# *La Topología General desde sus comienzos hasta Hausdorff*

POR JUAN TARRÉS FREIXENET *

## 1. Introducción

La Topología y, en particular, la topología de conjuntos, forma parte de lo que podríamos llamar matemática cualitativa; es decir, la matemática que no puede expresarse mediante fórmulas y cuyo carácter hay que buscarlo en las propiedades intrínsecas de los objetos que constituyen su estudio en cada caso concreto.

La Topología de Conjuntos, o Topología General, se ocupa del estudio de los espacios abstractos tomando como base un conjunto cuyos elementos carecen de una naturaleza determinada y entre los cuales se establecen ciertas relaciones que fijan la proximidad existente entre los mismos.

Estamos así ante una concepción del espacio más en consonancia con las ideas de Leibniz que con las de Newton, pues si bien el conjunto soporte de la estructura puede considerarse de alguna manera como el espacio absoluto (en una concepción newtoniana), no se puede hablar de espacio topológico hasta tanto no se establezcan las oportunas relaciones de proximidad entre sus elementos, siguiendo por tanto la idea de espacio de Leibniz, para quien el espacio no es una realidad absoluta, sino que se reduce a la "verdad de las relaciones". De esta manera, en un mismo conjunto se pueden establecer distintas estructuras que indiquen la proximidad entre los objetos del mismo, lo que da lugar a espacios esencialmente distintos.

¿Dónde están las verdaderas raíces de la Topología de Conjuntos?. Es ésta una cuestión ciertamente difícil (si no imposible) de contestar. Se puede seguir la evolución de determinados conceptos que han llevado a los principios básicos de una determinada teoría, pero casi siempre resulta aventurado dar una respuesta categórica a preguntas como la que acabamos de plantear. ¿Se podría haber llegado a las mismas conclusiones partiendo de situaciones distintas o siguiendo caminos alejados entre sí?. Evidentemente, nada puede asegurarse al respecto y, en lo que concierne a nuestro tema, nos limitaremos a dar una versión que, a nuestro juicio, reúne las garantías suficientes para constituir uno de estos caminos.

---

* Profesor de la Universidad Complutense.

No es descabellado pensar que una de las motivaciones que provocaron finalmente la formalización de los espacios abstractos está en la necesidad surgida ya en el siglo XVIII de dar un contenido aritmético al Análisis Matemático, como consecuencia de las consideraciones infinitesimales de Newton y Leibniz. Esto supuso en su momento la búsqueda de una definición correcta del concepto de número irracional así como el establecimiento de la representación de los números reales en una recta. Asociado a estas cuestiones aparece también la conveniencia de establecer con claridad la idea intuitiva de continuo o cantidad continua, cuya formalización originó un primer paso en la elaboración de las estructuras que más tarde conformarían el concepto de espacio abstracto. Son notables, en este sentido, las aportaciones de B. Bolzano en la primera mitad del siglo XIX y que analizaremos más adelante, aunque la definición matemática de continuo no quedara perfilada hasta los años 1880 tras los trabajos de G. Cantor.

También a lo largo del siglo XIX encontramos hechos como la necesidad de dar una definición correcta de límite de una función y, en general, del concepto de convergencia, el teorema de la integral de Cauchy, la representación de funciones mediante series trigonométricas, el teorema de Bolzano-Weierstrass, el teorema de la curva de Jordan, la aparición de la curva de Peano, etc. Todos ellos tuvieron una influencia notable a la hora de sistematizar todas las ideas que conciernen a los espacios abstractos.

A principios del siglo XIX, cualquier teoría que incluyera consideraciones de tipo espacial estaba condicionada por el propio espacio físico, lo que conllevaba la imposibilidad de generalización más allá del espacio geométrico tridimensional. Constituyó un gran paso adelante, sin el que dificilmente se podría haber llegado a la implantación de los espacios abstractos, el estudio de espacios de dimensión superior a tres, iniciado por Gauss (y proseguido por otros autores como Grassmann y Riemann), a los que se podían generalizar las ideas básicas de la Geometría. Se rompía de esta manera el cerco que representaba el espacio geométrico y se entraba en consideraciones que llevaban implícitos espacios cuyos elementos no podían representarse; éste fue, a nuestro juicio, un paso importante para el establecimiento de los espacios abstractos.

En el último cuarto del siglo XIX, un hecho trascendental vino a marcar la evolución de todas las ideas que de alguna manera iban conformando lo que tendría que ser la Topología de Conjuntos: los trabajos de Georg Cantor que dieron lugar al nacimiento de la Teoría de Conjuntos de Puntos. Estos trabajos se publicaron en los *Mathematische Annalen* en una serie de seis artículos entre los años 1879 y 1884 y que, en palabras de E. Zermelo, constituyen la quintaesencia del trabajo de su autor.

El objetivo principal de estos artículos es el estudio de los conjuntos lineales de puntos, o subconjuntos de la recta numérica, así como el de los conjuntos de puntos de lo que Cantor llamaba el continuo aritmético de dimensión $n$. En ellos aparecen plasmadas las ideas fundamentales de punto límite, conjunto derivado, conjunto cerrado, etc., destinadas a dar soporte a las teorías axiomáticas de los espacios abstractos, surgidas a comienzos del siglo XX.

Unos años antes, en 1874, el propio Cantor se había planteado la cuestión siguiente: *"¿Se puede poner una superficie en correspondencia biunívoca con los puntos de una línea?"*. Pese a que Cantor consideró la pregunta poco menos que absurda (*"... pues es evidente que dos variables independientes no pueden reducirse a una"* ) se propuso dar una demostración de la imposibilidad de dicha correspondencia. Con gran sorpresa por su parte, en octubre de 1877 comunica a R. Dedekind que ha encontrado una biyección entre los puntos de un segmento y los de un cubo de dimensión $p$.

Este otro hecho dio pie a plantearse la cuestión de la definición del concepto de dimensión de una figura, que estaba en conexión con el estudio de los hiperespacios que estudiaban Gauss, Grassmann y Riemann, y que hasta entonces se entendía como el número de coordenadas independientes necesarias para determinar cada uno de sus puntos. A este respecto, en 1878, Dedekind estableció la conjetura de que toda aplicación biunívoca entre figuras de dimensiones distintas ha de ser necesariamente discontinua. Este enunciado se conoce como el teorema de la invariancia de la dimensión y no fue demostrado hasta el año 1911, por Brouwer y Lebesgue, independientemente uno de otro. Los diferentes intentos de demostración de este enunciado aportaron nuevas ideas con influencia evidente en la teoría de los espacios abstractos.

La noción de dimensión está también entre las que influyeron en el establecimiento y posterior desarrollo de la Topología. Así, H. Poincaré escribe en 1912: *"De todos los teoremas del 'Análisis Situs' el más importante es el que expresa que el espacio tiene tres dimensiones "*.

Llegamos así, tras los trabajos de Cantor, a los albores del siglo XX en que aparecen las primeras formulaciones axiomáticas de los espacios abstractos con Fréchet en 1906 y otros autores que van perfilando cada vez más las ideas básicas de la nueva teoría, hasta llegar al año 1914 en el que se publica el libro de F. Hausdorff: *Grundzüge des Mengenlehere*. En el mismo aparece una definición de espacio topológico muy parecida a la actual y podemos considerar que es con esta obra cuando comienza a desarrollarse la Topología de Conjuntos como un cuerpo de doctrina con entidad propia dentro del contexto de las Matemáticas.

