzos y las deformaciones mediante funciones lineales y homogéneas; estableció las ecuaciones del equilibrio y del movimiento de un medio continuo cualquiera, (sólido, líquido o gaseoso). Las leyes de la Hidrostática y de la Hidrodinámica son aplicaciones de estas fórmulas generales. En el caso elástico general, las ecuaciones de Cauchy contienen veintiuna constantes que en el caso de un sólido isótropo y homogéneo se reducen a dos, que son el módulo de elasticidad de Young y el coeficiente de Poisson. Cauchy extendió sus investigaciones al caso de los cuerpos cristalinos, las cuales están contenidas en dos memorias en sus "Ejercicios de Matemáticas" de 1828. En estas últimas las ecuaciones son idénticas a las de Navier y hay solo quince constantes elásticas, y una sola si el cuerpo es homogéneo e isótropo.

Poisson publicó en 1829 su primera memoria, leída el año anterior en la Academia de Ciencias, sobre el mismo tema. La memoria contiene numerosas aplicaciones a problemas especiales, y las ecuaciones que obtiene son idénticas a las de Navier.

En 1839 Green desarrolló la teoría partiendo del principio de conservación de la energía, estableciendo la función de la energía de deformación, llegando a las mismas ecuaciones que en la primera memoria de Cauchy. En 1845 lord Kelvin dedujo la energía de deformación de Green de las dos primeras leyes de la Termodinámica.

Los métodos diseñados para resolver las ecuaciones de la elasticidad se clasifican en dos clases: en la primera se busca una solución especial y las condiciones de contorno se satisfacen mediante una serie de soluciones especiales. Esta clase de soluciones es una extensión de los métodos de desarrollo en serie de armónicos esféricos o de series trigonométricas. Estos métodos fueron iniciados por Lamé y Clapeyron en 1833, consideraban el caso de un sólido elástico limitado por un plano, al cual es aplicado una presión. Más tarde Lamé en 1854 trató el caso en que la frontera es una superficie esférica deformada por una tracción. El problema de la esfera fue tratado por lord Kelvin en 1863.

Las soluciones de la segunda clase son expresadas por integrales indefinidas, donde las funciones subintegrales representan singularidades distribuidas sobre la superficie o en el volumen; es una extensión de los métodos introducidos por Green en la teoría del potencial. Cuando se descubrieron las ecuaciones de la elasticidad, el método de las series se aplicaba en problemas astronómicos, acústicos y de propagación del calor, pero el método de las singularidades todavía no había sido inventado.

Saint Venant aplicó la teoría general a la flexión y torsión de barras e inventó el método semiinverso de solución que lleva su nombre. En su memoria de 1855 sobre la torsión de barras llegó a la formulación del principio que lleva su nombre, que es el principio de equivalencia de un sistema de cargas estáticamente equipolentes, según el cual los efectos producidos por desviaciones de las leyes asignadas de las cargas no son

importantes, salvo cerca de los extremos de las barras sometidas a flexión o torsión, donde solo producen perturbaciones locales. Aumenta mucho este principio la validez de las aplicaciones prácticas con tal de que la longitud de la barra sea muy grande en relación con las dimensiones de la sección transversal. Clebsch en 1862 y Voigt en 1887 simplificaron notablemente el análisis de Saint Venant. Kirchhoff, Larmor y lord Kelvin aplicaron los métodos variacionales.

Los problemas de transmisión de fuerzas fueron investigados por lord Kelvin y Boussinesq, y en 1882 Hertz los aplicó a la teoría del choque. En la teoría de las vigas continuas es muy importante el teorema de los tres momentos establecido por Clapeyron en 1857.

Al igual que en Hidrodinámica se pueden tomar las variables de Euler o las de Lagrange para resolver un problema, en la Elasticidad se pueden tomar como variables el tiempo y las coordenadas cartesianas  $x, y, z$  de un punto antes de la deformación, o  $t$  y las coordenadas  $x_1, y_1, z_1$  después de la deformación. El primero es el análogo de las variables de Lagrange, es el seguido por los fundadores de la Elasticidad; y el segundo es el análogo de las variables de Euler, fue introducido por Boussinesq y Brillouin. Cosserat ha mostrado cómo pasar de un método a otro.

Betti en 1872 estableció un teorema de reciprocidad que juega un papel importante, según el cual dados dos sistemas de desplazamientos originados por dos sistemas de fuerzas, son iguales los trabajos efectuados por un sistema de fuerzas y el de desplazamientos originados por el otro sistema de fuerzas. Es un caso particular de un teorema más general dado por lord Rayleigh en 1873.

Lagrange demostró en su Mecánica Analítica que del principio de los trabajos virtuales se pueden deducir las ecuaciones de la Hidrostática. Laplace en su Mecánica Celeste expuso la fórmula barométrica que da la variación de la presión con la altura. Arquímedes fue el primero que se ocupó del equilibrio de los cuerpos flotantes, tema que permaneció sin investigar hasta dieciocho siglos después. En 1650 Huygens se ocupó del problema. Dupin introdujo los centros de carena y las superficies isocarenas en su memoria "De la estabilidad de los cuerpos flotantes" reproducida en su libro "Aplicaciones de Geometría y de Mecánica" publicado en 1822. La primera teoría rigurosa de la estabilidad de los cuerpos flotantes es de Guyon (1879), siguiendo ideas de Bravais de 1837. Existe una analogía entre las ecuaciones del equilibrio de un líquido y las del equilibrio elástico cuando los desplazamientos derivan de una función potencial.

Una importante aplicación de la Hidrostática a la Cosmogomía es la de las figuras de equilibrio de una masa líquida en rotación. Mc Laurin en 1742 encontró que una clase de esferoides son figuras de equilibrio y estos se van aplastando a medida que aumenta la velocidad de rotación. Durante mucho tiempo se creyó que las figuras de equilibrio tenían que ser superficies de revolución, cuyo eje coincidiese con el eje de rotación del líquido; unos cien años después, Jacobi demostró que también eran figuras de equilibrio una clase de elipsoides, de ejes desiguales, algunos de los

cuales tienen forma de cigarro puro. Una tercera clase de figuras de equilibrio en forma de pera, fue descubierta por Poincaré. Además Poincaré demostró que si se parte del líquido en reposo, la figura de equilibrio es una esfera, si se inicia una rotación, la figura de equilibrio es un esferoide de Mc Laurin, que se va aplanando a medida que aumenta la velocidad de rotación, pero que siguen siendo estables; al llegar a cierto valor límite de la velocidad de rotación, el esferoide se hace inestable pero no se rompe, si no que pasa a ser un elipsoide de Jacobi estable (bifurcación), si sigue aumentando la velocidad de rotación, la figura de equilibrio recorre la clase de los elipsoides de Jacobi, cada vez más alargados hasta llegar al último estable, y entonces no se rompe, sino que pasa a adoptar la primera de las formas de pera de Poincaré (bifurcación), y comienza a seguirse la clase de estas figuras de equilibrio. Si éstas son siempre estables o no es un problema muy difícil, sobre el que trabajaron el propio Poincaré y en nuestro siglo Liapounoff, Darwin y Jeans. Las últimas investigaciones han demostrado que las figuras de equilibrio de Poincaré no son todas estables, sino que al alcanzar un valor límite la velocidad de rotación, la masa líquida se divide en dos que gravitarían una alrededor de la otra. Esto podría ser el origen de las estrellas dobles. Las investigaciones de Poincaré sobre esta materia se hallan recogidas en un curso de conferencias "Sobre las figuras de equilibrio de una masa fluida" publicado en 1902 y un libro de crítica histórica "Sobre las hipótesis cosmogónicas". El primero de estos libros concluye con un capítulo dedicado al anillo de Saturno, hipótesis del anillo sólido, del líquido e hipótesis de Cassini.

