La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica

POR J.M. MONTESINOS AMILIBIA*

En esta conferencia me ocuparé de la consistencia relativa de la geometría hiperbólica. Se trata de interpretar ésta como una parte de la euclídea: las palabras no definidas de la axiomática hiperbólica serán traducidas por conceptos euclídeos, de modo que los axiomas hiperbólicos se convertirán en teoremas euclídeos. De ello se deducirá la consistencia de la geometría hiperbólica de la consistencia de la euclídea; es la así llamada consistencia relativa. El recíproco es cierto también, es decir, la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclídea.

Algunos investigadores han apuntado que es un anacronismo poner en boca de Beltrami conceptos como consistencia absoluta o relativa. Pero sus resultados demuestran con absoluta precisión lo que hoy llamamos consistencia relativa de la geometría hiperbólica. Sobre estos temas trataré en esta conferencia.

En ([M_1]) decía que Lobachevski y Bolyai se distinguieron de sus predecesores hiperbólicos en que estaban (psicológicamente) convencidos de la consistencia de la geometría hiperbólica y trataron de demostrarla. También mencioné mi convicción de que Gauss percibió profundamente la dificultad: dejar sin probar que la nueva geometría no conduce a contradicción es no demostrar nada. Así que, fiel a su lema, nada publicó, aunque emprendió la tarea de redacción privada "para que al menos -dice- no pereciese conmigo" ([*G*], pp. 220-224).

En mi opinión, ([M_1], p. 83), la convicción psicológica de Bolyai se apoyaba en que Σ (geometría euclídea) era un caso límite de los S (geometrías hiperbólicas parametrizadas por la curvatura $-k^2$). Según Kárteszi y Szénássy ([*KS*], pp. 228-230), Bolyai comenzó de hecho a investigar el problema de la consistencia aunque no llegó a nada sustancial.

Tanto Lobachevski como Bolyai buscan una confirmación de su geometría en la naturaleza: "Num Σ aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet", dice Bolyai [*B*, §33]: permanece sin decidir si el sistema Σ, o algún S, es el *real*. Superfluo es recordar que ni Bolyai, ni Lobachevski decidieron tal cosa.

---

* Académico Numerario.

En Lobachevski se percibe un concepto de geometría moderno en la siguiente cita de su Pangeometría ([*P*]):

"Como quiera que sea, aun si no está dentro de la naturaleza la nueva geometría, cuya base ya se encuentra presentada aquí, puede, no obstante, existir en nuestra imaginación y, siendo inútil para medidas reales, abre un vasto y nuevo campo para mutuas aplicaciones de la geometría y del análisis".

Lobachevski concibe una geometría en el plano lógico; sin substrato ontológico. Se vislumbran aquí las ideas que florecen a finales de siglo con Pasch y Hilbert. A este respecto dice Babini:

"Pero en este filón inagotable también las vetas finas mostraron su riqueza, pues condujeron a problemas cuyo interés científico trascendió los límites estrictamente matemáticos. Esos problemas condujeron al análisis de los fundamentos de la geometría, concebida ésta como una ciencia deductiva basada sobre un determinado sistema de postulados cuya independencia y compatibilidad debe probarse.

Para esta comprobación de la solidez de los fundamentos de la geometría, fue necesario desplazar el problema y analizar, a su vez, los fundamentos de la aritmética. Y esta cuestión de los fundamentos de la aritmética, vale decir de la matemática, que a su vez roza la de los fundamentos de la lógica, es uno de los problemas que en la actualidad preocupa, y a veces apasiona a los matemáticos de hoy". ([*Ba*], p. 114).

El conocido matemático Hans Freudenthal ha escrito un artículo muy competente [*F*] sobre el modo en que la nueva geometría fue recibida por los matemáticos, y el público en general, del pasado siglo. Él comienza sus reflexiones con Beltrami, pero ya mucho antes "se hizo oir la *gritería de los beocios* que Gauss temía; surgieron los estériles e infecundos ataques a base de denuestos pero carentes de argumentos lógicos; sonaron las acostumbradas acusaciones de inutilidad práctica; etc. ([*B*], p. 143-144). Y así dice Gauss en 1841:

"Estoy haciendo razonables progresos en ruso y esto me proporciona gran gusto. Mr Knorre me envió una pequeña memoria de Lobachevski (en Kazán), escrita en ruso, y esta memoria, así como su opúsculo en alemán sobre líneas paralelas (apareció una nota absurda sobre él en el Repertorium de Gersdorff) ha despertado en mí el deseo de averiguar más acerca de este inteligente matemático". ([*G*], p. 232).

Influido Lobachevski por la absurda y malintencionada crítica que Gauss menciona, publicó un artículo apologético, primero escrito en ruso en 1835, y luego en francés y como tal publicado en el Journal de Crelle en 1837 (pp 295-320), bajo el título sugerente de "Geometría Imaginaria" ([*GI*]). Trata él aquí de "someter -dice- una vez más al juicio de los hombres de ciencia los resultados que he obtenido, verificándolos de una manera nueva" (p. 295). La *manera nueva* es digna de ser explicada aquí como paradigma del siglo del romanticismo.

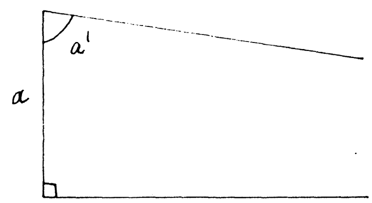
Ya sabemos (ver, por ejemplo, [M_1], p. 105) que si a' denota el ángulo de paralelismo a distancia a se tiene

$$sen\ a' = \frac{1}{\cosh a} = \frac{2e^{a}}{e^{2a}+1}$$

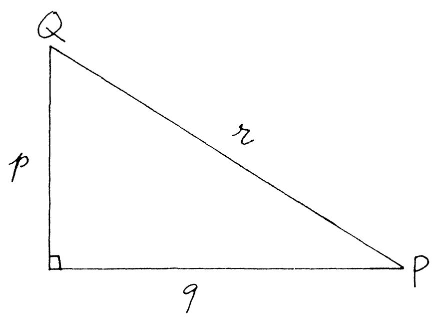
$$cos\ a' = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}$$

$$cot\ \frac{1}{2}\ a' = e^{a}$$

El ángulo $a' \geq 0$, $\leq \pi/2$ se asigna pues a todo número positivo a



Usando estas fórmulas puede Lobachevski (ver, por ejemplo [M_1], p. 104) obtener las fórmulas de trigonometría de un triángulo rectángulo:



en la forma

$$\begin{aligned} sen\ r' &= sen\ p'\ sen\ q' \\ sen\ r' &= tang\ P\ tang\ Q \\ cos\ q' &= cos\ r'\ cos\ P \qquad \text{, etc. ...} \end{aligned}$$