## 2. La noción de continuo

A comienzos del siglo XIX, el concepto de continuo era sumamente vago e impreciso. Ya en el siglo XVII, Isaac Newton, en su "*Tractatus de Quadratura Curvarun*" afirmaba:

*"No voy a considerar aquí cantidades matemáticas compuestas de partes extremadamente pequeñas, sino como generadas por un movimiento o flujo continuo. Las líneas se describen, y por describirse son generadas, no por superposición de partes, sino por un flujo continuo de puntos ..."*.

Podemos apreciar en estas frases una idea bastante difusa de continuo al considerar que las líneas quedan determinadas por un *"flujo continuo"* de puntos; es decir, la idea de continuo matemático quedaba ligada al movimiento de un punto ya que, de alguna manera, las líneas quedan descritas como la trayectoria de un punto móvil. Esta misma noción de continuo, obtenida a partir del movimiento de un punto, la podemos apreciar en la *"Enciclopedia Metódica. Matemáticas"* de D'Alembert (siglo XVIII) en la que en el artículo *"Punto"* se puede leer:

*"Si imaginamos que un punto se desplaza, trazará una línea; y una línea que se desplazara engendraría una superficie, etc. ...".*

Otra corriente existente entre ciertas escuelas filosóficas del siglo XVIII acerca de la definición de continuo consideraba que dicha noción debía establecerse sin tener en cuenta ninguna idea de movimiento, por considerar que éste es ajeno al propio espacio. Así, en la *"Metaphisica"* de A.G. Baumgarten podemos encontrar algunas frases que pretenden dar una definición de continuo.

*"Una serie de puntos con puntos entermedios que da lugar a una línea es un continuo ...".*

Una obra que tuvo mucho eco en la segunda mitad del siglo XVIII, con seis ediciones entre 1758 y 1800 fue el libro de A.G. Knäster, *"Anfausgründe der Aritmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspectiv"*, en el que se da la siguiente definición:

*"Una cantidad continua* (continuo) *es algo cuyas partes están conectadas de tal forma que, al detenerse, otras comienzan inmediatamente y entre un extremo y otro no hay ninguna que no pertenezca a esta cantidad".*

Obsérvese la gran analogía de esta definición, ciertamente imprecisa, y la construcción de los números irracionales dada por R. Dedekind a mediados del siglo XIX mediante sus célebres cortaduras.

En oposición a Baumgarten, Knäster sostenía que una línea no era un conjunto de puntos yuxtapuestos:

*"Si una línea estuviera formada por un conjunto de puntos yuxtapuestos, cualquiera de ellos tendría un punto inmediatamente próximo. Pero estos puntos vecinos, pese a ser distintos, no estarían separados por distancia alguna ...".*

Otro autor de esa época interesado por esta cuestión fue Karl Christian Langsdorff, que definía las líneas como el borde de una superficie al mismo tiempo que las concebía como conjuntos de puntos situados unos próximos a otros. Asimismo, Johan Schultz, amigo personal de Kant y profesor de Matemáticas en Königsberg, toma como correcta la definición de línea como borde de superficies y éstas, como borde de un cuerpo sólido.

Aparece entonces Bernhard Bolzano (1781-1848), profesor en Praga y que junto a una gran base matemática presentaba una excelente formación filosófica y teológica. Por este motivo, Bolzano consideraba de las Matemáticas lo que éstas tienen de especulativo y, en consecuencia, no debe extrañar su obsesión por el rigor a la hora de establecer definiciones o dar demostraciones de los resultados obtenidos.

En lo que concierne a sus investigaciones geométricas, Bolzano toma como cuestión primordial dar definiciones rigurosas de línea, superficie y cuerpo sólido así como el de dar el concepto matemático de continuo. En este empeño, rompió los límites tradicionales de la Geometría y consiguió formular una teoría que puede considerarse como un claro antecedente de la moderna Topología de Conjuntos.

Bolzano consideraba el concepto de flujo o movimiento como algo ajeno a la Geometría ya que, según él, dicha idea presupone la existencia del propio espacio, o lo que es lo mismo, de la Geometría, de manera que para probar la posibilidad de un determinado movimiento usado para demostrar algún teorema se debe utilizar el propio teorema, lo que constituye un círculo vicioso. Se trata pues de buscar propiedades intrínsecas de las líneas, superficies, cuerpos sólidos y continuo que permitan caracterizar sin ambigüedades tales conceptos y ésta es la tarea que se propone Bolzano, y que resuelve con un éxito mayor del que pueda parecer en un principio.

En esta línea de actuación, Bolzano da una definición de distancia:

*"Lo que se asocia a un punto b en relación con el punto a, de manera que es independiente de a ... recibe el nombre de distancia al punto b tomada desde a".*

Evidentemente, esta definición es bastante imprecisa y, por otra parte, no se dan propiedades de la misma; no obstante, podemos considerarla como un primer intento de dar una formulación intrínseca de tal noción. Por supuesto, la distancia habitual entre puntos del espacio queda comprendida dentro de este concepto más general y, de hecho, es la que utiliza Bolzano en sus ejemplos.

Considera también que las figuras geométricas son conjuntos de puntos con una estructura interna inducida por su concepto de distancia, lo que le permite hablar de puntos próximos a otros en función de la distancia existente entre ellos.

En este orden de ideas, da la siguiente definición de línea:

*"Un objeto espacial con la propiedad de que todo punto del mismo tiene exactamente un número finito de puntos vecinos correspondientes a cada distancia menor que una distancia dada recibe el nombre de línea".*

Se entiende que "vecino" de un punto de un objeto espacial respecto de una distancia dada significa un punto de la intersección de dicho objeto con la superficie de una esfera de radio igual a la distancia considerada. Vemos así como Bolzano considera entornos esféricos de un punto, si bien contempla en los mismos exclusivamente los puntos de su frontera que pertenecen al objeto espacial considerado.

Particularmente interesante es el concepto de *punto aislado* de un objeto espacial como aquél para el cual existen distancias arbitrariamente pequeñas tomadas desde el mismo de manera que no tiene puntos vecinos en dicho objeto para cada una de ellas.

Este concepto no coincide con el actual ya que presenta algunas dificultades, observadas por el propio Bolzano, como podemos encontrar en su libro *"Paradoxien des Unendlichen"*:

"Consideremos el segmento de recta $az$. Sea $b$, el punto medio entre $a$ y $z$ ; $c$, el punto medio entre $b$ y $z$ ; $d$, el punto medio entre $c$ y $z$, y así sucesivamente (Fig. 1). Si tomamos el conjunto formado por el segmento $az$ excluyendo los puntos medios citados e incluyendo $z$, éste es un punto aislado en nuestro objeto espacial".