En el caso del movimiento permanente de un líquido incomprensible, cuando existen potenciales de fuerzas y de velocidades (movimiento irrotacional) el potencial de velocidades satisface a la ecuación de Laplace y existe una analogía con la Electroestática. Las fuentes, sumideros y dobletes se comportan de modo análogo a las cargas eléctricas y los dipolos, y se puede aplicar en este caso, al igual que en Electroestática el método de las imágenes de lord Kelvin, que admite que si en un líquido indefinido existen dos porciones  $V_1$  y  $V_2$ , animadas cada una de un movimiento propio, completamente separadas por una superficie continua fija, no material  $S$ , de modo que ninguna molécula líquida atraviese  $S$ , entonces si se suprime  $V_2$  y se limita  $V_1$  por un tabique que materialice  $S$ , el movimiento de  $V_1$  sigue siendo el mismo; lord Kelvin dice que los movimientos de  $V_1$  y  $V_2$  son imágenes el uno del otro.

En 1858 Helmholtz estableció los teoremas que son la base de la teoría de los torbellinos, y es uno de los progresos de la Hidrodinámica más grande, desde las investigaciones de Euler, Lagrange y Cauchy. Los torbellinos son de gran aplicación en Meteorología y sus ecuaciones presentan una gran analogía con las de la Electrodinámica. Contribuyeron muy eficazmente a esta teoría Kirchhoff, lord Rayleigh y lord Kelvin. Este último los utilizó en su teoría de los átomos-torbellinos para dar una explicación mecánica del universo, según la cual la materia es continua, pero ciertas porciones están animadas de movimientos de torbellinos. Esta

teoría se basaba en el teorema de Helmholtz que asegura la permanencia de los torbellinos, teorema que es el homólogo del de Lagrange para el movimiento irrotacional, que asegura que si en un instante las velocidades derivan de un potencial, ocurre lo mismo en cualquier otro instante.

En los fluidos perfectos, todos los esfuerzos interiores son presiones normales a los elementos sobre los cuales se ejercen, pero el concepto de fluido perfecto, aunque muy útil en la práctica es una abstracción, pues todos los fluidos poseen viscosidad, debido al rozamiento interno. Las primeras investigaciones sobre los fluidos viscosos se remontan a Navier y a Poisson, pero en 1845 Stokes en su memoria "Sobre las teorías del rozamiento interno de los fluidos en movimiento" desarrolló una teoría muy perfeccionada que presenta analogías con la teoría de la Elasticidad. En esta memoria Stokes dió una definición mecánica de torbellino en un punto  $P$ , según la cual si imaginamos la porción de materia contenida en una esfera infinitamente pequeña de centro  $P$  y en un instante  $t$  se aniquila toda la materia exterior y se solidifica la interior, la rotación instantánea inicial que tomaría la esfera solidificada es igual al torbellino. Poiseuille (1797-1869) descubrió en 1840 la ley que lleva su nombre, que expresa la velocidad de circulación de un líquido viscoso por tubos estrechos en régimen de flujo laminar, que entre sus muchas aplicaciones figura la de la circulación de la sangre. Stokes fue el primero en obtener las ecuaciones del movimiento de una esfera en un líquido viscoso y del flujo de un líquido viscoso alrededor de un obstáculo esférico; sirven para explicar como flotan las nubes en el aire y se calman las olas en el agua. Tiene aplicación al análisis de tierras y sirvió a Millikan en sus experiencias para determinar la carga de un electrón. Los trabajos de Stokes (1819-1903) sobre fluidos viscosos son de 1845 a 1850.

La palabra Acústica fue introducida por Sauveur (1653-1716) en 1701 en una memoria que lleva por título "Sistema general de los intervalos de los sonidos". La ecuación en derivadas parciales del movimiento ondulatorio fue obtenida por D'Alembert en 1750. A fines del XVIII se había investigado sobre las ondas sonoras en tubos, pero fue la memoria de Poisson de 1820 "Sobre el movimiento de los fluidos elásticos en tubos cilíndricos y sobre la teoría de los instrumentos de viento" la que marcó un gran progreso en la Acústica. Helmholtz en 1860 dió un tratamiento más completo a este tema.

Los problemas de reflexión y refracción de las ondas sonoras planas que inciden oblicuamente sobre la frontera de dos fluidos superpuestos fueron resueltos por Green en 1838. En ella se marcan las semejanzas y disparidades entre las ondas sonoras y las luminosas. Las ondas sonoras en los fluidos son longitudinales, por lo que no pueden ser polarizadas, a diferencia de las ondas luminosas que son transversales y que por eso pueden ser polarizadas. En sus estudios sobre la propagación de ondas en un sólido elástico, Poisson demostró en 1829 que existen a la vez ondas longitudinales y transversales que son respectivamente irrotacionales y solenoidales (de divergencia nula) que se propagan con velocidades distintas y que pueden coexistir, de modo que la reflexión de ondas de una

clase puede originar ondas de la otra clase. Stokes y lord Kelvin contribuyeron notablemente a la investigación de las ondas elásticas. Estas tienen una gran aplicación en Geofísica y Sismología.

La obra cumbre en Acústica del XIX es la "Teoría del sonido" en dos tomos de lord Rayleigh de la que hubo una primera edición en 1877, que fue aumentada y corregida en la edición de 1894 y 1896. En esta obra se expone la teoría general de los sistemas vibrantes, las vibraciones transversales de cuerdas, longitudinales, transversales y torsionales de varillas, de membranas, placas y cáscaras (placas curvas) e incluso de vibraciones eléctricas; vibraciones en tubos, teoría de resonadores, etc. Es un compendio de los conocimientos de la época, no solamente en la Acústica propiamente dicha, sino en la teoría de ondas y vibraciones. A lord Rayleigh se debe la función de disipación que lleva su nombre, de la teoría de los movimientos amortiguados por resistencias proporcionales a las velocidades; esta función es una forma cuadrática de las velocidades y mide la energía mecánica o eléctrica disipada en calor. Combinada con las ecuaciones de Lagrange permite desarrollar la teoría dinámica de las corrientes eléctricas.

En la teoría de la propagación de señales eléctricas en los cables surge una ecuación en derivadas parciales que difiere de la de la propagación de las ondas en la aparición de un término proporcional a la primera derivada parcial respecto al tiempo, que mide la disipación de la energía. A esta ecuación Poincaré la denominó ecuación de los telegrafistas y aparte de su gran interés tecnológico, ha sido objeto de muchos estudios de Matemática pura.

Las investigaciones sobre la propagación no lineal de ondas, comenzaron con Stokes (1847) cuando observó que para las ondas de gravedad en fluidos a gran profundidad, la velocidad de propagación, a diferencia de lo que sucede en el caso lineal, es función de la frecuencia y también de la amplitud. En un trabajo de Riemann de 1858 sobre la dinámica de gases, expuso la solución de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. Estas ondas no lineales conducen a ondas de choque, en las que se produce un cambio brusco de las variables dependientes, que en la dinámica de gases son la presión y la velocidad. La ecuación no lineal de Korteweg-de Vries es de 1895 y aparece en ondas de agua no muy profundas, que tienen la propiedad de que algunas ondas solitarias no se modifican en las colisiones (solitones).

De 1836 a 1838, Sturm y Liouville expusieron los primeros desarrollos extensos de lo que hoy es conocido como problema de Sturm-Liouville, que han dado origen a la teoría de las funciones ortogonales. Se presenta este problema en muchas teorías físicas, incluso en la actualidad. Uno de los primeros de importancia física es la ecuación de las vibraciones de una cuerda de densidad variable.