Sentado pues esto, Lobachevski comienza su trabajo "en rebroussant pour ainsi dire chemin et en partant d'abord des équations fondamentales" (p. 295). Y fiel a su plan escribe:

"Soit e la base des logarithmes naturels, π le rapport de la circonfèrence du cercle à son diamètre. Désignons par a un nombre quelconque positif et qui représente en même tems la longueur d'une ligne droite; a' un angle $\geq 0, \leq 1/2\ \pi$ qui en dépend et dont la valeur peut être calculée au moyen d'une de ce trois équations identiques

$$sin\ a' = \frac{2e^{a}}{e^{2a}+1}, \quad cos\ a' = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}, \quad cot\ \frac{1}{2}\ a' = e^{a}.$$

Nous continerons de même à accentuer une lettre pour désigner un angle qui en dépend de la même manière que a' dérive de a.

Soient à présent p, q deux côtés d'un triangle rectiligne rectangle; P, Q les deux angles opposés, r l'hypothénuse. J'ai démontré qu'en supposant $P + Q < \frac{1}{2}\pi$, on a

$$\begin{aligned} &1.\ \sin r' &&= \sin p'\ \sin q', \\ &2.\ \sin r' &&= \operatorname{tang} P\ \operatorname{tang} Q, \\ &3.\ \operatorname{tang} r' &&= \operatorname{tang} p'\ \sin P. \text{"} \end{aligned}$$

Procede después a obtener el valor de ciertas integrales *modo geometrico*. Al obtener resultados correctos cree haber "mettre hors de doute qui'ils (las ecuaciones trigonométricas anteriores) puissent jamais mener à une absurdité, sour quelque rapport que soit" (p. 295, ver también [A]).

Curiosamente en esto estriba la convicción de Lobachevski de que su geometría es consistente. Por otro lado, si Lobachevski creyó que su trabajo iba a ser entendido mejor, tras utilizar tan peregrino expediente, estaba muy equivocado. Sin embargo creo que logró su propósito de que "les savants" le tomaran en serio; la lectura completa de "Géometrie imaginaire" y de [A] es una tarea formidable que da idea del poder de Lobachevski. Y así he encontrado la siguiente reacción de Cayley de 1865 en "Nota sobre la geometría imaginaria de Lobachevski" ([Cay_1]): "which equations (if only we write therein $\frac{1}{2}\pi - a'$, $\frac{1}{2}\pi - b'$, $\frac{1}{2}\pi - c'$ in place of a', b', c' respectively) are in fact the equations given under a less symmetrical form in the curious paper "Géométrie Imaginaire" by N. Lobatschewsky. Rector of the University of Kasan, *Crelle*, vol. XVII. (1837), pp. 295-320. The view taken of them by the author is hard to be understood. He mentions that in a paper published five years previously in a scientific journal at Kasan, after developing a new theory of parallels, he had endeavoured to prove that it is only experience which obliges us to assume that in a rectilinear triangle the sum of the angles is equal to two right angles, and that a geometry may exist, if not in nature at least in analysis, on the hypothesis that the sum of the angles is less than two right angles; and he accordingly attempts to establish such a geometry, viz. a, b, c being the sides of a rectilinear triangle, wherein the sum of the angles $A+B+C$ is $< \pi$, and the angles a', b', c' being calculated from the sides by the formulae

$$\cos a' = \frac{1}{\cos ai}, \quad \cos b' = \frac{1}{\cos bi}, \quad \cos c' = \frac{1}{\cos ci}$$

(I have, as mentioned above, replaced Lobatschewsky's a', b', c' by their complements): the relation between the angles A, B, C and the subsidiary quantities a', b', c' which replace the sides, is given by the formulae

$$\frac{1}{\cos a'} = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\frac{1}{\cos b'} = \frac{\cos B + \cos C \cos A}{\sin C \sin A},$$

$$\frac{1}{\cos c'} = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

I do not understand this; but it would be very interesting to find a *real* geometrical interpretation of the last-mentioned system of equations, which (if only A, B, C are positive real quantities such that $A+B+C < \pi$; for the condition, A, B, C each $< \frac{1}{2}\pi$, may be omitted) contains only the real quantities A, B, C, a', b', c'; and is a system correlative to the equations of ordinary Spherical Trigonometry".

Es extraordinario leer estas palabras que constituyen según creo, la primera reacción pública a la nueva geometría. Cayley con buena dosis de pragmatismo pide una interpretación *real* de las ecuaciones. Lejos estaba él de imaginar que esa interpretación *real* estaba ya hecha *por él mismo* (¡!) en su "Sixth memoir upon quantics" ([*Cay* 2]) de 1859 como más tarde reveló Klein en "la así llamada geometría no euclídea" ([K]): ironías del destino.

Dos años después del escrito rebosante de perplejidad de Cayley escribe José Battaglini "Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky" ([Bat]) en Giornale di Matematica, Napoli 5 (1867) pp. 217-231. Al igual que el escrito de Cayley, éste de Battaglini nos reserva una insospechada sorpresa, que nunca he visto comentada por ningún autor, y así es doblemente interesante.

Cuando Battaglini escribe su artículo (1867) conoce ya la "Géométrie imaginaire" y la Pangeometría, ambas de Lobachevski. Esta última obra, traducida por él mismo y publicada en el Giornale di Matematica, (dirigido por él) en 1867. También conoce el opúsculo "Geometrische Untersuchungen zur Théorie der Parallellinien", en su traducción francesa de 1866 por J. Hoüel: "Ètudes Géométriques sur la Théorie des Paralléles", al que se refiere Battaglini en sus primeras palabras de introducción:

"La pubblicazione recente della traduzione francese di un opuscolo di *N.I. Lobatschewsky*, ha richiamato l'attenzione dei Geometri sul sistema di Geometria, che con nome di *Geometria immaginaria* fu fondato da Lobatschewsky sopra una teoria delle parallele diversa dalla ordinaria teoria *euclidiana* ".