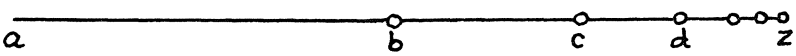


Fig. 1

Observemos que todo punto aislado en el sentido de Bolzano verifica la condición de que, en él, el conjunto es de dimensión cero, aunque no recíprocamente, pues el conjunto formado por todos los números racionales del intervalo [-1,0] junto con todos los números irracionales de [0,1] es 0-dimensional en el punto 0 mientras que no es aislado en el sentido de Bolzano. No obstante, todo punto aislado en el sentido actual, lo es también en el sentido que Bolzano da a este concepto.

Define entonces un *continuo* como un objeto espacial que no tiene puntos aislados. Se trata sin duda de la primera definición intrínseca de dicho concepto dada desde una perspectiva estrictamente matemática. Sin embargo, la definición no se ajusta exactamente a lo que la intuición nos dice que debe ser un continuo, pues, por ejemplo, dos intervalos lineales separados son un continuo de acuerdo con la definición de Bolzano, o incluso, si en el conjunto de la figura 1 eliminamos el punto $z$ obtenemos un continuo de Bolzano que, por supuesto, no responde en absoluto a lo que manda la intuición. Ahora bien, todo conjunto que cumple las condiciones para ser un continuo conforme a la definición actual de dicha noción verifica también la definición de Bolzano.

Es cierto que en los trabajos de Bolzano que tratan estas cuestiones no se dan soluciones enteramente satisfactorias, pero no es menos cierto que los caminos utilizados permiten establecer las bases para construir una estructura interna en los conjuntos de puntos que es un antecedente de lo que ha sido la Topología de los espacios abstractos.

## 3. Los espacios de dimensión superior

Uno de los inconvenientes con los que se encontraron tanto Bolzano como otros matemáticos de su época para generalizar conceptos establecidos en el espacio tridimensional ordinario era precisamente los límites que éste imponía.

En el siglo XVIII, Kant había apuntado la posibilidad de considerar espacios con más de tres dimensiones. Así, en su artículo *"Reflexiones sobre la verdadera naturaleza de las cosas"*, publicado en 1747, podemos encontrar una anticipación notable de la geometría de $n$ dimensiones. ¿Por qué, se pregunta, nuestro espacio tiene tres dimensiones?. Llega a la conclusión de que la respuesta está relacionada con la ley de la gravedad por la cual la intensidad de la fuerza de atracción entre dos cuerpos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Dice Kant en su artículo que si Dios hubiera decidido crear un mundo en el que dichas fuerzas variaran conforme a una proporcionalidad inversa al *cubo* de la distancia se hubiera hecho necesario un espacio de cuatro dimensiones. Kant adopta aquí una visión del espacio que había sido establecida hacía ya un siglo por Leibniz, para el cual, como ya hemos dicho en la introducción, la única realidad del espacio proviene de los objetos que los ocupan y no es más que una descripción matemática asbstracta de las relaciones existentes entre ellos.

Es evidente, con la visión que da el paso de los años, que la generalización del espacio tridimensional a espacios con un número arbitrario de dimensiones no resulta excesivamente complicada. En realidad, la noción de una cuarta dimensión ya había sido tenida en cuenta por los matemáticos, pero tal posibilidad fue desestimada rápidamente por considerar que se trataba solamente de una bonita especulación teórica sin valor alguno. Nadie había reparado en el hecho de que un objeto asimétrico podría ser invertido, desde el punto de vista teórico, en un espacio de dimensión superior.

No obstante, Kant creía que "una ciencia con estas posibles clases de espacios (con más de tres dimensiones) sería sin duda la mayor empresa que una mente limitada podría abordar en el campo de la Geometría".

Ya desde el punto de vista de las Matemáticas, los espacios de más de tres dimensiones no aparecen hasta Gauss, que fue el matemático más importante que trató la geometría de los hiperespacios durante los primeros cuarenta años del siglo XIX. Gauss concebía el espacio como una abstracción y, en consecuencia, la geometría no tenía por qué limitarse al espacio físico tridimensional. De hecho, podemos considerar que Gauss es el puente que condujo la teoría matemática de los hiperespacios de su creación a la madurez, ya en la segunda mitad del siglo XIX.

En su trabajo de 1831 *"Theoria Residuorum Biquadraticorum"* describe la representación usual de los números complejos en el plano al mismo tiempo que expresa que tal representación precisa una justificación mediante un modelo geométrico. Así, los enteros complejos forman una sucesión de sucesiones (variedad de dimensión dos). Al final, menciona variedades de más de dos dimensiones, aunque no entra en la discusión de las mismas. Deja claro, no obstante, que su teoría específica de los números complejos y las variedades bidimensionales está relacionada con una teoría más general de variedades que hace referencia a los sistemas de hipernúmeros y variedades de dimensión $n$ y que formaría una rama de la geometría abstracta. En *"Über die Methode der Kleinsten Quadrate"*, de los años 1850 y 1851 justifica el uso de variedades abstractas de dimensión arbitraria como el vehículo natural para llevar a cabo sus investigaciones sobre el método de los mínimos cuadrados. Tales espacios dan lugar a una geometría analítica generalizada basada en $n$ coordenadas y la distancia euclídea usual.

Las ideas de Gauss sobre espacios multidimensionales están estrechamente vinculadas a sus conceptos filosóficos de la Geometría. En su *Jubiläumschift* de 1849: *Beitrage zur Theorie der Algebraischen Gleichungen*, en donde hace una importante revisión de su primer intento de demostración del teorema fundamental del álgebra, dice:

*"Presentaré la demostración en íntima relación con la geometría de la posición, ya que ello proporciona la máxima simplicidad y brillantez. Sin embargo, el verdadero contenido del argumento en su totalidad pertenece en esencia al dominio de la teoría general abstracta de la cantidad, con independencia de objetos espaciales, cuya característica es la combinación de cantidades conectadas teniendo en cuenta la continuidad; un dominio que está muy poco cultivado y que puede desarrollarse con un lenguaje que no esté basado en imágenes".*

La visión de una geometría abstracta divorciada de la intuición espacial está relacionada con el deseo de Gauss de desarrollar una *Geometría Situs* y, en realidad, su actitud señala el comienzo de una nueva visión sobre esta cuestión: Para él, la Geometría, en su sentido más amplio, aparece liberada del espacio físico, ya que considera que se puede razonar sobre figuras, pero en el análisis final, éstas deben suprimirse en favor de la formulación de teorías geométricas abstractas.

Entre los años 1840 y 1860 se publicaron gran cantidad de trabajos sobre hiperespacios y fueron muchos los matemáticos de la época que se interesaron por esta cuestión. La mayoría de ellos introdujeron tales espacios de dimensión superior sin más que considerar sistemas de *n* coordenadas al tiempo que investigaban la geometría métrica y proyectiva de los mismos. Quienes adoptaron una actitud filosófica ante los fundamentos de la geometría de tales espacios fueron Hermann Grassmann (1809-1877) y Bernhard Riemann (1826-1866).

En 1844, Grassmann publicó la obra *"Die Lineale Ausdenungslehere"* en la que se puede observar el enorme contenido filosófico de la misma así como su gran dificultad conceptual, lo que hace que la teoría matemática contenida en ella resulta sumamente oscura. No obstante, es una obra de gran valor debido a que en ella se introduce la nueva *"teoría de la extensión"*.