Dentro de las funciones ortogonales las más sencillas son los polinomios, entre los que figuran los de Legendre, Laguerre y Hermite utilizados en la Mecánica Cuántica y en muchas teorías clásicas. Como curiosidad hemos de señalar que Tchebicheff llegó a la teoría de los

polinomios ortogonales que llevan su nombre en 1852, como consecuencia de su interés por diferentes tipos de mecanismos articulados, entre ellos el paralelogramo de Watt, para mejorar su uso en la industria. Para ello necesitó establecer una teoría de la mejor aproximación de funciones, teoría en la que está contenida la de los polinomios ortogonales.

En mi conferencia anterior había llegado en la historia del electromagnetismo hasta Maxwell. Los trabajos más importantes de Maxwell (1831-1879) sobre esta materia, se desarrollaron entre 1864 y 1873 y culminaron con las ecuaciones que llevan su nombre, que ligan entre sí los campos eléctrico y magnético como un todo indisoluble, y en la teoría electromagnética de la luz. En las ecuaciones de Maxwell para los dieléctricos intervienen tres constantes que son: la velocidad de la luz en el vacío  $c$ , la constante dieléctrica  $\epsilon$  y la permeabilidad magnética  $\mu$ . Introdujo la corriente eléctrica de desplazamiento, consecuencia de la variación del campo eléctrico, la cual, hay que sumarla a la corriente de conducción en el teorema de Ampère. En los conductores la corriente de desplazamiento tiene poca importancia frente a la de conducción; por el contrario en los dieléctricos las corrientes de conducción son poco importantes frente a las de desplazamiento. La aplicación de las ecuaciones de Maxwell a dieléctricos que inicialmente se hallan en estado neutro, conduce a que tanto el campo eléctrico como el magnético obedecen a la misma ecuación de ondas, vibran en planos perpendiculares a la dirección de propagación de las ondas, y son perpendiculares entre sí. Las ondas electromagnéticas son transversales y su velocidad de propagación es igual a la de la luz. Maxwell calculó el valor del índice de refracción  $n$  del dieléctrico. Se sigue que no solamente las ondas luminosas son electromagnéticas sino que éstas pueden tener cualquier longitud de onda.

Con anterioridad a Maxwell había pruebas de la existencia de luz "no visible", al menos en el infrarrojo y el ultravioleta. En 1800 Herschel midió la temperatura en las distintas zonas del espectro solar para ver si existían diferencias significativas y sólo las halló en la parte extrema por debajo del rojo, lo que hoy se llama radiación infrarroja. Melloni en 1846 demostró que la salgema es transparente a la radiación infrarroja y en 1850 mostró que ésta se comporta como la luz ordinaria en cuanto a la reflexión, refracción, polarización e interferencias según la teoría de Fresnel. En 1801 Ritter encontró que la zona del azul y violeta y más aún en lo que hoy llamamos ultravioleta, la radiación es muy eficiente en la aceleración de ciertas reacciones químicas. Stokes demostró que el cuarzo es transparente a la radiación ultravioleta, mientras que el vidrio no lo es.

En 1888 Hertz (1857-1894) con un dipolo oscilante generó en su laboratorio, las ondas hertzianas, cuya longitud de onda es de 66 cm, un millón de veces mayor que la de la luz visible. Esto fue la primera comprobación experimental de las ecuaciones de Maxwell. Hertz observó que cuando brillaba la luz violeta en el terminal negativo del dipolo eléctrico oscilante la chispa saltaba con mayor facilidad, era el descubrimiento del efecto fotoeléctrico. Righi (1850-1920) demostró que las ondas hertzianas de longitud de onda más corta están sujetas a fenómenos de reflexión,

refracción, polarización e interferencias del mismo modo que la luz, ello fue la prueba final de que las ondas hertzianas y las luminosas son de la misma naturaleza, que únicamente difieren en su longitud de onda. Marconi (1874-1937) apoyándose en los descubrimientos de Hertz y Righi creó la posibilidad de transmitir noticias por radio (telegrafía sin hilos) entre Inglaterra y Francia en 1899 y entre Inglaterra y Estados Unidos en 1902, descubriendo la radio.

Poynting (1852-1914) en 1884 obtuvo el vector que lleva su nombre, de densidad de flujo de potencia electromagnética que es fundamental para establecer el balance de energía, que expresa que el decrecimiento de energía del campo electromagnético por unidad de tiempo es igual a la suma de la divergencia del vector de Poynting y de la potencia por unidad de volumen suministrada por las corrientes. La variación de la energía en un volumen es o disipado como calor o movimiento de las cargas eléctrica en dicho volumen, o bien escapa del volumen.

Los campos eléctrico y magnético derivan de un potencial escalar y otro vector, como consecuencia de las ecuaciones de Maxwell. Estos potenciales obedecen a cuatro ecuaciones escalares de propagación de las ondas, pero no homogéneas sino con un segundo miembro que es una función de punto (las densidades de corrientes eléctricas o de carga). Estas ecuaciones son más complicadas que la de Poisson, que es la igualación del laplaciano a una función de punto.

Kirchhoff (1824-1887) integró estas ecuaciones obteniendo la fórmula que lleva su nombre más complicada que la de Green que resuelve la ecuación de Poisson. La fórmula de Kirchhoff depende de una integral de superficie y otra de volumen, se puede eliminar la primera y entonces la solución es análoga a la de Poisson, pero con una particularidad notable y es que el potencial actúa con un retardo en el tiempo, como si se propagase con la velocidad de la luz  $c$ , es decir que el potencial sobre un punto a distancia  $r$ , en el instante  $t$ , debido a un elemento diferencial de volumen, no es el debido a la densidad de carga (o de corriente) en el instante  $t$ , sino en el instante anterior  $t-r/c$ . De aquí el nombre de fórmula de los potenciales retardados que se da a la solución de Kirchhoff.

Un dipolo eléctrico oscilante puede serlo o porque oscile la distancia entre las cargas o porque oscile la carga eléctrica (oscilador de Hertz). Su teoría matemática puede desarrollarse a partir de las ecuaciones de Maxwell y se obtiene para la potencia radiada que su valor es proporcional al valor medio del cuadrado de su aceleración. Este resultado es un caso particular del hecho más general de que si se acelera una carga eléctrica, ésta radia energía cuya potencia es proporcional al cuadrado de la aceleración, resultado obtenido por Larmor (1857-1942) por aplicación de la fórmula de los potenciales retardados. Larmor también descubrió el fenómeno de la precesión que lleva su nombre; es un fenómeno análogo al de un giróscopo en forma de trompo, que gira rápidamente alrededor de su eje de simetría, de modo que el plano vertical que contiene al eje del giróscopo gira alrededor del eje vertical (precesión) y si las condiciones iniciales son las adecuadas, la velocidad angular de la precesión es

constante, pues bien, si el momento angular está asociado a un momento magnético (paralelismo magnetomecánico), la aplicación de un campo magnético da lugar a la precesión de Larmor.

La fórmula de Kirchhoff aplicada a la ecuación de propagación de las ondas homogéneas (con densidad de carga y/o de corriente nulas) da un nuevo sentido exacto y matemáticamente deducible del principio de Huygens. La solución de la ecuación de ondas, que en este caso depende solamente de la integral de superficie, en el caso de la Acústica representa el desplazamiento de las partículas en el medio material en que se propaga el sonido y en el caso de la Óptica, la variación de cualquiera de los componentes de los campos eléctrico y magnético. La fórmula de Kirchhoff significa que la contribución de los elementos diferenciales de la superficie de la integral de la fórmula a las variaciones antecitadas en un punto  $P$ , en el instante  $t$ , está determinado por el estado de los elementos de la superficie en el instante anterior  $t-r/c$ , siendo  $r$ , como antes, la distancia a  $P$ . Es decir esta contribución se propaga con la velocidad de la luz  $c$ . Esta es la forma matemática y precisa que debe darse al principio de Huygens.