El fin que se propone Battaglini es el de "*stabilire direttamente il principio che serve di base alla nuova teoria delle parallele, e quindi di pervenire, in modo diverso da Lobatschewsky, alle formole che esprimono le relazioni tra le parti di un triangolo nel sistema della Geometria imaginaria". (p. 217).*

Él mismo nos aclara cuál es este principio: "si ha cosi il concetto fondamentale della teoria delle paralleli di Lobatschewsky, cioè che *da un punto p si possono tirare due rette parallele ad una retta L, o sia due rette che incontrano L a distanza infinita.*" (p. 221). Es decir la situación ilustrada por el dibujo de Lobachevski (fig. 1).

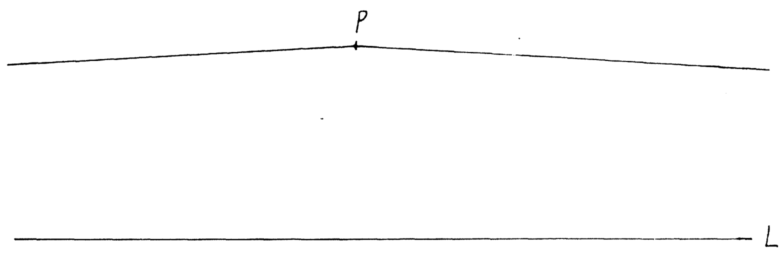


Figura 1.

La clave para entender a Battaglini en todo este artículo es que él piensa en geometría proyectiva, y que tiene en su mente -claramente configurado- el modelo proyectivo de la geometría hiperbólica. Afirmo por tanto que Battaglini se adelantó seis años a Klein en la parte más sustancial del modelo proyectivo. Pero veamos esto por nosotros mismos.

Página 222 : "Las dos paralelas trazadas desde el punto *p* a la recta *L* (y que la encuentran a distancia *infinita*) marcan la transición de las rectas que, trazadas por *p*, encuentran a *L* en puntos a distancia *finita* de aquellas que encuentran a *L* en puntos a distancia *ideal*. Los puntos ideales de encuentro de la recta Ω con la recta *L* los miraremos como *puntos de la recta más allá del infinito*".

Ilustramos nosotros esto en la figura 2.

Más tarde dice:

Página 222 : "Se sigue que todo punto de encuentro ideal de dos rectas puede considerarse como punto de encuentro ideal de dos rectas cada una de ellas, perpendicular a una misma recta; el punto ideal se llamará el *polo* de ésta".

Página 229 : "Si el sistema de las rectas trazadas desde un punto p a los diversos puntos de una recta *L* se hace girar junto con *L* en torno a la perpendicular *O* bajada desde *p* a *L*; la recta *L*, girando en torno al pie o de la perpendicular, describirá un plano *P* perpendicular a *O* y se verá inmediatamente por lo dicho cuáles sean las rectas trazadas desde *p* que encuentran *P* a distancia finita, infinita ó ideal; todas las rectas que encuentran a *P* en un punto ideal son perpendiculares a un mismo plano, del cual el punto es el *polo*".

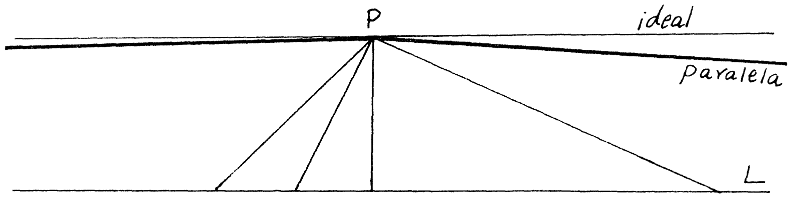


Figura 2.

Ilustramos esto en la figura 3.

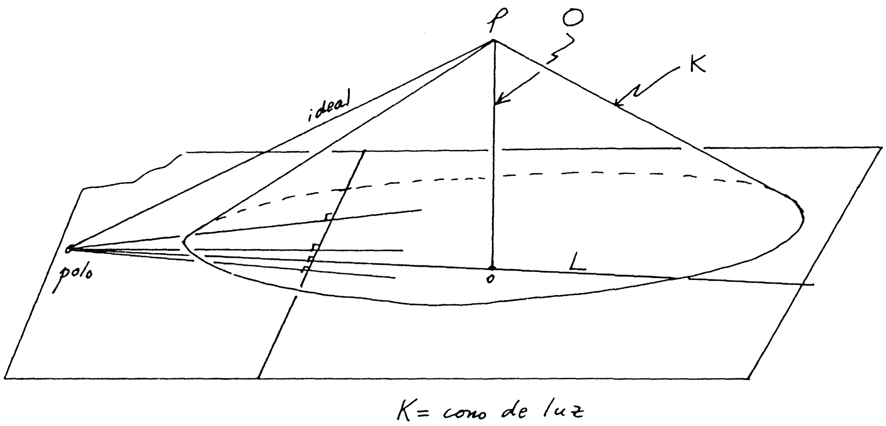


Figura 3.

Y sigue, mostrándonos hasta qué punto está en posesión del modelo proyectivo del plano hiperbólico:

Página 229 : "En el sistema de la Geometría *no-euclidiana* el plano es una superficie indefinida, siendo sus puntos del infinito todos *distintos* entre sí y perteneciendo a una *circunferencia de círculo*, que tiene por centro un punto *cualquiera* del plano y radio infinito; análogamente para el espacio, los puntos del infinito son todos *distintos* entre sí y pertenecen a una *superficie esférica* que tiene por centro un punto *cualquiera* y radio infinito.

Al contrario del sistema de la Geometría *euclidiana*, el plano es una superficie indefinida y *entrante en sí misma*, teniendo sus puntos del infinito coincidentes a pares con los puntos de una *línea recta*, de modo análogo el espacio es un continuo indefinido y *entrante en sí mismo*, poseyendo sus puntos del infinito coincidentes a pares en puntos de un *plano*".

Es diáfano lo que aquí nos dice Battaglini. Pensando proyectivamente, las rectas que pasan por p forman un plano proyectivo (el plano "entrante en sí mismo" de Battaglini). Aquellas que cortan a L forman el interior de un cono (círculo del plano proyectivo) que hemos llamado K en figura 33. Los puntos del infinito corresponden a las rectas sobre K: un círculo del plano proyectivo.