Veamos las palabras del propio Grassmann en la presentación que hace de la misma:

*"Mi teoría de la extensión constituye la base de la teoría de espacio (Geometría); es decir, es una teoría matemática pura independiente de cualquier intuición espacial, cuya principal aplicación al espacio es la Geometría".*

*"Los teoremas de la geometría tienden siempre a la generalización, pero ésta no es posible debido a su limitación a las tres dimensiones del espacio ordinario; esto es posible en la teoría de la extensión".*

Aunque el estilo de Grassmann es muchas veces opaco, su línea es transparente: *Ausdenungslehre*, o la geometría abstracta, no está limitada a nuestro conocimiento del espacio físico, sino que es anterior a tal conocimiento. Es anterior a la magnitud física e incluso al número, ya que estos conceptos pueden obtenerse a partir de las cantidades continuas objeto de estudio en la Teoría.

En este contexto, Grassmann estudia los espacios abstractos de dimensión superior tras tratar el espacio ordinario tridimensional. La definición que da de ellos tiene cierta analogía con la antigua teoría del flujo *sobre la generación de figuras:*

*"Entendemos por extensión-forma de primer orden la totalidad de elementos por la que un elemento generador pasa a través de un cambio continuo".*

El conjunto de todos los elementos extendidos a lo largo de una dimensión es entonces un sistema de primer orden. Para originar formas de orden superior se procede a crear una forma de primer orden a partir de un elemento y, a continuación, tiene lugar un proceso de cambio continuo por el que se forma una sucesión de sistemas paralelos de primer orden; se tiene así un sistema de segundo orden. Mediante cambios sucesivos es posible obtener sistemas de cualquier orden finito.

Bernhard Riemann trata la cuestión de los hiperespacios en su obra *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, escrita el año 1854 con motivo de su *Habilitationsvortrag* y que no fue publicada hasta el año 1868, después de la muerte de su autor.

Igual que en el caso de Grassmann, el tratamiento dado por Riemann a la cuestión de los espacios de dimensión superior es extremadamente oscuro y el lenguaje empleado, esencialmente filosófico. Sin embargo, su trabajo es de una gran profundidad y en él se trata la generalización a $n$ dimensiones de la curvatura de Gauss, los fundamentos de la Geometría que hoy llamamos Riemanniana así como la versión elíptica de la geometría no euclídea. Contiene asimismo una discusión acerca de las relaciones entre el espacio físico y la geometría pura.

En la primera sección del libro se discute el concepto de variedad $n$-dimensional, que trata como variedades topológicas generales. De ellas, se examinan dos aspectos fundamentales: De una parte, se analiza un método de construcción, y de otra, un método de reducción para determinar puntos de las mismas mediante coordenadas.

El método de construcción de Riemann es más complejo que la antigua teoría del flujo extendida a $n$ dimensiones: El verdadero carácter de una variedad unidimensional es que la progresión continua (movimiento) es solamente posible en dos direcciones o sentidos opuestos. Si se supone que una variedad de dimensión uno pasa a través de una serie de variedades igualmente unidimensionales en correspondencia punto a punto, se obtiene una variedad de dimensión dos. En general, podemos continuar el proceso para obtener variedades de cualquier dimensión finita.

En la determinación de posiciones en una variedad $n$-dimensional, el proceso se invierte: Se fija una variedad unidimensional que se toma como referencia y en ella se destaca uno de sus puntos, que se toma como origen. Los restantes puntos de esta variedad unidimensional quedan caracterizados por su distancia a este origen. Se considera ahora una función continua de posición entre la $n$-variedad y la variedad unidimensional de la referencia, de manera que no sea constante en una región de la $n$-variedad. De acuerdo con esto, todo sistema de puntos para los cuales la función es constante forma una subvariedad continua de dimensión $n$-1, y a medida que esta función varía, estas ($n$-1) - variedades pasan de unas a otras de manera continua. Así, podemos reducir la posición de un punto en una variedad de dimensión $n$ al cálculo de un número y una variedad de dimensión $n$-1. Continuando el proceso, la determinación de un punto queda fijada por $n$ números reales que son sus coordenadas.

Es evidente que el estudio de una geometría de espacios de dimensión superior a tres no sentó las bases para el establecimiento de una teoría de los espacios abstractos. No obstante, el salto del espacio físico ordinario a otros de dimensión superior supuso un paso adelante notable en el proceso de abstracción al tener que considerar que los objetos que se manejaban no eran ya los puntos del espacio geométrico habitual con su distancia ordinaria, sino entes de otra naturaleza con los que se podían establecer relaciones que generalizaban otras ya conocidas en el espacio tridimensional.

## 4. Cantor y la invariancia de la dimensión

La aparición de los hiperespacios provoca la necesidad de establecer una definición rigurosa de la idea de la dimensión de un espacio. A principios de los años 1870 se admitía como tal el número de coordenadas independientes necesarias para determinar un punto arbitrario del mismo.

El 5 de enero de 1874, Georg Cantor (1854-1918) se plantea la cuestión, que comunica a R. Dedekind (1831-1916), de si es posible poner los puntos de una superficie en correspondencia con los de una línea. Siguiendo un razonamiento basado en la idea intuitiva de dimensión que hemos apuntado, ambos matemáticos consideran que tal pregunta es poco menos que absurda, *"... pues es evidente que dos variables independientes no pueden reducirse a una"*. Pero a pesar de ello, Cantor insiste en que es necesaria una demostración de este hecho para poder seguir manteniendo la idea de dimensión imperante.

Con gran sorpresa, y tras varios intentos fallidos, en octubre de 1877, Cantor consigue establecer una tal correspondencia entre los puntos de un segmento de recta y los de un cubo de dimensión $p$. Este descubrimiento hace que Cantor comunique a Dedekind su convencimiento de que hay que revisar el concepto de dimensión de un espacio:

*"Las diferencias entre figuras de distinto número de dimensiones deben estar en aspectos ajenos al número de coordenadas independientes que determinan cada uno de sus puntos y que se toma como característico".*

Dedekind contesta a Cantor que tanto Gauss como Riemann y otros autores daban como segura la hipótesis de que cuando se da un nuevo sistema de coordenadas en una variedad, éstas son funciones continuas de las primitivas y conjetura como cierto el siguiente enunciado, conocido como el teorema de la invariancia de la dimensión:

*"Si damos una correspondencia biunívoca entre los puntos de una variedad A de a dimensiones sobre los de una variedad B de b dimensiones, con a distinto de b, la correspondencia es discontinua".*

Este teorema se convirtió en objeto de atención de bastantes matemáticos de la época y, de hecho, no fue demostrado hasta el año 1911, cuando se había establecido ya la teoría de los espacios abstractos, por L.E.J. Brouwer y por H. Lebesgue, con independencia uno de otro y utilizando ambos, métodos completamente diferentes entre sí. En lo que nos concierne, los intentos sucesivos de demostración del mismo aportaron diversas ideas que contribuyeron al desarrollo posterior de los espacios abstractos.