El principio de Huygens tal como fue enunciado por este físico, afirmaba que cada punto de una superficie de ondas, puede considerarse como generador de nuevas ondas esféricas secundarias, cuya envolvente constituye la onda principal de la nueva superficie de ondas. El principio de Huygens solamente explicaba las leyes de la Óptica geométrica (reflexión y refracción). Para explicar la Óptica ondulatoria (difracción) Fresnel modificó el principio de Huygens, pero seguirá siendo insuficiente el nuevo enunciado de Fresnel, pues en algunos casos daba resultados que no están de acuerdo con el experimento. Ello es debido a que los postulados que establecía Fresnel no eran verdaderos como se demuestra aplicando la fórmula de Kirchhoff.

La envolvente de las ondas secundarias de que habla el principio de Huygens tiene dos hojas, una de ellas constituye una onda regresiva que no existe en realidad, sin que se de la explicación de por qué es así. La destrucción de la onda regresiva por interferencias de las ondas secundarias es la consecuencia de la fórmula de Kirchhoff, contrariamente de lo que se deducía de uno de los postulados de Fresnel (1788-1827).

No voy a exponer la evolución histórica de la Mecánica y la Termodinámica estadísticas, porque ya lo hice en mi conferencia del curso de Historia de la Estadística, publicada por la Real Academia de Ciencias. Así mismo la polémica entre energética y atomismo que surge en 1895 la he tratado en mis conferencias sobre el cincuentenario de la Mecánica Cuántica, también publicadas por la Academia.

Aparte de las referencias bibliográficas que dí en mi conferencia sobre la primera parte del siglo XIX, pueden consultarse también los libros de Poincaré, Appell, Whittaker, lord Rayleigh, Love, Basset, Kellog y Persico entre otros.

Recordando a Cicerón, si para él la Historia es maestra de la vida, para nosotros podría y debería ser la Historia de las Matemáticas la maestra de los matemáticos.

Con objeto de no entorpecer la lectura del texto de la conferencia con fórmulas matemáticas, hemos incluido a continuación unas notas con objeto de que sirvan de complemento del texto anterior.

### Notas

Incluimos algunas de mis investigaciones sobre Mecánica y Física Matemática para aclarar algunos puntos.

#### Nota 1ª

La función de disipación de lord Rayleigh en mi opinión es modificada en la teoría de la relatividad como vamos a ver en un ejemplo que es el del movimiento relativista del péndulo amortiguado. Las ecuaciones de éste, si  $x$  es la abscisa y  $t$  el tiempo, en mi opinión son:

$$m\ddot{x} + f\dot{x} + k^2x = 0; \quad m\dot{c}^2\ddot{t} + f\dot{x}^2 + k^2x\dot{x} = 0 \quad (1)$$

donde las comillas como en todas las fórmulas posteriores indican derivación respecto al tiempo propio  $\tau$ .

Multiplicando la primera por  $x$  y la segunda por  $t$  y restando se obtiene

$$m\dot{x}^2 - mc^2\dot{t}^2 = 0 \Rightarrow \dot{x}^2 - c^2\dot{t}^2 = -c^2 \quad (2)$$

Para integrar la primera (1) dividiendo por  $\dot{x}$  se obtiene

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} \right) + f \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} + k^2 x = 0 \quad (3)$$

donde los puntos significación derivación respecto a  $t$ . Si introducimos el momento  $p$  (cantidad de movimiento) en (3):

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2/c^2}} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p/m}{\sqrt{1 + p^2/m^2c^2}} \quad (4)$$

la (3) se escribe

$$\frac{dp}{dt} + fp + k^2x = 0 \quad (5)$$

y derivando respecto a  $t$  se obtiene

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + f \frac{dp}{dt} + \frac{k^2 p/m}{\sqrt{1+p^2/m^2 c^2}} \quad (6)$$

que junto a

$$x = \int_0^t \frac{p/m}{\sqrt{1+p^2/m^2 c^2}} dt = - \left[ \frac{dp}{dt} + fp \right]_0^t \frac{1}{k^2} \quad (7)$$

resuelve el problema. De la segunda (1) se sigue:

$$\frac{d}{d\tau} \left( mc^2 \dot{x}' + \frac{k^2 x'^2}{2} \right) + f x'^2 = 0 \quad (8)$$

que junto a la expresión de la energía total W:

$$W = mc^2 \dot{x}' + \frac{k^2 x'^2}{2} \quad (9)$$

da

$$\begin{aligned} f x'^2 &= - \frac{dW}{d\tau} \Rightarrow f \dot{x}' x' t' = - \frac{dW}{d\tau} \Rightarrow f \dot{x}' x' = - \frac{dW}{dt} \Rightarrow f \dot{x}'^2 t' = \\ &= \frac{f \dot{x}'^2}{\sqrt{1-\dot{x}'^2/c^2}} = - \frac{dW}{dt} \end{aligned} \quad (10)$$

que da la medida de la energía disipada, que es mayor que la correspondiente a la Mecánica clásica. La fuerza de amortiguamiento  $f x'$  es igual a

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{f x'^2}{2} \right) \quad (11)$$

y por tanto el paréntesis es la función de disipación de lord Rayleigh en la teoría de la Relatividad.

**Nota 2ª.**

Si se aplican las ecuaciones de la dinámica relativista de la partícula al problema de los dos cuerpos, no se conserva el teorema de la dinámica clásica de que si inicialmente el centro de gravedad está en reposo, lo sigue estando durante todo el movimiento, porque por ejemplo en el caso de dos

partículas que se mueven sobre una recta atrayéndose proporcionalmente a la distancia, se tiene que:

$$\frac{m_1 \dot{x}_1}{\sqrt{1 - \dot{x}_1^2 / c^2}} + \frac{m_2 \dot{x}_2}{\sqrt{1 - \dot{x}_2^2 / c^2}} = 0 \quad (1)$$

ecuación que es incompatible con la

que es lo que asegura el teorema clásico del centro de gravedad. Tampoco existe un tiempo propio que sea el mismo para ambas partículas. Por esta razón, para conservar el teorema del centro de gravedad, me parece que para desarrollar la dinámica relativista de los sistemas materiales, hay que introducir un tiempo propio  $\tau$ , el mismo para todas las partículas y en el caso de un sistema holónomo de enlaces independientes del tiempo y en que existe una función de fuerzas  $V(q, t)$ ,  $q$  son las coordenadas generalizadas, hay que tomar como lagrangiano  $L$ :

$$L(q, q', t) = T(q, q') - \frac{M c^2 t'^2}{2} + V(q, t) t' \quad (3)$$

donde  $T$  es la semifuerza viva, que es una forma cuadrática de las derivadas  $q'$  de las  $q$  respecto a  $\tau$ . Existe la integral primera

$$T(q, q') - \frac{M c^2 t'^2}{2} = - \frac{M c^2}{2} \quad (4)$$

y de aquí

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + 2T(q, q') / M c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2T(q, \dot{q})}{M c^2}}} \quad (5)$$

donde  $M$  es la masa total del sistema, y el punto denota derivación respecto a  $t$ . Se sigue que el producto de la masa total del sistema por el cuadrado de la velocidad de la luz es el límite superior de la fuerza viva  $2T(q, \dot{q})$  y que por tanto la velocidad de una partícula podría superar la velocidad de la luz. Solo las partículas libres no pueden superar la velocidad de la luz.