Se prueba de modo elemental ([M 2]) que la colección de rectas de P ortogonales a L, miradas desde p, forman un haz de eje una recta que pasa por p y es ideal; esta recta es el polo de L con respecto al círculo K. Este "polo" es justamente lo que Battaglini llama polo de la recta L en la cita segunda de p. 229.

Desde este punto de vista la relación entre la geometría hiperbólica y la euclídea viene dada como un límite: cuando el cono K se abre tanto que es un plano paralelo al P, estamos en la geometría euclídea:

Página 223 : "Las dos teorías de las paralelas, de Lobachevski y de Euclides, corresponden a dos conceptos diversos que podamos formarnos de la línea recta, relativamente a sus puntos del infinito. Según Lobachevski, la línea recta, a partir de cualquiera de sus puntos 0, se distiende al infinito de una y otra parte de 0, pero sus dos puntos del infinito son *distintos entre sí*, de modo que no se podrá pasar de uno al otro lado de 0, manteniéndonos en el *campo finito* de la recta, si no es cruzando (de valores positivos a negativos de la distancia z de un punto p de la recta a 0, pasando por cero) ó también atravesando *un campo ideal de la recta más allá del infinito* (pasando z por valores imaginarios). Según Euclides, al contrario, la línea recta distendiéndose también al infinito a ambos lados de 0, los dos puntos del infinito de partes opuestas a 0 son entre sí *coincidentes*, vale decir que la línea recta es una *línea indefinida que entra en sí misma*, y se pasará de un lado a otro de 0, pasando por 0 ó por el punto del infinito (de valores positivos a negativos de z pasando por 0 ó por ∞)".

El *modelo proyectivo* de la geometría hiperbólica es pues la colección de puntos interiores a un círculo (ó esfera para el espacio). Las rectas ortogonales a una dada (cuerda del círculo) son aquellas que pasan por el polo de la cuerda. Se deduce que las "isometrías" son colineaciones que preservan el círculo.

Desde el punto de vista de Klein, tenemos aquí un conjunto y un grupo de transformaciones: una geometría. Falta la distancia con respecto a la cual las anteriores colineaciones son isometrías, pero eso será la aportación de Klein, utilizando las ideas de Cayley.

Podemos en conclusión aceptar que Battaglini estuvo en posesión del *modelo proyectivo* de la geometría hiperbólica, pero no lo desarrolló a la perfección. Puede considerarse un "precursor" de Beltrami y de Klein.

Me ha parecido justo poner de relieve esta aportación de Battaglini al tema que nos ocupa no sólo por ser la primera de este género, sino porque la misma idea fue redescubierta años después por W. Thurston. Recuerdo muy bien la impresión que me produjo la afirmación de Thurston en una conferencia, allá por el año 1976: "el modelo proyectivo es el más *real* porque es el que vemos cuando, nosotros -habitantes del espacio hiperbólico- miramos un plano que está fuera de nosotros". He escrito con detalle en [*M* 2] la base y desarrollo de estas ideas que entonces pensaba eran de Thurston, pero que con gran sorpresa averigüé habían sido precedidas por el gran Battaglini en más de cien años.

Battaglini publica estas notables investigaciones en su revista "Giornale di Matematica" en el año 1867, volumen 5. Pues bien, el volumen 6 del 1868 va a ver la consolidación magistral de estas ideas de la mano del impresionante geómetra italiano Enrique Beltrami. Digo esto porque ya no me cabe duda de la influencia de Battaglini sobre Beltrami. Este leyó a Battaglini ([*Be* 1] p, 295, 304, y especialmente la p. 300), y armado con su profundo conocimiento de geometría diferencial va a sacar -como dice Milnor [M_i] a la geometría hiperbólica del "limbo", donde se encontraba, "divorciada del resto de las matemáticas y sin una fundamentación firme".

En su celebrado "Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea" ([*Be* 1]) Beltrami se propone "dar razón de los resultados a los que conduce la doctrina de Lobachevski; y (...) encontrar un substrato real a esa doctrina, antes de admitir para ella la necesidad de un nuevo orden de entes o conceptos". ([*Be* 1]), p. 284

Beltrami parte de su profunda observación de que la tesis de un teorema es válida para toda "categoría de entes" que satisfaga las hipótesis: "Hemos comenzado notando que las consecuencias de una demostración abrazan necesariamente la entera categoría de entes en la cual se dan todas las condiciones necesarias para la legitimidad de aquella. Si la demostración fue concebida para una determinada categoría de entes, sin que en aquella hayan sido usadas las determinaciones que individúan la tal categoría de entes dentro de una categoría más amplia, es claro que las consecuencias de la demostración adquirirán una generalidad mayor que la que se buscaba" ([*Be* 1], p. 286).

Aplica Beltrami este principio, elemental pero profundo, a los teoremas de geometría plana basados en los postulados de la geometría no euclídea, y busca una "categoría de entes" real (como dijo en la primera cita (p. 284)) y no nueva, que satisfaga tales postulados. Para tal categoría valdrán los teoremas no euclídeos. "Consideramos -dice en p. 286- aquellas demostraciones de planimetría que se fundan únicamente en el uso del principio de superposición y en el postulado de la recta, como son justamente las de la planimetría no euclídea".

Sabe que la categoría de entes en cuestión es la de superficies de curvatura constante. Suprimiendo el caso de curvatura constante positiva para el cual las geodésicas son finitas dice en p. 287: "Si se puede probar que tales excepciones no son posibles, resulta evidente *a priori* que los teoremas de la planimetría no euclídea subsisten incondicionalmente para todas las superficies de curvatura constante negativa".

Claramente Beltrami considera los postulados y palabras no definidas como "variables" que pueden rellenarse de varias posibles maneras: varias superficies de curvatura constante negativa por ejemplo, y trata -y lo logra- de buscar un modelo que rellene el "impreso": quiere, y demuestra, que existe un modelo, tal vez no en el preciso sentido teórico de la lógica actual pero sí en el que entendemos todos los matemáticos "ofreciendo el desarrollo de un caso en el cual la geometría abstracta halla verificación en la concreta" ([*Be* 1] p. 306).