El primero de estos intentos fue abordado por E. Netto en 1878. En su razonamiento, utiliza como ciertos algunos resultados no evidentes que invalidan su demostración, pero a lo largo de su trabajo utiliza diversos conceptos de naturaleza topológica y da definiciones tales como la de punto interior, punto frontera, etc. que, no obstante, no fueron suficientes para dar una explicación adecuada de la situación.

También en 1878, E. Jürgens demuestra el teorema para el caso de variedades de dimensión dos. En su trabajo podemos leer el siguiente enunciado del "principio de invariancia del dominio plano":

*"Si dos variables reales independientes* $(x_1, x_2)$ *consideradas como coordenadas del plano toman valores en todos los puntos de un círculo y si otras dos variables reales* $(y_1, y_2)$ *son funciones unívocas de ellas, de manera que un mismo par de valores* $(y_1, y_2)$ *corresponde a un número finito de valores* $(x_1, x_2)$*, cuando las variables* $(y_1, y_2)$ *se toman como coordenadas rectangulares de un segundo plano, el conjunto de las imágenes* $(y_1, y_2)$ *contiene la superficie completa de un círculo".*

Se puede expresar este resultado diciendo que el conjunto de imágenes $(y_1, y_2)$ de una región circular del plano contiene puntos interiores a otra región circular de un segundo plano. Esto no significa, no obstante, que puntos interiores deban transformarse necesariamente en puntos interiores, pero Jürgens garantiza la existencia en la imagen de puntos interiores tan próximos como se quiera a imágenes de puntos interiores.

En enero de 1879, Cantor escribe a Dedekind expresándole el convencimiento de que ha encontrado una demostración del teorema de invariancia de la dimensión, demostración que, tras algunas modificaciones, se aceptó como correcta. En ella se utiliza una versión particular del teorema del valor intermedio:

*"Toda figura conexa que tiene puntos interiores y puntos exteriores a una hiperesfera corta necesariamente el borde de la misma"*

Al cabo de veinte años, Jürgens encontró un contraejemplo que invalida esta versión del teorema del valor intermedio y de nuevo, la invariancia de la dimensión quedaba como una cuestión abierta. Como ya hemos dicho, en 1911 aparecieron por primera vez dos demostraciones correctas del teorema, obra de Brouwer y Legesgue. Sin embargo, hasta 1879, el estudio de esta cuestión sugirió la conveniencia de establecer con rigor y precisión una serie de conceptos de naturaleza topológica que iban a influir, sin duda, en el ánimo de Cantor cuando escribió su famosa Teoría de Conjuntos Lineales de Puntos.

## 5. La teoría de conjuntos lineales de puntos de Cantor

Como ya hemos dicho, entre los años 1879 y 1884, Georg Cantor publicó una serie de seis artículos en los Mathematische Annalen bajo el título *"Über unendliche, lineaire Punktmannifaltigkeinten"* ("Sobre los conjuntos infinitos lineales de puntos"). Estos trabajos constituyen los pilares sobre los que se asentaron más tarde las ideas conducentes a las distintas definiciones de espacio abstracto y son sin duda la piedra angular en la evolución de este concepto.

El origen de estos trabajos habría que buscarlo en el año 1869, cuando Cantor abandona Berlín para convertirse en *Privatdozent* de la Universidad de Halle. Allí se encuentra Cantor con el profesor Edward Heine, quien le propone el siguiente problema: "Si una función arbitraria puede representarse mediante una serie trigonométrica, ¿es dicha representación única?". El propio Heine había dado alguna solución parcial a la cuestión, imponiendo ciertas restricciones, como que la función dada fuera continua en casi todos los puntos así como que la serie trigonométrica fuera uniformemente convergente en el mismo conjunto.

Cantor se propuso dar dicho teorema de unicidad con la mayor generalidad posible. En una primera demostración, dada en 1870, supone que la serie es convergente para todo valor de $x$, pero en 1871 consigue probar que el teorema era posible incluso si, bien la representación de la función, bien la convergencia de la serie, no eran posibles para una cantidad finita de puntos. Finalmente, en 1872 demuestra que se pueden llegar a admitir una cantidad infinita de puntos excepcionales siempre que el conjunto de los cuales verifique ciertas propiedades.

Con el fin de caracterizar estos puntos, establece Cantor el concepto de *punto límite*, llamado más tarde *punto de acumulación*, de un conjunto conforme a la definición siguiente:

*"Un punto p es un punto límite de un conjunto lineal de puntos P si todo entorno del mismo, arbitrariamente pequeño, contiene varios puntos de P ".*

Este concepto era conocido ya con anterioridad y la referencia más significada del mismo la encontramos en el teorema de Bolzano-Weierstrass, que expresa que todo conjunto limitado, con infinitos puntos, tiene algún punto límite. No obstante, la gran idea de Cantor fue la de reunir todos los puntos límite de un conjunto $P$ en otro conjunto, llamado *conjunto derivado* de $P$, y que designa como $P^1$. Puesto que estos puntos constituyen a su vez un conjunto, se puede hablar de su conjunto derivado $P^2$ y así sucesivamente. Se definen así los *conjuntos de primer género y especie n* como aquéllos para los cuales el conjunto derivado de orden $n$+1 es vacío. Los conjuntos cuyos derivados son todos distintos del vacío reciben el nombre de *conjuntos de segundo género*. El teorema de unicidad de la representación de una función en forma de serie trigonométrica lo establece Cantor de forma tal que los puntos excepcionales para los que o bien la representación de la función o bien la convergencia de la serie no se verifican, constituyen un conjunto de primer género.

En lo que concierne a nuestro interés, la idea de colocar en un mismo conjunto todos los puntos límite de un conjunto dado supone un avance fundamental en la evolución del concepto de espacio, pues en ella está, como veremos más adelante, el gérmen de las primeras definiciones de espacio topológico.

Pero Cantor fue más allá en la estructura interna de los conjuntos lineales de puntos. Se da la definición por la que un conjunto $P$ *está condensado en un intervalo* $[a,b]$ si cualquier intervalo $[c,d]$, arbitrariamente pequeño, incluído en $[a,b]$ contiene puntos de $P$. Este concepto se corresponde con el actual de conjunto denso en dicho intervalo, y el propio Cantor prueba que es equivalente a que el primer conjunto derivado de $P$ coincida con $[a,b]$. Es evidente que si $P$ es un conjunto de primer género, no está condensado en ningún intervalo.

El interés de Cantor se vuelve ahora al concepto de continuo matemático, con lo que retomamos de alguna manera las ideas expresadas por B. Bolzano. El planteamiento que da a la cuestión lo podemos ver reflejado en sus propias palabras:

*"La noción de continuo no sólo ha jugado un papel importante en el desarrollo de las ciencias en general sino que también ha provocado grandes divergencias y, en consecuencia, vivas discusiones. Seguramente, esto es debido a que la idea tomada como punto de partida ha sido muy distinta según los autores a causa de que no tenían una definición rigurosa del concepto ..."*

Asimismo, en lo que concierne a la resolución del problema, sus ideas están también muy claras:

*"... me veo obligado únicamente a desarrollar aquí, de manera lo más breve posible y solamente desde el punto de vista de la teoría matemática de sistemas, esta noción ..."*

Para Cantor, igual que lo fue para Bolzano, era imprescindible descartar cualquier idea de tiempo para establecer la de continuo, por ser éste un concepto anterior a dicha idea. Cree también Cantor que no se puede llegar al continuo a través de una idea intuitiva del espacio, pues tanto éste como las figuras contenidas en él pueden describirse mediante un continuo ya formado de manera abstracta.