**Nota 3ª.**

Si los enlaces dependen del tiempo  $T$  es la suma de  $T_2$ ,  $T_2$  y  $T_0$ , forma cuadrática y lineal en las  $q'$  y un término independiente de ellas  $T_0$ . En este caso en (4) y (5) de la nota anterior hay que sustituir  $T$  por  $T_2$  y el lagrangiano es

$$L(q, q', t) = T_2(q, q', t) + T_1(q, q', t) - \frac{M c^2 t'^2}{2} + \left. \begin{aligned} &+ (T_0(q, t) + V(q, t)) t' \end{aligned} \right| \quad (1)$$

Si aplicamos (1) a

$$T = \frac{m}{2} (x'^2 + g t)^2; \quad V = 0 \quad (2)$$

y la (3) de la nota 2ª al caso

$$T = \frac{m x'^2}{2}; \quad V = -m g x \quad (3)$$

se obtienen las mismas ecuaciones del movimiento, lo que muestra la equivalencia entre la acción de la gravedad y el movimiento uniformemente acelerado. Las ecuaciones de Lagrange, para el lagrangiano  $L$  de (2):

$$L = \frac{m}{2} (x'^2 + 2 g t x') + \frac{m}{2} g t^2 t' - \frac{m c^2}{2} t'^2 \quad (4)$$

son:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right) = m x'' + m g t' = 0 \Rightarrow x'' = -g t' \quad (5)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial T}{\partial t'} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = -m c^2 t'' - m g x' = 0 \Rightarrow m c^2 t' + m g x = W \quad (6)$$

de los segundos miembros de (5) y (6) se sigue la integral primera:

$$x'^2 - c^2 t'^2 = -c^2 \quad (7)$$

Las ecuaciones de Lagrange para el lagrangiano  $L$  de (3):

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} x'^2 - \frac{m}{2} c^2 t'^2 - mg x t' \\
 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial T}{\partial x'} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= mx'' + mgt' = 0 \\
 - \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial T}{\partial t'} \right) &= mc^2 t'' + mgx' = 0
 \end{aligned} \quad (8)$$

muestran la identidad de ambos movimientos. Los dos sumandos del primer miembro de la última (6) son las energía cinética y potencial y  $W$  es la energía total.

#### Nota 4ª

Aparte de las ecuaciones de Lagrange a partir del lagrangiano, se pueden utilizar las ecuaciones canónicas de Hamilton a partir del hamiltoniano. En el caso de sistemas holónomos de enlaces independientes del tiempo se puede introducir los momentos  $p$  por las fórmulas:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T / \partial \dot{q}_i}{\sqrt{1 - 2T(q, \dot{q}) / Mc^2}} \quad (1)$$

Las primeras (1) por ser  $T$  una forma cuadrática homogénea en las  $\dot{q}$  se puede invertir en las  $\dot{q}$  y por la primera igualdad (5) de la nota 2ª es

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1 + \frac{2T(q, p)}{Mc^2}} \quad (2)$$

por lo que también se puede invertir la última igualdad (1) y obtener las  $\dot{q}_i$  en función de las  $p_i$ .

Si hacemos

$$p_t = Mc^2 t' - V(q, t) \quad (3)$$

se obtiene del lagrangiano (3) de la nota 2ª el hamiltoniano  $H$  a partir de

$$\begin{aligned}
 H &= \sum p_i \dot{q}_i - p_t t' - T(q, p) + \frac{Mc^2 t'^2}{2} - V(q, t) t' = \\
 &= T(q, p) - \frac{(p_t + V(q, t))^2}{2Mc^2}
 \end{aligned} \quad (4)$$

que es una integral primera, cuyo valor es  $-Mc^2/2$ .

A partir de (4) se puede obtener la ecuación de Jacobi, en la que  $\tau$  es la variable independiente. A partir de (4) se obtienen las ecuaciones canónicas que son:

$$\dots = \frac{dq_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \dots = \frac{dp_i}{-\frac{\partial H}{\partial q_i}} = \dots \frac{dp_t}{\frac{\partial H}{\partial t}} = \frac{dt}{-\frac{\partial H}{\partial p_t}} = d\tau \quad (5)$$

tanto de las ecuaciones canónicas como de las de Lagrange, se sigue:

$$\frac{dp_t}{d\tau} = -\frac{\partial V}{\partial t} t' = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6)$$

que da la variación de la energía.

Al espacio de las fases aumentado con las fases  $t$  y  $p_t$ , propongo llamarle espacio-tiempo de las fases y en él se puede desarrollar una teoría de los invariantes integrales espacio-temporales (véase el tomo II de mi libro "Problemas de Mecánica" edit. Dossat).

Si la función de fuerzas es un potencial  $-U(q)$ , la (3) se escribe:

$$p_t = Mc^2 t' + U(q) = W \quad (7)$$

donde  $W$  (constante) es la energía total y las ecuaciones canónicas se escriben

$$\dots = \frac{dp_i}{-\frac{\partial U}{\partial q_i}} = \dots = \frac{dq_i}{\frac{\partial H}{\partial p_i}} = \dots = dt \quad (8)$$

siendo el hamiltoniano independiente del tiempo:

$$H(q, p) = Mc^2 \sqrt{1 + \frac{2T(q, p)}{Mc^2}} + U(q) \quad (9)$$

y existe una teoría de los invariantes integrales espaciales en el espacio de las fases  $q, p$ . También se puede desarrollar una teoría de invariantes integrales, siendo la variable independiente  $\tau$  y sustituyendo el último sumando de (4) por

$$-\frac{(W - U(q))^2}{2Mc^2} \quad (10)$$

e imponiendo a las  $q, p$  el enlace de estar sobre la hipersuperficie cuya ecuación se obtiene igualando (9) a la constante  $W$  (energía total).

Lo anterior se aplica a un punto material en coordenadas curvilíneas.

**Nota 5ª.**

En mi opinión el principio de D'Alembert se aplica en la Dinámica relativista del punto material de masa  $m$  y coordenadas  $x, y, z$  en la forma modificada

$$\left. \begin{aligned} (-mx'' + Xt') \partial x + (-my'' + Yt') \partial y + (-mz'' + Zt') \partial z - \\ - (-mc^2 t'' + Xx' + Yy' + Zz') \partial t = 0 \end{aligned} \right| \quad (1)$$

donde la derivación lo es respecto al tiempo propio  $\tau$ . Aplicando las transformaciones de Lorentz ( $v$  velocidad de la luz en el vacío):

$$\left. \begin{aligned} \partial x = \partial x_1 Ch \varphi + c \partial t_1 Sh \varphi; \quad \partial t = \partial t_1 Ch \varphi + \frac{\partial x_1}{c} Sh \varphi \\ \partial y = \partial y_1; \quad \partial z = \partial z_1; \quad Th \varphi = \frac{v}{c} \end{aligned} \right| \quad (2)$$

que son las mismas para las derivadas primeras y segundas de  $x, y, z, t$  de (2), se transforma (1) en la expresión equivalente para las nuevas coordenadas, de las que se deduce que:

$$Y_1 = Y \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-\dot{x}v/c^2} = Y \frac{1+\dot{x}_1 v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (3)$$

y la análoga para  $Z$ . Aquí la derivación es respecto al tiempo  $t$ . Se pasa del segundo al tercer miembro en (3) porque

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}_1 + v}{1 + \dot{x}_1 v/c^2} \quad (4)$$

La expresión para el cambio de  $X$  es

$$X_1 = X - \frac{Yy' + Zz'}{t_1} \frac{Sh \varphi}{c} = \frac{Y\dot{y} + Z\dot{z}}{c^2/v - \dot{x}} \quad (5)$$

Las (3) y (5) son invertibles sustituyendo  $v$  por  $-v$ , y las letras con subíndice por las que no lo tienen y viceversa.

La (3) y (5) son las transformaciones de Lorentz para las fuerzas.