Puede decirse que el hallazgo de Beltrami se debe, además de a su genio, a una conjunción de afortunadas circunstancias, como frecuentemente pasa a todos los que se dedican a la investigación científica. Beltrami, en efecto, había escrito recientemente "Risoluzione del problema di riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette" [*Be* 3]. La resolución de este problema le conduce a considerar la forma cuadrática "abstracta"

$$ds^2 = R\,\frac{(a^2+v^2)\,du^2-2uv\,du\,dv+(a^2+u^2)\,dv^2}{a^2+u^2+v^2}$$

en el plano de coordenadas "rectangulares" u, v, *antes* de "reconocer la naturaleza de la superficie contenida en esta forma" ([*Be* 1] p. 307). Para "reconocerla" calcula la curvatura de Gauss que resulta ser $\frac{1}{R^2}$, de "donde se concluye que la superficie en cuestión tiene curvatura constante". De aquí al concepto abstracto de variedad riemanniana *de dimensión dos* no hay sino un paso; que Beltrami da valientemente; adelantándose a Riemann. Curiosamente, y da idea de la dificultad de estos nuevos conceptos, Beltrami fue incapaz de concebir la geometría riemanniana de dimensión tres. Sólo cuando leyó la memoria de Riemann se le cayeron las escamas de los ojos y pudo explicar la geometría hiperbólica tridimensional sobre la que había dicho en el Saggio (p. 284) "Creemos haber alcanzado nuestro intento para la parte planimétrica de estas doctrinas (*de Lobachevski*), pero creemos que es imposible alcanzarlo en cuanto al resto" (*la parte tridimensional*; ver también la p. 306).

Cuando en la anterior forma cuadrática pone $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$ en vez de R y a "el elemento de longitud corresponde -dice- a una superficie de curvatura constante negativa $-\frac{1}{R^2}$, cuyas geodésicas no dejan de ser representadas en el plano mediante líneas rectas, y por tanto mediante ecuaciones lineales entre u y v " (p. 308). La fórmula anterior se escribe

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2 - u^2)\, dv^2}{(a^2 - u^2 - v^2)}$$

"y los valores admisibles para las variables u, v están limitados por la relación

$$u^2 + v^2 \leq a^2$$

Dentro de estos límites las funciones E, F, G son reales, monódromas, continuas finitas y las E , G, $EG - F^2$son además positivas y diferentes de cero", es decir la región $u^2 + v^2 \leq a^2$ es una 2-variedad riemanniana y esta región "se extiende indefinidamente y continuamente en todo sentido y abraza la totalidad de los puntos reales de la superficie. En tal guisa, dentro del círculo límite ($u^2 + v^2 = a^2$) viene a representarse toda la región real de nuestra superficie, y precisamente de modo que mientras el dicho círculo límite corresponde a la línea de sus puntos del infinito, los círculos concéntricos e internos al mismo corresponden a los círculos geodésicos de la superficie con centro en el punto ($u = v = 0$)". (p. 289).

Se ve que ha leído las palabras de Battaglini que citamos más arriba.

Y sigue: "las geodésicas de la superficie son representadas, en su total desarrollo (real), mediante las cuerdas del círculo límite, mientras que las prolongaciones de estas cuerdas fuera del dicho círculo carecen de representación (real) ninguna" y que "dos puntos reales de la superficie, *elegidos de modo cualquiera*, individúan siempre *una sola y determinada línea geodésica*", de modo que no se tienen las excepciones de la geometría esférica y así a las superficies de curvatura constante negativa "son aplicables los teoremas de la planimetría no euclídea. Y así, esos teoremas no son en gran parte susceptibles de interpretación si no vienen referidos precisamente a esas superficies".

Una fuente constante de confusión en la literatura lo proporciona el término *pseudoesfera* con el que hoy nos referimos a la tractriz girada. Beltrani usa el término *superficie pseudoesférica* para referirse *casi exclusivamente* a la superficie de curvatura constante negativa confinada dentro del círculo $u^2 + v^2 = a^2$ (compárese [Mi] p. 11). Dice así en p. 290: "Para evitar circunlocuciones nos permitiremos denominar *pseudo-esféricas* a las superficies de curvatura constante negativa y de conservar el nombre de *radio* a la constante R de la cual depende el valor de su curvatura". Pero está hablando en el contexto de las superficies confinadas en $u^2 + v^2 \leq a^2$y determinadas por los parámetros a y R. Para más abundamiento veamos cómo se refiere Beltrami a lo que hoy llamamos "pseudoesfera". Dice que para ella "la curva meridiana es la conocida *línea de tangentes constantes*", y la superficie generada (por rotación) es aquella que se suele mirar como tipo de las superficies de curvatura constante negativa". Pero nunca se refiere a ella como la pseudoesfera.

De hecho en su memoria [Be_2] propone llamar "pseudoesférica" a la geometría no euclídea y así lo hace, por ejemplo, en su nota "Teorema di geometria pseudoesférica" (Gior. di mat. 10 (1872) 53) donde habla de "la geometría psudoesférica o no-euclídea". (Véase sobre todo su memoria "Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudo-sferiche" Gior. di mat. 10 (1872) 147-159.)

Aclarada esta confusión, que ha llevado a algunos a minimizar mucho su obra, contemplemos la siguiente figura 4 que aparece en la página 291 de su Saggio.

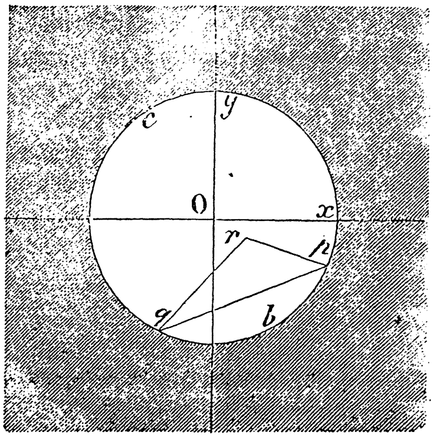


Figura 4.

Se ven en ella las dos paralelas *rq*, *rp* a la recta *pq*. A partir de aquí demuestra rigurosamente que la pseudoesfera es un modelo de la geometría hiperbólica. No entraré en ello por ser para nosotros evidente.

Parte muy interesante de su Saggio es la que dedica a modelar *trozos* de la pseudoesfera mediante superficies de curvatura constante negativa contenidas en R^3. Así obtiene el elemento de longitud en polares bajo la siguiente forma

$$ds^2 = d\rho^2 + (R \, sen\, h \frac{\rho}{R})^2 \, d\varphi^2$$

ya conocida de Lobachevski, y que -aventuramos- iluminó de modo contundente a Beltrami, no menos que las otras formas del elemento

$$ds^2 = d\xi^2 + \cos h^2 \frac{\xi}{R} \, d\eta^2$$

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{-2\frac{\rho}{R}} d\sigma^2$$

mencionadas por Beltrami (p. 301, 303) y publicadas por Lobachevski.