Se define así, en el ámbito del espacio aritmético de todos los sistemas de $n$ números reales ordenados, la noción de *conjunto perfecto* como el que coincide con su conjunto derivado. Observa Cantor que todo continuo debe ser un conjunto perfecto, pero no obstante, estos conjuntos no pueden caracterizar dicho concepto ya que, por ejemplo, dos intervalos separados en una recta constituyen un conjunto perfecto y, en cambio, no encajan en la idea intuitiva de continuo. Asimismo, el propio Cantor da un ejemplo de un conjunto lineal de puntos que, siendo perfecto, es un conjunto no condensado en toda la extensión de un intervalo, por pequeño que éste sea. Se trata del conocido *conjunto discontinuo de Cantor* formado por todos los números reales del intervalo [0,1] cuya expansión triádica está formada exclusivamente por las cifras 0 ó 2.

Cantor pensaba que en el concepto de conjunto perfecto estaba una de las cualidades intrínsecas de un continuo matemático. Para superar las dificultades que acabamos de ver introduce una nueva noción: la de *conjunto bien encadenado*:

*"Se dice que un sistema T de puntos está bien encadenado cuando dados dos puntos arbitrarios t y t ' del mismo y un número positivo r, existe siempre un número finito de puntos* $t^1, t^2, \ldots, t^n$ *de T tales que las distancias* $tt^1, t^1t^2, \ldots, t^nt'$ *son todas menores que r''.*

Con este nuevo concepto, que como sabemos, está íntimamente relacionado con la conexión, se puede dar ya una definición de continuo de manera que un conjunto *p* es un *continuo* si es simultáneamente *perfecto* y *bien encadenado.* Esta definición es evidentemente distinta de la dada por Bolzano y no da lugar a situaciones paradójicas como las que producía la definición de este último. El propio Cantor destacó las diferencias entre ambas definiciones, destacando las ventajas de su definición frente a la de Bolzano. Por supuesto, todo continuo en el sentido de Cantor se ajusta a la definición de Bolzano, pero no es cierto el enunciado recíproco. Si, por otra parte, pensamos que Cantor se estaba refiriendo a continuos aritméticos y, en particular, a conjuntos lineales de puntos, y nos limitamos a conjuntos acotados, todo conjunto perfecto es compacto y, en este caso, los conjuntos bien encadenados son también conexos, con lo cual, la definición de Cantor se ajusta perfectamente a la que manejamos en la actualidad.

Dice Cantor:

*"Sé perfectamente que la palabra "continuo" no ha tomado hasta ahora, en Matemáticas, un sentido preciso; la definición que yo he dado será demasiado corta para algunos y excesivamente amplia para otros; espero haber alcanzado el justo medio".*

Digamos finalmente que, en el transcurso de una correspondencia con el matemático sueco Ivar Bendixson acerca de un contraejemplo de este último referido a un resultado erróneo de Cantor, éste define un nuevo concepto, que iba a resultar también trascendental en la teoría de los espacios topológicos abstractos: el de *conjunto cerrado*, establecido como un conjunto que contiene todos sus puntos límite.

Por supuesto, a la vista de lo que acabamos de exponer, Cantor no consideró la Topología de Conjuntos como una estructura propia e independiente, pero sus ideas son, sin ningún género de dudas, el punto de partida para el establecimiento de dicha teoría de una manera sistemática, por cuanto profundizó de manera definitiva en las propiedades intrínsecas de los conjuntos lineales de puntos. Estas son las que constituyen los pilares básicos de la teoría de los espacios abstractos, que apareció veinte años más tarde de la mano de M. Fréchet.

## 6. La transición de Cantor a los espacios abstractos

La aparición de los trabajos de Cantor, junto con la propia dinámica de las Matemáticas de la época, llevó consigo que de manera inmediata surgieran trabajos de diversa índole en los que se consideraban conjuntos de objetos distintos de los puntos de un espacio aritmético, pero a los que se pueden aplicar los conceptos introducidos por Cantor de manera análoga a como éste lo hace en los conjuntos lineales de puntos. Tales trabajos constituyen la transición entre las teorías de Cantor y los espacios abstractos propiamente dichos.

Así, en 1883, G. Ascoli, en su trabajo *"Le Curve Limite di una Varietá data di Curve"* (Atti della Reale Accademia dei Lincei. Roma 1883) estudia conjuntos cuyos elementos son curvas. En 1887, Vito Volterra publica sus primeros trabajos sobre funcionales (íntimamente relacionados con el nacimiento del análisis funcional) en el que se trata la estructura de conjuntos cuyos elementos son "funciones que dependen de otras funciones" o "funciones de línea", términos que Volterra utiliza como sinónimos (*"Sopra le Funzioni che Dipendono da altre Funzioni"* y *"Sopra le Funzioni da Linee"*. Atti della Reale Accademia dei Lincei Rendiconti. Roma 1887). Asimismo, en 1889, Césare Arzelá, en su trabajo *"Funzioni di Linee"* (Atti della Reale Accademia dei Lincei Rendiconti. Roma, 1889) aporta nuevas contribuciones sobre esta cuestión.

Ya en 1897, en el Primer Congreso Internacional de Matemáticas, Jacques Hadamard propone el estudio del conjunto $E$ de las funciones continuas en el intervalo [0,1] con valores prefijados en los extremos y sugiere el siguiente camino para llevar a cabo dicha investigación (*"Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles"*. Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses. Leipzig. 1898):

*Divídase el conjunto E en subconjuntos E' tales que dos funciones pertenecientes a uno cualquiera de ellos están a una distancia (en el sentido de Weierstrass) menor que un número determinado r. Se puede decir entonces que el conjunto cuyos elementos son los conjuntos E' "numera" el conjunto E. Son precisamente las propiedades de ese conjunto las que deben estudiarse ...*

Se trata, pues, de llevar a cabo un estudio de la estructura interna del conjunto de tales funciones, estructura que viene marcada por los conjuntos $E'$ y, más concretamente, por la idea de proximidad o distancia entre funciones del conjunto $E$.

En 1903, Emil Borel propone el estudio de conjuntos cuyos elementos son líneas o planos (*"Quelques remarques sur les ensembles de droites ou plans"*. Bulletin de la Societé Mathematique de France. Paris. 1903) y manifiesta:

*Dada una línea fija D, diremos que la línea variable D' está infinitamente próxima a D si, elegidos dos puntos arbitrarios A y B en* D, *para cada número positivo r, se puede encontrar una posición de D' de* *manera que la distancia de D' a cada uno de los puntos A y B es menor que r.*

Con esta definición no resulta complicado dar en estos conjuntos nociones tales como las de *conjunto derivado*, *conjunto cerrado, conjunto perfecto,* etc. de la misma manera que lo hace Cantor en sus conjuntos de puntos.