Para una carga eléctrica  $q$ , de masa  $m$  en un campo eléctrico  $\vec{E}$  y magnético (inducción  $\vec{B}$ ), el principio de D'Alembert relativista se escribe en mi opinión:

$$[-m\vec{r}' + (q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{r}' \wedge \vec{B}')t'] \cdot \delta\vec{r}' - (-mc^2t' + q\vec{E}' \cdot \vec{r}') \delta t = 0 \quad (6)$$

porque

$$\left( \frac{q}{c} \vec{r}' \wedge \vec{B}' \right) \cdot \vec{r}' = 0 \quad (7)$$

$\vec{r}'$  es el vector de posición de la carga. De (6) se sigue que si el campo eléctrico  $\vec{E}'$  es nulo, el movimiento relativista es el mismo que el clásico con solo sustituir  $t$  por  $\tau$  y la relación entre ambos tiempos es constante.

### Nota 6ª

La suma  $\alpha$  en número aleatorio  $n$  de variables aleatorias (v.a.) independientes y de igual distribución de probabilidad  $\zeta$  con el convenio de que si  $n$  es cero,  $\alpha$  también es cero, he obtenido, que tiene por función característica

$$x(z) = \Psi \left( \frac{\ln \varphi(z)}{i} \right) \quad (1)$$

siendo  $\varphi(z)$  y  $\Psi(z)$  las f.c. de  $\zeta$  y  $n$ ;  $x(z)$  es la de  $\alpha$ . De (1) se sigue para los valores medios y las varianzas  $\sigma^2$ ; que por (1) valen:

$$\bar{\alpha} = \bar{n} \bar{\zeta}; \quad \sigma_{\alpha}^2 = \bar{n} \sigma_{\zeta}^2 + (\bar{\zeta})^2 \sigma_n^2 \quad (2)$$

Fórmulas que vamos a aplicar al cálculo de las fluctuaciones del número de fotones y de la energía en el cuerpo negro. Según la ley de Planck de la radiación del cuerpo negro la densidad  $\rho(\nu, T)$  de la energía espectral de frecuencia  $\nu$  y temperatura absoluta  $T$ , viene dada por

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}; \quad \rho(T) = \int_0^{\infty} \rho(\nu, T) d\nu = \beta T^4 \quad (3)$$

El número  $n(\nu, T)$  de fotones por unidad de volumen es:

$$n(\nu, T) = \frac{\rho(\nu, T)}{h\nu}; \quad N(T) = \int_0^{\infty} n(\nu, T) d\nu = \alpha T^3$$

por tanto el valor medio de la energía de un fotón y el valor medio cuadrático son respectivamente

$$\bar{\zeta} = \frac{\rho(T)}{N(T)} = \beta T / \alpha; \quad \bar{\zeta}^2 = \frac{\int_0^{\infty} h\nu \rho(\nu, T) d\nu}{N(T)} = \frac{\gamma T^2}{\alpha} \quad (4)$$

Si  $V$  es el volumen del cuerpo negro, en un volumen  $\Delta V$ , el número de fotones es una *v.a.* de Bernoulli, de función característica

$$\varphi(z) = \left(1 + \frac{\Delta V}{V} (e^{iz} - 1)\right)^{N(T)V} \quad (5)$$

y si  $\Delta V \ll V$ , la (5) es la *f.c.* de una *v.a.* de Poisson:

$$\varphi(z) = e^{N(T)\Delta V (e^{iz} - 1)} \quad (6)$$

Tanto (5) como (6) permiten resolver el problema de las fluctuaciones, de la energía en la radiación del cuerpo negro, teniendo en cuenta las fórmulas anteriores. Por ejemplo en el caso (6), el número aleatorio de sumandos es una *v.a.* de Poisson, la (2), aplicada a este caso  $\bar{\zeta}^2 = (4)$  da:

$$\bar{n}(T) = N(T)\Delta V = \sigma_n^2; \quad \sigma_\alpha^2 = \bar{n} \bar{\zeta}^2 = \Delta V \gamma T^5 \quad (7)$$

la varianza de la energía es proporcional a la quinta potencia de la temperatura absoluta. La energía contenida en el volumen  $\Delta V$ , es la suma en número aleatorio  $n$  de *f.c.* (6) de la *v.a.*  $\zeta$ , cuyos valores medio y valor medio cuadrático son las (4).

#### Nota 7ª.

Un tratamiento análogo al de la nota anterior puede darse a las fluctuaciones de energía en un gas molecular que siga la distribución de Maxwell-Boltzmann, pero en este caso  $N(T)$  es constante (independiente de  $T$ ), el valor medio y el valor medio cuadrático de la energía de una molécula son proporcionales a  $T$  y  $T^2$ . Los coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  son distintos en ambos casos.

También se puede resolver por el método de la nota anterior, las fluctuaciones del número de fotones y de la energía que acompaña a una onda electromagnética. En el caso de que ésta sea plana y monocromática la densidad de energía  $\rho(W)$  y el número medio  $N$  de fotones por unidad de volumen, que acompañan a la onda valen en unidades electromagnéticas *u.e.m.*:

$$\rho(W) = \frac{\epsilon E_0^2}{8\pi}; \quad N = \frac{\rho(W)}{h\nu} \quad (1)$$

siendo  $\epsilon$  la constante dieléctrica, y  $E_0$  la amplitud de la onda del campo eléctrico,  $h$  la constante de Plank.

El número de fotones en un volumen  $\Delta V$  es una *v.a.* de Bernoulli o de Poisson si  $\Delta V$  es muy pequeño de *f.c.* (5) y (6) de la nota anterior con  $N$

( $T$ ) sustituido por  $N$  (1). Como la energía de un fotón no es aleatoria sino que vale  $h\nu$ , la varianza de la energía contenida en  $\Delta V$ , en el caso de Poisson vale:

$$\sigma^2 = \Delta V \rho(W) h\nu \quad (2)$$

que es proporcional a la frecuencia  $\nu$ .

### Nota 8ª.

Por lo visto en la nota anterior, en el efecto fotoeléctrico, si la frecuencia  $\nu$  de la onda incidente supera al umbral de frecuencia, el número  $n$  de fotones incidentes por unidad de área y de tiempo vale

$$n = \frac{cE_0^2}{8\pi h\nu}; \quad \epsilon = 1 \quad (1)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Si  $p$  es la probabilidad de que un fotón incida sobre un electrón (de en el blanco), el número  $N$  de electrones liberado por unidad de área y unidad de tiempo, es una *v.a.* de Bernoulli de *f.c.*

$$\left[ 1 + p (e^{iz} - 1) \right]^n \quad (2)$$

cuyo valor medio  $\bar{N}$  y varianza  $\sigma^2$  valen:

$$\bar{N} = np; \quad \sigma^2 = np(1-p) \quad (3)$$

que son directamente proporcionales a  $E_0^2$  e inversamente proporcionales a  $\nu$ . La densidad  $J$  de la corriente de electrones liberadas es la *v.a.*

$$J = Ne \quad (4)$$

siendo  $e$  la carga del electrón.

En la generación de rayos X, fenómeno físico inverso del anterior si  $q$  es la probabilidad de que un electrón incidente produzca la emisión de un fotón y  $J$  la densidad de corriente de electrones, el número  $n$  de fotones liberados por unidad de área y de tiempo es una *v.a.* de Bernoulli de *f.c.*

$$\left[ 1 + q (e^{iz} - 1) \right]^{J/e} \quad (5)$$

cuyo valor medio y varianza valen

$$\bar{n} = \frac{qJ}{e}; \quad \sigma^2 = \frac{q(1-q)J}{e} \quad (6)$$

si  $\nu$  es la frecuencia de la onda de rayos X generada, y  $V$  la diferencia de potencial aplicada a la corriente electrónica es:

$$h\nu = eV; \quad \bar{n} = \frac{cE_0^2}{8\pi h\nu} \quad (7)$$

$E_0^2$  es proporcional a  $\nu$  (por tanto a  $V$ ) y a  $J$ .