Beltrami reconoce en esas formas del elemento las de las superficies de rotación de curvatura constante negativa y así, mediante la primera, dice que "merece la pena observar que en el caso actual no se podría aplicar efectivamente sobre una superficie de rotación el casquete pseudoesférico circunstante al punto ($u = v = o$), sin alterar la continuidad por medio de un corte" (ver figura 5).

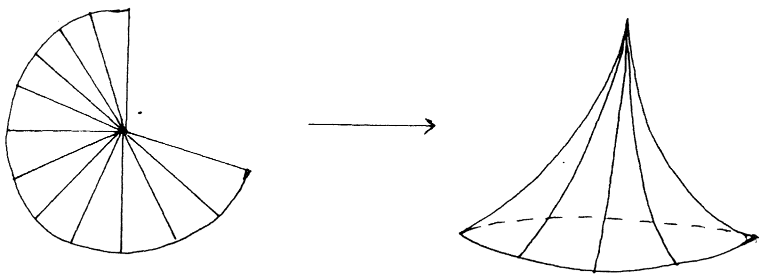


Figura 5.

El segundo elemento de longitud le permite demostrar que la porción comprendida entre dos equidistantes a ambos lados y a la misma distancia de una geodésica es un recubrimiento cíclico infinito de otras superficies de curvatura constante negativa.

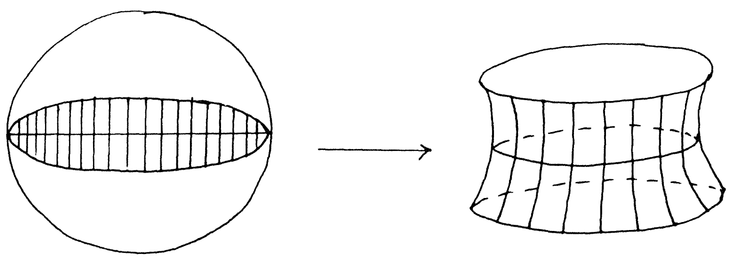


Figura 6.

La tercera fórmula permite recubrir a la tractriz girada mediante un horodisco (fig. 7).

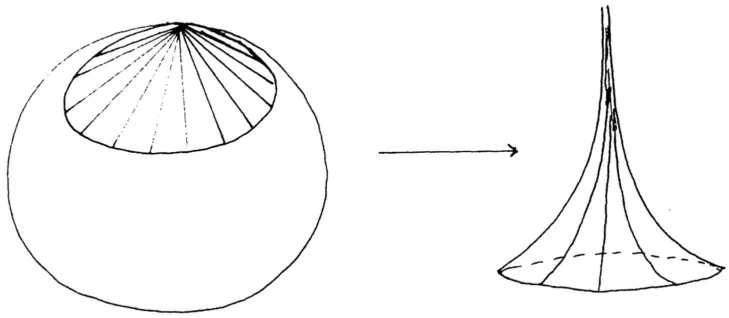


Figura 7

En las páginas 299-300 de su Saggio. Beltrami estudia las trayectorias ortogonales a un haz de cuerdas concurrentes a distancia finita (circunferencias), o a distancia ideal (equidistantes de una cuerda). Prueba Beltrami que las cuerdas ortogonales a otra cuerda convergen en el polo de ésta (que es un punto ideal), y dice "esta última propiedad ha sido apuntada por el Sr. Battaglini con lenguaje diferente" ([Bat], p. 228). Vemos pues aquí de modo evidente la infuencia de Battaglini sobre Beltrami. Más precisamente, aventuro la siguiente génesis del descubrimiento de Beltrami. Debió, primero, de leer la traducción de la Pangeometría, hecha por Battaglini, en el Giornale di matematica de 1867. Observaría entonces que los elementos ds^2 dados por Lobachevski en cartesianas, polares y horocíclicas coincidían con los, para él bien conocidos, elementos de las superficies de curvatura constante de rotación. Ahora intervendrían dos cosas. Primeramente su reciente investigación de las representaciones de superficies de curvatura constante en el plano que mandan geodésicas a rectas. Él sabía que el dominio del plano en que tales representaciones eran válidas era un disco sin su borde. La segunda cosa que intervendría aquí debió de ser su lectura de Battaglini, en donde éste habla del "círculo del infinito" y del punto ideal como un polo. El resto vino solo.

El efecto de esta importante obra de Beltrami no tardó en notarse. Ya el 30 de diciembre de 1869, año siguiente de la aparición del Saggio, dice Hoüel [H]: "No dudamos de que la aparición próxima de la traducción de la Memoria del Sr. Beltrami en una revista francesa conseguirá que todo el mundo adopte estas ideas tan sencillas y tan conformes con la analogía y la experiencia. Puede que, entonces, la Academia de Ciencias se decida resueltamente a relegar las demostraciones del *postulado* para la geometría plana a los estantes en donde duermen los proyectos del movimiento perpetuo". Añade a continuación que el problema sigue aún abierto para la dimensión tres; y ya hemos dicho antes cómo Beltrami estaba de algún modo convencido de que para esta dimensión era imposible una solución análoga a la dada por él para el plano.

Sin embargo, ya en Agosto de 1868 cierra Beltrami el problema para todas las dimensiones, en su memoria "Teoría fundamentale degli spazii di curvatura costante" [*Be* 2]. Como él mismo dice, la lectura del trabajo póstumo de Riemann "Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" ([Ri]) fue el detonante que necesitaba para entender el problema en toda su extensión. Se ve que Beltrami ha comprendido las ideas de Riemann profundamente. Esto no nos extraña nada pues el "Saggio" participa claramente de estas ideas. Armado pues Beltrami con el concepto de variedad Riemanniana n-dimensional (y esto es realmente lo importante) generaliza sus resultados del Saggio a la dimensión n con impresionante maestría del modo que ahora procedemos a describir (ver [Mi], p. 11).