Queda claro, pues, que las ideas de Cantor pueden trasladarse a conjuntos cuyos elementos no son puntos, sino objetos de otra naturaleza. Lo único que resulta imprescindible para ello es dar una definición de "proximidad" entre tales elementos. Este es el camino que lleva de manera inexorable a la definición de un espacio abstracto, que veremos en la sección siguiente.

## 7. Las primeras formulaciones de los espacios abstractos

La primera formulación axiomática de un espacio abstracto tomó como concepto clave el de límite de una sucesión de elementos. Esto ocurre en 1906, cuando M. Fréchet publica su tesis doctoral: *"Sur quelques points du Calcul Fonctionnel"* (Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo, 22 (1906), 1-74).

El planteamiento general de Fréchet lo podemos sacar de sus propias palabras:

*"... diremos que una operación funcional está definida en un conjunto E de elementos de naturaleza arbitraria (números, curvas, puntos, etc.) cuando, a cada elemento A de E le corresponde un valor numérico U(A) perfectamente determinado. El exámen de las propiedades de estas operaciones constituye el objetivo del Cálculo Funcional".*

La observación de Fréchet está en que para poder realizar un estudio adecuado del cálculo funcional es necesario desarrollar primero una teoría de conjuntos. Así, la generalidad de los resultados obtenidos va a depender de la generalidad de la teoría de conjuntos desarrollada.

Al abordar el estudio de los espacios abstractos, Fréchet toma como concepto fundamental, tal como hemos dicho ya, el de límite de una sucesión y define los conjuntos de clase (*L*) conforme a los axiomas siguientes:

*a) Es posible determinar si dos elementos de (L) son distintos.*

*b) Es posible definir el concepto de "límite de un conjunto de elementos de (L)" de manera que, para un conjunto infinito de miembros* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ *de (L) se puede determinar si existe o no un elemento límite A del mismo, con las restricciones siguientes:*

*i) Si* $A_i = A$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\{A_i\}$ *tiene límite A.*

*ii) Si* $\{A_i\}$ *tiene límite A, todas sus subsucesiones infinitas, tomadas en el mismo orden, tienen límite A.*

Se define entonces el concepto de *elemento límite* de un conjunto *E* si existe una sucesión $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots\}$ de elementos de *E*, distintos entre sí, que tiene como límite *A* . Análogamente a como se hace para los conjuntos de puntos, se pueden definir con facilidad las nociones de *conjunto derivado, conjunto cerrado, conjunto perfecto*, etc. Se define también los elementos de condensación de un conjunto $E$ como aquéllos que son límite del conjunto que resulta de suprimir en $E$ un número finito de elementos.

En la teoría de conjuntos lineales de puntos de Cantor, el conjunto derivado de orden $n$ de un conjunto $E$ contiene el derivado de orden $n+1$. Esto no ocurre en los conjuntos abstractos de clase ($L$), lo que dificulta la extensión a los mismos de diversos teoremas que resultan ser ciertos para los conjuntos de puntos. A la vista de estos problemas, Fréchet pasa a considerar los conjuntos ($E$) de clase ($V$), en los que se da una primera definición axiomática de distancia:

*a) Se puede distinguir si dos elementos de (E) son iguales o no.*

*b) A cada par A,B de elementos de (E) se asigna un número (A,B) con las propiedades:*

*i)* $(A,B) = (B,A) > 0$ *si A es distinto de B.*

*ii)* $(A,B) = (B,A) = 0$ *si* $A=B$.

*iii) Si* $(A,B)<r$ *y* $(B,C)<r$, *entonces* $(A,C)<f(r)$ *donde* $f(r)$ *tiende a cero con r y f es independiente de A,B y C.*

El número ($A,B$) recibe el nombre de distancia entre $A$ y $B$.

Se dice entonces que el conjunto de elementos $\{A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots\}$ tiene límite A si la distancia ($A_n A$) tiende a cero con $1/n$. Esta definición de límite verifica las condiciones (i) y (ii) impuestas a tal noción en los espacios ($L$); no obstante, no todas las definiciones de límite que cumplan esas condiciones pueden obtenerse a partir del concepto de "distancia": Demuestra Fréchet que el conjunto derivado de un conjunto de esta última clase es un conjunto cerrado, lo que no sucede con los conjuntos de clase ($L$). El resto de la memoria de Fréchet se dedica exclusivamente a los conjuntos ($L$) cuya definición de límite pueda deducirse de la de "distancia".

En 1908, F. Riesz presentó un trabajo en el IV Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Roma, con el título "Continuidad y Teoría de Conjuntos Abstractos" (*"Stetigkeit und abstrakte Mengenlehre"*) en el que da una nueva formulación de los espacios abstractos tomando como idea de referencia la de *"punto de condensación"*, conforme a las restricciones siguientes:

*a) Todo elemento que es punto de condensación de un conjunto M es también punto de condensación de todo conjunto que contiene a M.*

*b) Cuando se divide un conjunto en dos subconjuntos, cada punto de condensación del primero es punto de condensación de, al menos, uno de los dos subconjuntos que lo constituyen.*

*c) Un conjunto de un único elemento no tiene puntos de condensación,*

*d) Todo punto de condensación de un conjunto está unívocamente determinado por la totalidad de los subconjuntos del mismo que lo tienen como punto de condensación.*

En realidad, Riesz intentaba desarrollar toda su teoría de espacios abstractos a partir de los tres axiomas que aparecen en primer lugar. Sin embargo, observó que tal pretensión no le permitía ir demasiado lejos, lo que le indujo a introducir la cuarta condición.

Para probar que el último axioma es independiente de los tres anteriores, Riesz puso el siguiente ejemplo: Sea $M$ un conjunto infinito, de manera que todo elemento de $M$ es punto de condensación de cualquier subconjunto infinito de $M$ y de tal forma que los conjuntos finitos no tienen puntos de condensación. El espacio que se deriva de esta definición verifica las tres primeras condiciones, pero no cumple la última

Una vez fijados los axiomas, no resulta complicado establecer una teoría análoga a la de Cantor o Fréchet, tomando como conjunto derivado de $P$ el de todos sus puntos de condensación. Con la formulación de Riesz se verifica que si $A$ es un subconjunto de $B$, sus conjuntos derivados están relacionados de la misma forma (años más tarde, Fréchet introdujo esta condición como un axioma y le dió el nombre de "primera condición de Riesz"). Asimismo, en esta teoría se cumple que todo conjunto derivado es cerrado y con ello, cada conjunto derivado contiene los derivados sucesivos. Por otra parte, la teoría enunciada por Riesz no exige condiciones de numerabilidad al no contemplar la convergencia de sucesiones numerables en la definición de punto de condensación.

Los axiomas de Fréchet y Riesz no contemplan la noción de entorno de un punto, concepto que era esencial en la Teoría de Conjuntos de Cantor. Fue H. Weyl quien, en 1913, llamó la atención sobre la conveniencia de introducir los entornos de un punto a la hora de dar una estructura de espacio abstracto. En su libro sobre superficies de Riemann puede leerse:

*"... cualquier descripción de una variedad bidimensioinal requiere:*

*1. Establecer los objetos concretos que deban considerarse puntos de la variedad.*

*2. Una exposición del concepto de entorno".*

Aparece así por primera vez la necesidad de definir la idea de proximidad entre los elementos de un conjunto (en este caso, en una superficie de Riemann) a través del concepto de entorno, que queda descrito como sigue:

*"A cada punto p de la variedad F le asociamos ciertos conjuntos de puntos de la misma, definidos como 'entornos de p sobre F' con la condición de que cada entorno* $U_0$ *de un punto* $p_0$ :

*a) Debe contener a* $p_0$ .