### Nota 9ª.

La interpretación fotónica de la luz (corpúscular) convierte en estocásticos los fenómenos de incidencia de la radiación y de iluminación. Si la probabilidad de absorción de un fotón en su recorrido por el universo en un intervalo infinitesimal  $dr$  de su recorrido es proporcional a éste, vale:  $k dr$ , entonces por las reglas de las probabilidades totales y compuestas la probabilidad  $F(r)$  de que haya sido absorbido el fotón a una distancia menor o igual que  $r$  de su fuente de emisión, vale:

$$F(r+dr) = F(r) + (1-F(r)) k dr \Rightarrow \frac{dF(r)}{1-F(r)} = k dr \Rightarrow F(r) = 1 - e^{-kr} \quad (1)$$

y por tanto la probabilidad de que no haya sido absorbido es:

$$1 - F(r) = e^{-kr} \quad (2)$$

Si  $n$  es el número de fotones emitidos en la unidad de tiempo por una fuente puntual, el número de fotones a la distancia  $r$  de la fuente es una *v.a.* de Bernoulli de *f.c.*:

$$(1 + e^{-kr} (e^{iz} - 1))^n \quad (3)$$

de valor medio y varianza:

$$\bar{n} = n e^{-kr}; \quad \sigma^2 = n e^{-kr} (1 - e^{-kr}) \quad (4)$$

La ley de decrecimiento del flujo luminoso (valor medio  $\bar{F}$ ) por unidad de ángulo sólido ( $w$ ) perpendicular a la dirección del mismo vale por la primera (4):

$$I = \frac{n h \nu}{4\pi}; \quad \frac{d\bar{F}}{dw} = \frac{I}{r^2} e^{-kr} \quad (5)$$

que se distingue de la ley clásica (sin absorción) por la exponencial.  $I$  es la intensidad luminosa de la fuente puntual. Como el fenómeno es estocástico la varianza del flujo incidente, es por la segunda (4):

$$\sigma^2 = \frac{I}{r^2} e^{-kr} (1 - e^{-kr}) h \nu \quad (6)$$

porque la energía aportada por cada fotón vale  $h \nu$ .  $k$  es una constante para el universo muy pequeña, solamente con influencia para distancias muy grandes. Esta varianza (6) como la (2) de la nota 7ª es muy pequeña por serlo  $h \nu$ .

Con esta ley no se cumple la paradoja de Olbers, porque la radiación incidente sobre un punto del universo, si  $\rho(W)$  es la densidad constante de radiación del universo, es una *v.a.* de valor medio por la (5):

$$\int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{\rho(W)}{4\pi r^2} e^{-kr} dr = \frac{\rho(W)}{k} \quad (7)$$

porque

$$\rho(W) 4\pi r^2 dr \quad (8)$$

es la radiación presente en el estrato esférico de espesor  $dr$ , de centro en el punto sobre el que incide la radiación.

La varianza vale:

$$\sigma^2 = h \nu \rho(W) \int_0^\infty e^{-kr} (1 - e^{-kr}) dr = \frac{\rho(W) h \nu}{2k} \quad (9)$$

en virtud de (6) y por ser *v.a.* independientes los fotones recibidos procedentes de las distintas fuentes de radiación del universo, y por tanto la varianza total es la suma (integral) de todas las varianzas (6).

Como veremos en la nota 10ª, por tratarse de la integral de una *v.a.* infinitesimal de varianza finita, se sigue que la radiación recibida en un punto del universo, procedente del resto del mismo es una *v.a.* normal (gaussiana) de valor medio (8) y varianza (9).

### Nota 10ª.

Una *v.a.* infinitesimal de varianza finita, es una *v.a.* normal porque el logaritmo de su *f.c.* es:

$$\ln \varphi(z) = \ln \left( 1 + im \varepsilon z - \frac{\varepsilon \sigma^2}{2} z^2 + \dots \right) = i \varepsilon m z - \frac{\varepsilon \sigma^2}{2} z^2 \quad (1)$$

por ser los coeficientes de las potencias de  $z$  superiores al cuadrado proporcionales a potencias de  $\varepsilon$  superiores a la unidad y por tanto despreciables ( $\varepsilon$  es un infinitésimo).

La integral (suma) de *v.a.* infinitesimales su *f.c.* es tal que:

$$\begin{aligned} \ln \psi(z) &= \int \ln(1 + izm(\lambda)) d\lambda - \frac{z^2 \sigma^2(\lambda)}{2} d\lambda = \\ &= iz \int m(\lambda) d\lambda - \frac{z^2}{2} \int \sigma^2(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2)$$

como consecuencia de (1), luego es una *v.a.* normal. Un caso particular de esto es el resultado del final de la nota 9ª.

La *f.c.* de las *v.a.* de varianza infinita (según Levi) son de la forma:

$$\ln \varphi(z) = imz - (c_0 + jc_1) |z|^\alpha (1 + w(z))$$

$$0 < \alpha < 2; c_0 > 0, |c_1| \leq c_0 \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}; w(0) = 0; j = \begin{cases} i, & z > 0 \\ -i, & z < 0 \end{cases} \quad (3)$$

pertenecen al dominio de atracción de las leyes de probabilidad estables, cuyas *f.c.* son el resultado de hacer  $w(z) = 0$  en (3).

Por tanto las *v.a.* infinitesimales de *f.c.* (3), tienen por *f.c.*:

$$\ln \varphi(z) = imz \varepsilon - (c_0 + c_1 j) \varepsilon |z|^\alpha \quad (4)$$

al despreciar las potencias superiores de  $\varepsilon$ . La integral de éstas (sumas) tienen por *f.c.*:

$$\ln \psi(z) = iz \int m(\lambda) d\lambda - |z|^\alpha \int (c_0(\lambda) + jc_1(\lambda)) d\lambda \quad (5)$$

Veamos dos ejemplos, sean las dos *v.a.* de *f.c.* de la forma (3):

$$\varphi(z) = 1 - |z|, |z| \leq 1; \quad \varphi(z) = 1 - \sqrt{1 - e^{-2iz}} \quad (6)$$

hagamos en la primera y segunda los cambios:

$$z \rightarrow z a(\lambda) d\lambda \quad z \rightarrow z (a(\lambda) d\lambda)^2 \quad (7)$$

y se obtiene para las integrales (*v.a.*) de éstas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \ln \psi(z) &= \int \ln(1 - |a(\lambda)z|) d\lambda = -|z| \int |a(\lambda)| d\lambda \\ \ln \psi(z) &= \int \ln(1 - \sqrt{2iz} a(\lambda)) d\lambda = -\sqrt{2iz} \int a(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (8)$$

Estas integrales que proceden de productos infinitos continuos de *f.c.*, son ejemplos de las que he denominado integrales no lineales, cuyas propiedades y definición he dado en mi libro: "Líneas de investigación en los procesos estocásticos y el movimiento browniano" editado por el Instituto de España.

La función de frecuencia  $f(x)$  correspondiente a la f.c. (3) con  $w(z) = 0$  (leyes estables) viene dada por la transformada integral:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-c|z|} z^{\alpha} \cos(c|z|^{\alpha} + zx) dz \quad (9)$$

### Nota 11ª.

Dado un sistema de  $n$  partículas, en mi opinión, en la dinámica relativista se cumple la integral primera:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i \left[ \left( \frac{dx_i}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy_i}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz_i}{d\tau} \right)^2 \right] - M c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 &= -M c^2 \\ \sum \frac{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{m_i} - \frac{E^2}{M c^2} &= -M c^2; \quad E = M c^2 \frac{dt}{d\tau} \end{aligned} \right| \quad (1)$$

donde las  $m$  son las masas, las  $p$  las componentes de las cantidades de movimiento,  $M$  y  $E$  la masa y la energía totales del sistema,  $\tau$  el tiempo propio, y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío.