Ante todo, Beltrami ha roto con su necesidad psicológica de visualizar, mediante el análogo a una superficie de curvatura constante, el espacio hiperbólico (véase [*Be* 2], p. 253) y parte del concepto, perfectamente asimilado de variedad riemanniana. La introducción de una nueva variable x, le permite escribir la forma cuadrática que define el elemento de longitud de su Saggio.

$$(1) \qquad ds^2 = R^2 \frac{(a^2-v^2)du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2-u^2)\, dv^2}{(a^2-u^2-v^2)}$$

en la forma nueva

donde x, u, v están ligadas por la expresión

$$x^2+u^2+v^2 = a^2$$

Geométricamente (2) está definida sobre el casquete de esfera de ecuación

$$x = +\sqrt{a^2-u^2-v^2}$$

en el espacio tridimensional de coordenadas x, u, v. (Ver [*Be* 3], p. 276; y figura 8.)

Dispone así de un nuevo modelo del plano hiperbólico (modelo del *hemisferio*; compárese [Mi]) que, proyectado paralelamente al eje x, se aplica sobre el modelo del disco en el plano u, v considerado en su Saggio. Este modelo del hemisferio, además de facilitar las expresiones analíticas de ds^2 tiene un importante significado cuando posteriormente (p. 214 de [*Be* 2]) Beltrami haga notar que (2), sin ninguna ligadura entre x, u, y v, es el elemento de longitud del espacio hiperbólico representado como el semiespacio $\{(x,u,v) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x > 0\}$, y donde el hemisferio $x= + \sqrt{a^2 - a^2 - v^2}$ no es sino un plano hiperbólico dentro del espacio hiperbólico.

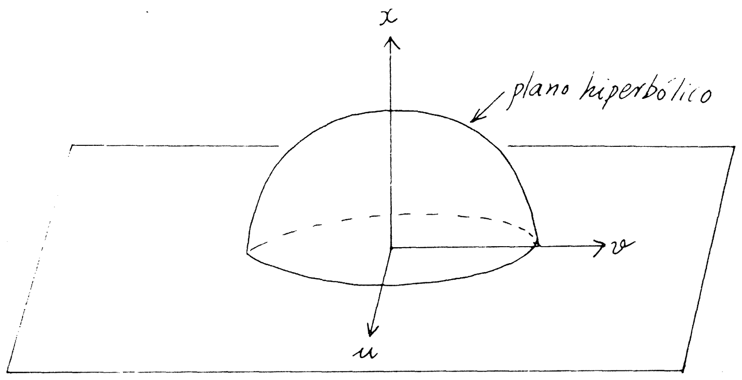


Figura 8.

Es este modelo (o par de modelos simultáneos: el del disco $\{(u, v) \mid u^2+v^2< a^2\}$ y el del hemisferio) el que Beltrami generaliza a dimensión arbitraria del modo obvio. Observa que las geodésicas del hemisferio son los semicírculos que se proyectan sobre las cuerdas del *disco base*. Nosotros añadiríamos aquí que el ángulo hiperbólico entre dos cuerdas coincide con el euclídeo formado por los correspondientes semicírculos del hemisferio (i.e. la métrica del hemisferio es *conforme*). También se ve fácilmente que las equidistantes de un semicírculo son los semicírculos del hemisferio que comparten con aquél sus extremos (figura 9).

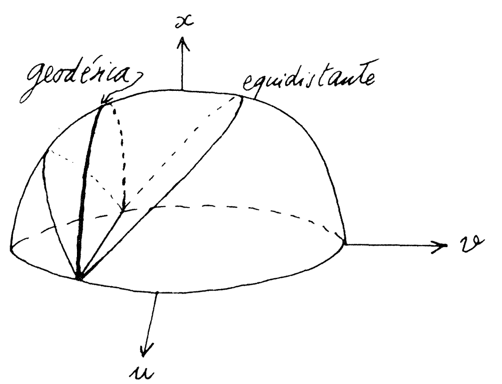


Figura 9.

La proyección paralela a x de estas equidistantes forman el haz de cónicas bitangentes al disco base en torno a la cuerda (figura 10).

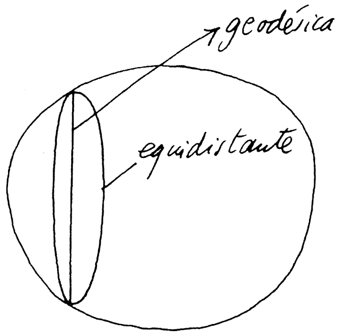


Figura 10.

Beltrami halla las isometrías del modelo del hemisferio y del disco y prueba que son las homografías que lo preservan. Tenemos aquí ya el modelo proyectivo casi perfecto. Falta la adición de Klein [K], basada en el trabajo de Cayley [*Cas* 2] (ver Milnor [*M*] p. 11-12), de una expresión proyectiva de la métrica del modelo.

Trata Beltrami después de obtener mediante un cambio de coordenadas la métrica que Riemann da, sin demostración, en [*R*] como ejemplo de métrica de curvatura constante α (ver [Mi] p. 10):

$$ds = \frac{\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}$$

lo consigue ([*Be* 2] p. 212) proyectando estereográficamente el hemisferio dsde el polo sur (00 ... -1) sobre el plano x=0. Obtiene la métrica

$$ds = \frac{\sqrt{d\,\xi_1^2 + \ldots + d\,\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{4R^2}}$$

del modelo conforme del disco (modelo que hoy se suele llamar "del disco de Poincaré").

Mediante inversión en un punto del borde de este disco conforme (ver [Mi] p. 11, [*Be* 2], p. 244) lleva este modelo al del *semiespacio* ya considerado por Liouville en dimensión dos, de métrica

$$ds = R\,\frac{\sqrt{d\,\eta^2 + d\,\eta_1^2 + \ldots + d\,\eta_{n-1}^2}}{\eta}$$

y hace notar, como hemos dicho más arriba, que esto es la fórmula (2) sin restricción de ninguna clase.

Este modelo fue estudiado posteriormente por Poincaré [P_1], [P_2] y mostró, como dice [*Mi*], p. 12, que los grupos de isometrías preservando orientación son *PSL* (2, **R**) y *PSL* (2, **C**) en dimensiones 2 y 3 respectivamente.

Poincaré fue más allá y apuntó la importancia de los subgrupos discretos de *PSL* (2, **R**) y *PSL* (2, **C**), tema que fue y es intensamente investigado, dejando a la geometría hiperbólica en el estado que hoy la conocemos, como un instrumento enormemente relevante en las investigaciones actuales de las variedades tridimensionales (ver [Mi_3].