*b) Existe una transformación biunívoca que permite que* $U_0$ *se transforme en el conjunto de los puntos interiores de un círculo euclídeo* $K_0$ *con las propiedades siguientes:*

*i) Si p es un punto de $U_0$ y U, un entorno de p sobre F formado exclusivamente por puntos de $U_0$, el interior de la imagen de U contiene el punto imagen de p.*

*ii) Si K es un círculo cuyo centro es la imagen del punto p, contenido en $K_0$, existe un entorno U de p sobre F cuya imagen está completamente contenida en K.*

Con estos axiomas queda bastante clara la idea de entorno en un conjunto del que no se conoce la naturaleza de sus elementos. No obstante, la definición de Weyl se refiere, por una parte, a variedades bidimensionales y, por otra, queda sujeta a la estructura euclídea del plano a través de las transformaciones que aparecen en su enunciado. Era, por tanto, indispensable deshacerse de tales condicionantes si se quería dar una teoría que fuera suficientemente general.

En paso adelante en este sentido lo dió, finalmente, F. Hausdorff quien, en 1914, publica su libro *"Grundzüge der Mengenlehre"*, en el que se dan los axiomas del concepto de *entorno* y que podemos considerar como definitivos ya que es a partir de entonces cuando se puede decir que comienza el verdadero desarrollo de la teoría de los Espacios Topológicos, que toma como punto de partida, precisamente, los axiomas de Hausdorff.

Puede comprobarse que los planteamientos iniciales de Hausdorff difieren muy poco de los de Weyl:

*"... Podemos asociar a cada punto del conjunto determinadas partes del mismo, llamadas 'entornos', que pueden permitir la construcción de la teoría con la eliminación del concepto de distancia ...".*

Una observación interesante de Hausdorff es el orden de jerarquía que se establece entre los conceptos de *distancia*, *entorno* y *punto límite*: Partiendo de la definición de distancia, se puede llegar a los conceptos de entorno y punto límite; una definición de entorno permite establecer la noción de punto límite, pero ya no es posible, en general, definir una distancia en el conjunto total que permita obtener la misma estructura que la proporcionada por los entornos; finalmente, si se parte de la idea de punto límite o punto de condensación, no es posible formalizar en todos los casos las nociones de distancia y entorno de manera que den lugar a un espacio equivalente.

A la vista de estas consideraciones, Hausdorff opta por tomar como punto central de su teoría de los espacios abstractos el concepto de entorno de un punto. Llama entonces *espacio topológico* a un conjunto en el que se han definido los entornos de cada uno de sus puntos de acuerdo con esta definición:

*"Un 'espacio topológico' es un conjunto E compuesto de elementos x, junto con determinados subconjuntos $U_x$, asociados a cada x; los subconjuntos $U_x$ reciben el nombre de 'entornos de x' y están sometidos a las condiciones siguientes:*

*a) A cada punto le corresponde al menos un entorno $U_x$. Todo entorno $U_x$ contiene el punto x.*

*b) La intersección de dos entornos de un èlemento x contiene un entorno de x.*

*c) Si y es un elemento de $U_x$, existe un entorno $U_y$ de y contenido en $U_x$.*

*d) Si x e y son dos elementos distintos de E, existen entornos respectivos $U_x$ y $U_y$ sin elementos en común.*

Esta formulación representa, como hemos dicho, el punto de partida de la teoría de los espacios topológicos o espacios abstractos y que en la actualidad conocemos con el nombre de Topología de Conjuntos o Topología General. En realidad, el axioma (d) de Hausdorff da lugar a un caso particular de espacios topológicos, que conocemos como Espacios de Hausdorff.

En los años sucesivos, la teoría de los espacios topológicos se fue asentando de manera progresiva en el contexto de las Matemáticas para tomar carta de naturaleza como una parcela específica de las mismas. Hay que destacar los esfuerzos que se hicieron en este sentido por parte de matemáticos como Kuratowski, que dio una nueva axiomática de tales espacios a través del concepto de *punto adherente* de un conjunto (1918), así como Asexandroff y Urysohn, que dieron la formulación actual a partir de los conjuntos abiertos. Sin embargo, éstos no son más que la punta de un enorme iceberg, ya que fueron muchos los matemáticos de la época que contribuyeron al desarrollo inicial de dicha teoría y cuya enumeración sería excesivamente prolija.

## Referencias


[1] BENDIXSON, I. *"Quelques Théorèmes de la Théorie des Ensembles de Points"*. Acta Mathematica, **2**(1883), 415-429.

[2] BOREL, E. *"Leçons sur la Théorie des Fonctions"*. París. 1898.

[3] BOURBAKI, N. *"Elementos de Historia de las Matemáticas"*. Alianza Editorial. Madrid. 1974.

[4] BROUWER, L.E.J. *"Collected Works II"*. Ed. Freudenthal. Amsterdam. 1976.

[5] CANTOR, G. *"Sur les Ensembles Infinis et Linèaires de Points"*. Acta Mathematica. **2**(1883), 349-380.

[6] CANTOR, G. *"Fondements d'une Thèorie Générale des Ensembles"*. Acta Mathematica. **2**(1883), 381-408.

[7] CANTOR, G. *"Sur Divers Théorèmes des Ensembles de Points Situés dans un Espace Continu à n Dimensions"*. Acta Mathematica. **2**(1883), 409-414.

[8] DAUWEN, J.W. *'The Invariance of Dimension: Problems in the Early Development of Set Theory and Topology"*. Historia Mathematica. **2**(1975), 273-288.

[9] DAUWEN, J.W. *"El Desarrollo de la Teoría de Conjuntos Cantoriana".* en "Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630-1910. Una Introducción Histórica". Compilación de I. Grattan-Guinness. Alianza Universidad. Madrid. 1984.

[10] DIEUDONNÉ, J. *"Abrégé d'Histoire des Mathématiques: 1700-1900 ".* Vol II. Hermann. Paris. 1978.

[11] ENGELKING, R. *"General Topology ".* PNW. Warszawa. 1978.

[12] FRÉCHET, M. *"Sur quelques points du Calcul Fonctiooonnel "* . Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **22** (1906),1-74.

[13] JOHNSON, D.M. *"Prelude to Dimension Theory: The Geometric Investigations of Bolzano".* Archiv Hist. Exact Sciences, **20** (1979),97-188.

[14] JOHNSON, D.M. *"The Problem of the Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology. Part II ".* Archiv. Hist. Exact. Sciences **25** (1981),85-267.

[15] MANHEIM, J.H. *"The Genesis of Point Set Topology "* . Pergamon Press. London. 1964.

[16] URYSOHN, P. *"Mémoire sur les Multiplicités Cantoriennes".* Fund. Math. **7**(1925), 30-137 y **8**(1926), 225-359.