Si introducimos las energías  $e$  definidas por:

$$\frac{p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2}{m_i} - \frac{e_i^2}{m_i c^2} = -m_i c^2 \Rightarrow \sum \frac{e_i^2}{m_i c^2} = \frac{E^2}{M} \quad (2)$$

que son las energías totales de cada partícula supuesta libre, en mi opinión las transformaciones de Lorentz para los sistemas vienen dadas por:

$$\left. \begin{aligned} p'_{ix} &= p_{ix} \operatorname{Ch} \varphi - \frac{e_i}{c} \operatorname{Sh} \varphi; & \frac{e'_i}{c} &= \frac{e_i}{c} \operatorname{Ch} \varphi - p_{ix} \operatorname{Sh} \varphi \\ p'_{iy} &= p_{iy}; & p'_{iz} &= p_{iz}; & \operatorname{Th} \varphi &= \frac{v}{c} \end{aligned} \right| \quad (3)$$

siendo  $v$  la velocidad constante con que se mueve un observador  $O'$  a lo largo del eje  $OX$ , respecto a un observador  $O$  localizado en el origen de coordenadas. Las (3) son invertibles, obteniéndose las fórmulas inversas cambiando  $v$  por  $-v$  y las  $e, p$  por las  $e', p'$  y viceversa.

Las (3) hacen invariantes a las (2) y a la segunda (1); permiten calcular las  $p', e'$  en función de las  $e, p$ , y la invariancia de la (2) permite calcular  $E'$ .

Las velocidades  $v$ , vienen dadas en virtud de la tercera (1) por:

$$p_{ix} = m_i \frac{dx_i}{d\tau}; \quad v_{ix} = \frac{p_{ix}}{m_i} \frac{d\tau}{dt} = \frac{Mc^2 p_{ix}}{m_i E} \quad (4)$$

y cambiando en (4) las  $p$  y  $E$  por las  $p'$  y  $E'$  se obtienen las  $v'$ , medidas por  $O'$ . Análogamente para las componentes  $y$ ,  $z$ .

Si  $n=1$  se obtienen las fórmulas de la dinámica relativista del punto, y si  $v \ll c$  se obtienen las fórmulas de la mecánica clásica en primera aproximación, es decir despreciando las potencias superiores de  $v/c$  de modo que en las fórmulas finales no aparezca  $c$ .

La segunda y tercera (1) permiten calcular  $E$  en función de las  $p$ , y la (4)  $E$  en función de las  $v$ ; se obtiene:

$$E = Mc^2 \sqrt{1 + \Sigma (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) / m_i Mc^2} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \Sigma m_i v_i^2 / Mc^2}} \quad (5)$$

Si las partículas son libres (no forman sistema) sus tiempos propios son distintos y valen:

$$e_i = m_i c^2 \frac{dt}{d\tau_i} \quad (6)$$

Se sigue que en la integración y desintegración de sistemas de partículas se cumplen las fórmulas anteriores, se conservan las  $p$  y las  $e$ , pero cambian las  $v$  y los tiempos propios, de modo que para las partículas libres nunca hay velocidades superiores a la de la luz (no así para las partículas que forman sistemas, que sí pueden superar la velocidad de la luz). Se presentan fenómenos de choque temporales, que no tienen homólogos en la mecánica clásica, en la que solamente hay choques espaciales, como ya he señalado en anteriores ocasiones.

La aditividad de la energía y su conservación por la tercera (2) solamente son válidas para la Mecánica clásica, primera aproximación de dicha fórmula cuando  $v \ll c$ .

### Nota 12ª.

La ecuación de Jacobi puede utilizarse en la Relatividad restringida (métrica psudoeuclídea) y la he utilizado también en la Relatividad general y en la Cosmología relativista (métrica pseudoriemanniana).

He propuesto llamar sistemas universoidales a aquellos sistemas dinámicos clásicos, cuya semifuerza viva  $T$  es igual a:

$$T = \frac{1}{2} A_0 (A_1 + \dots + A_n) (B_1 \dot{q}_1^2 + \dots + B_n \dot{q}_n^2) + \frac{1}{2} \dot{q}_0^2 \quad (1)$$

y actua un potencial  $U_0$ , que eventualmente puede ser constante. El punto significa derivación respecto al tiempo  $t$ , y los subíndices de  $A$ ,  $B$  y  $U$  significa que solamente son funciones de la coordenada  $q$  del mismo subíndice. La ecuación de Jacobi de (1) es la:

$$\frac{1}{2A_0(A_1+\dots+A_2)} \left( \frac{1}{B_1} \left( \frac{\partial V}{\partial q_1} \right)^2 + \dots + \frac{1}{B_n} \left( \frac{\partial V}{\partial q_n} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial q_0} \right)^2 + U_0 = h \quad (2)$$

que se puede integrar mediante separación de variables, siendo la solución  $V$  (integral completa):

$$V = V_0 + V_1 + \dots + V_n \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{dV_i}{dq_i}; \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

con el mismo significado que anteriormente para los subíndices. De (2) y (3) se sigue que:

$$\left( \frac{1}{2} \left( \frac{dV_0}{dq_0} \right)^2 + U_0 - h \right) A_0 = \alpha_0 \Rightarrow V_0 = \int^q \sqrt{2 \left( \frac{\alpha_0}{A_0} + h - U_0 \right)} dq_0 \quad (4)$$

y además:

$$\frac{1}{2(A_1+\dots+A_n)} \left( \frac{1}{B_1} \left( \frac{dV_1}{dq_1} \right)^2 + \frac{1}{B_n} \left( \frac{dV_n}{dq_n} \right)^2 \right) + \alpha_0 = 0 \quad (5)$$

de las que se sigue que  $\alpha_0 < 0$ . De (3) y (5) se obtiene:

$$\frac{1}{2B_i} \left( \frac{dV_i}{dq_i} \right)^2 + \alpha_0 A_i = \alpha_i \Rightarrow V_i = \int^q \sqrt{2B_i(\alpha_i - \alpha_0 A_i)} dq_i \quad (6)$$

y además:

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0 \quad (7)$$

lo que da la solución de (2). Si sustituimos la  $\alpha_n$  en la última (6) por su valor deducido de (7) se sigue que las:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i; \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (8)$$

de las ecuaciones de las trayectorias y

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t - t_0 = \int^{q_0} \frac{d q_0}{\sqrt{2 (h - U_0 + \alpha_0/A_0)}} \quad (9)$$

la ley horaria del movimiento. Las  $\beta_i$  son constantes arbitrarias.

Si en las anteriores hacemos  $U_0$  constante obtenemos las líneas geodésicas del espacio de Riemann:

$$d s^2 = A_0 (A_1 + \dots + A_n) (B_1 d q_1^2 + \dots + B_n d q_n^2) + d q_0^2 \quad (10)$$

Lo anterior es un caso de integración de la ecuación de Jacobi distinto del de Liouville, es un nuevo teorema, solamente en el caso de dos variables  $q_0$  y  $q_1$  se cae en un caso ya conocido.

Al espacio de Riemann (10) he propuesto llamarle universoide porque el elemento lineal de Robertson-Walker de la Cosmología relativista es de esta forma:

$$d s^2 = c^2 d t^2 - R^2 (t) d \sigma^2 \quad (11)$$

donde  $d \sigma^2$  es el elemento lineal de un espacio de curvatura constante. Las líneas geodésicas de (11) las he obtenido por el método anterior.

En la forma (11) de (2) si hacemos  $U_0 = 0$ , y escogemos la constante  $h$  igual a  $c^2/2$  obtenemos las trayectorias de las partículas materiales y si hacemos  $h = 0$  los rayos luminosos.

Para pasar de (2) a (11) hay que sustituir  $q_0$  por el tiempo ordinario  $t$ , y  $t$  por  $\tau$  (tiempo propio) que es el tiempo que invertiría un móvil dotado de la velocidad de la luz en el vacío  $c$  en recorrer su trayectoria.