Para acabar esta conferencia faltaría por referirnos a las llamadas "coordenadas de Weierstrass". Escribiendo el modelo proyectivo del disco de Beltrami

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2$$

en coordenadas homogéneas

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 t^2$$

la idea es normalizar las coordenadas de otra manera representando el punto $(x_1 : x_2 : t)$ mediante la intersección de la recta $\lambda(x_1, x_2, t)$ con una hoja del hiperboloide $x_1^2 + x_2^2 - a^2 t^2 = -1$. Entonces los puntos de H^2 están parametrizados por

$$\begin{aligned} x_1 &= senh\ u \cos v \\ x_2 &= senh\ u\ sen\ v \\ t &= \cosh u \end{aligned}$$

donde u, v son coordenadas polares de un punto P de H^2 es decir, donde u es la distancia hiperbólica del punto P al centro O del disco y v el ángulo que OP forma con una semirecta fija (Fig. 11). Las coordenadas x_1, x_2,t son las llamadas "coordenadas de Weierstrass". La importancia de estas coordenadas es que permiten pensar en H^2 como una hoja del hiperboloide

$$x_1^2 + x_2^2 - a^2 t^2 = -1$$

con la métrica riemanniana inducida por la métrica semi-riemanniana.

$$ds^2 = d\,x_1^2 + d\,x_2^2 - a^2 dt^2$$

del espacio ambiente tridimensional (espacio-tiempo de Minkowski).

Y, finalizando ya, podemos decir, en resumen, que la brillante escuela de geometría diferencial que floreció en Italia a finales del pasado siglo tuvo el gran honor de concluir las investigaciones que, empezando en Euclides, tuvieron en jaque a todos los grandes geómetras de los siglos pasados.

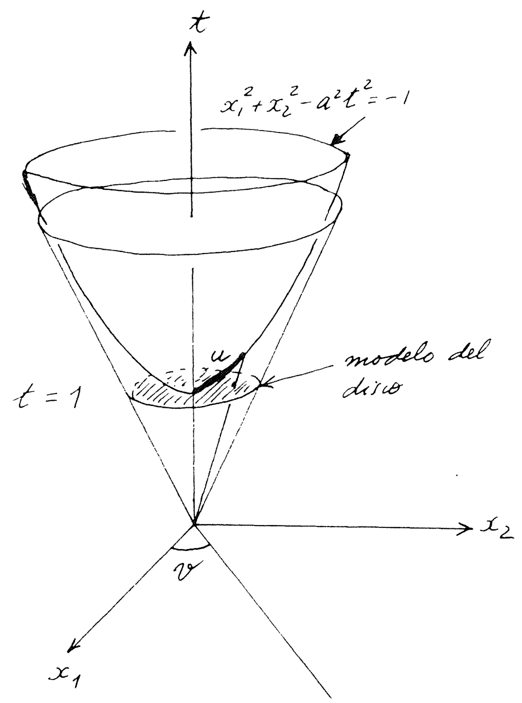


Figura 11.

Bibliografía

[M_1] J.M. MONTESINOS: *"Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai"*, en "Historia de la Matemática en el siglo XIX". Real Academia de Ciencias, pp. 65-114. Madrid, 1992.

[M_2] J.M. MONTESINOS: *"El modelo proyectivo de la geometría hiperbólica"*.

[G] C.F. GAUSS, *Obras completas*. Teubner, Leipzig (1900).

[B] F. KÁRTESZI y SZÉNÁASSY: *"Janos Bolyai, Appendix the theory of space"* Akadémiai Jiadó, Budapest 1987.

[*B* J. BOLYAI: Apéndice (ver [KS].

[*P*] N. LOBACHEVSKI: *Pangeometria* . Kazan (1855) (traducción italiana de 1874, Napoli, librería de B. Pellerano, 2ª edición; la 1ª edición en Giorn. mat. Napoli **5** (1867) pp. 273-320.

[*Ba*] J. BABINI: *"Origen y Naturaleza de la Ciencia"*. Argentina.

[*F*] H. FREUDENTHAL: *"The main trends in the foundations of geometry in the 19th century"* en Logic, methodology and the philosophy of science, Nagel, Suppes and Tarski, editores Stanford, Cal. 1962.

[*GI*] N.I. LOBACHEVSKI: *"Géometrie imaginaire"*. J. Reine Angew. Math. **17** 295-320 (1837).

[*A*] N.I. LOBACHEVSKI: *"Geometría imaginaria y sus aplicaciones al cálculo de algunas integrales"*, Kazan (traducción alemana: Abh. Gesch. Math. **19** (1904).

[*Cay* 1] A. CAYLEY: *"Note on Lobatschewsky's imaginary geometry"*. Phil. Mag. **29**, 231-233 (1865).

[*Cay* 2] A. CAYLEY: *"Sixth memoir upon quantics"*. Phil. Trans. (149), 61-69 (1859).

[*K*] F. KLEIN: *"Über die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie"*. Math. Annalen **4** (1873) 573-625.

[*Bat*] J. BATTAGLINI: *"Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky"* Giorn. di Mat. Napoli **5**, 217-231 (1867).

[*Be* 1] E. BELTRAMI: *"Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea"* Gior. Mat. **6**, 248-312 (1868).

[*Be* 2] E. BELTRAMI: *"Teoria fondamentale degli spazii di curvatura constante"*. Annali di mat. ser. II **2**, 232-255 (1868).

[*Be* 3] E. BELTRAMI: *"Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un plano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette"*. Annali di Mat. pura e applicata serie I, **7** 185-204(1865).

[*Mi*] J. MILNOR: *"Hyperbolic geometry: The first 150 years"*. Bulletin AMS **6**, 9-24 (1982).

[*H*] J. HOÜEL: *"L'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la thèorie des paralléles dit postulatum d'Euclide"*. Sociedad de Ciencias físicas y naturales de Burdeos. Sesión del 30 de diciembre de 1869.

[*Ri*] B. RIEMANN: *"Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen"* Abh. K.G. Wiss. Göttingen 13 (1868).

[*P* 1] H. POINCARÉ: *"Theorie des groupes fuchsiens"*. Acta Math. **1**, 1-62(1882).

[*P* 2] H. POINCARÉ: *"Mémoire sur les groupes kleinéens"*. Acta Math. **3**,49-92(1883).